Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Белокуров, Ю. П. Соловьев, Е. Т. Шавгулидзе, Об одном методе суммирования расходящихся рядов, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 3, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm156>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 10:01:43

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СУММИРОВАНИЯ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

В. В. Белокуров, Ю. П. Соловьев, Е. Т. Шавгулидзе

В настоящей работе предлагается метод суммирования расходящихся рядов, которые могут быть представлены как ряды Тейлора гладких вполне монотонных функций. Стандартным методом суммирования таких рядов является метод Бореля и его модификации [1]. Однако этот метод требует знания всех членов ряда и не позволяет восстановить значение суммы по конечному числу членов ряда, которое обычно только и бывает известно в реальных задачах. Рассматриваемый нами подход является развитием метода вычисления функциональных интегралов с помощью аппроксимации их сходящимися рядами [2]–[4].

Для гладкой вполне монотонной на полупрямой $[0, \infty)$ функции $f(t)$ по теореме С. Н. Бернштейна (см., например, [5]) существует такая неотрицательная мера Радона μ , что

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \mu(dx).$$

Положим

$$A_{2n}(R) = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_{-R}^{+R} d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} dr \exp\{-i\rho r - r^4\} \rho^{2n}, \quad B_n = \int_0^\infty x^{n/2} \mu(dx).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in C^\infty[0, \infty)$ – вполне монотонная функция на полупрямой $[0, \infty)$, удовлетворяющая условиям $|f^{(n)}(0)| \leq C n^{(4-2\lambda)n}$, где C и λ – некоторые положительные постоянные.

Тогда для любого $t > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $R = R(\varepsilon)$ и $N_0 = N_0(t, \varepsilon, R)$, что при всех $N > N_0$

$$(1) \quad f(t) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n)!} t^{n/2} A_{2n}(R) B_n + \Delta(t, R, N),$$

где $|\Delta(t, R, N)| \leq \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В качестве R и N_0 могут быть взяты любые числа, удовлетворяющие условиям $R \geq (\ln(4f(0)/\varepsilon))^{4/5}$, $N_0 \geq \max\{(2t^{1/2}R^2)^{1/\delta}, \ln 4C\varepsilon, t^{1/4}R^{3/2}\}$.

Для практического применения теоремы 1 к суммированию расходящихся рядов необходимо еще указать алгоритм вычисления входящих в формулу (1) коэффициентов B_n . Для четных n $B_n = (-1)^{n/2} f^{(n/2)}(0)$. Основу метода приближенного вычисления коэффициентов с нечетными индексами n составляет

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in C^\infty[0, \infty)$ – вполне монотонная функция на полупрямой $[0, \infty)$. Предположим, что

$$(2) \quad |f^{(n)}(0)| \leq K n^{2n},$$

где K – некоторое число, большее единицы.

Тогда для любых вещественных $\lambda > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдутся такое натуральное число $N = N(K, \lambda, \varepsilon)$ и такие коэффициенты $b_m = b_m(K, \lambda, \varepsilon)$, что

$$(3) \quad \int_0^{+\infty} x^{\lambda/2} \mu(dx) = \sum_{m=0}^N b_m f^{(m)}(0) + \delta,$$

где $|\delta| \leq \varepsilon$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 97-01-00228, 96-15-96030, 96-15-96142).

Коэффициенты b_m вычисляются с помощью равенства

$$(4) \quad \int_0^{+\infty} x^{n+\frac{\alpha-1}{2}} \mu(dx) = \frac{1}{C(\alpha, n)} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \left(\cos(\xi x^{1/2}) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \xi^{2k} x^k \right) \mu(dx) \right] \xi^{-(2n+\alpha)} d\xi,$$

где

$$C(\alpha, n) = \frac{(-1)^n \pi}{2 \cos \frac{\pi \alpha}{2} \Gamma(2n + \alpha)}, \quad |\alpha| < 1.$$

Из теорем 1 и 2 вытекает, что значение функции $f(t)$ можно восстановить с любой точностью, используя конечное число членов ряда. А именно, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. При произвольных значениях параметров $K > 0$, $\varepsilon > 0$ и $0 \leq t \leq T$ найдутся натуральное число $M = M(K, \varepsilon, T)$ и такой набор коэффициентов $c_m = c_m(K, \varepsilon, t)$, $1 \leq m \leq M$, что для любой функции $f(t)$, удовлетворяющей условиям теоремы 2, выполняется неравенство

$$\left| f(t) - \sum_{m=0}^M c_m f^{(m)}(0) \right| < \varepsilon.$$

Предложенным методом может быть просуммирован, в частности, степенной ряд

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} u_n t^n,$$

коэффициенты которого образуют две положительные последовательности $\{u_0, u_1, \dots\}, \{u_1, u_2, \dots\}$ и удовлетворяют неравенствам: $0 \leq u_n \leq K^n (2n)!$.

В этом случае ряд (5) является рядом Тейлора некоторой гладкой вполне монотонной функции $f(t)$ ($u_n = (-1)^n f^{(n)}(0)$) [6], причем эта функция единственна [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951. [2] Belokurov V. V., Shavgulidze E. T., Solovyov Yu. P. // Modern Phys. Lett. A. 1995. V. 10. №39. P. 3033–3041. [3] Белокуров В. В., Соловьев Ю. П., Шавгулидзе Е. Т. // Фунд. прикл. матем. 1997. Т. 3. №3. С. 693–713. [4] Белокуров В. В., Соловьев Ю. П., Шавгулидзе Е. Т. // УМН. 1997. Т. 52. №2. С. 153–154. [5] Эдвардс Э. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969. [6] Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: belokur@rector.msu.ru solo@difgeo.math.msu.ru shav@nw.math.msu.ru

Принято редколлегией
23.04.1999