Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященная 95-летию со дня рождения И. Г. Петровского (совместные заседания семинара имени И. Г. Петровского и Московского математического общества; восемнадцатая сессия, 25–29 апреля 1996 года), *УМН*, 1996, том 51, выпуск 5, 137–232

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1561>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 11:49:42

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

**МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
“ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ”,
ПОСВЯЩЕННАЯ 95-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ И. Г. ПЕТРОВСКОГО
(совместные заседания семинара имени И. Г. Петровского
и Московского математического общества;
восемнадцатая сессия, 25–29 апреля 1996 года)**

Международная конференция проводилась как восемнадцатая совместная сессия семинара имени И. Г. Петровского и Московского математического общества, посвященная 95-летию со дня рождения И. Г. Петровского. Она открылась 25 апреля 1996 г. в Главном здании МГУ на Воробьевых горах.

В работе конференции приняло участие более 300 человек, было заслушано и обсуждено свыше 200 докладов. Около половины из них было сделано иногородними учеными. Авторами более 40 докладов являлись представители зарубежных стран, в числе которых 4 бывших республики Советского Союза и еще 12 государств Европы, Азии и Америки. В докладах был отражен широкий круг проблем теории уравнений с частными производными, математической физики, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории динамических систем, теории функций, функционального анализа, теории вероятностей и других разделов современной математики.

Утреннее заседание 25 апреля 1996 г.

1. Заседание открыла председатель Оргкомитета конференции академик РАН О. А. Олейник. Она выразила благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований и Международному научному фонду за финансовую поддержку конференции. О. А. Олейник поблагодарила всех участников конференции и пожелала им успешной работы.

С приветствием к участникам конференции обратился ректор МГУ член-корреспондент РАН В. А. Садовничий. Он выделил четыре важных периода в истории Московского университета. Первый – это начальный этап в восемнадцатом столетии, когда существенную роль в развитии университета сыграли М. В. Ломоносов и И. И. Шувалов. Второй – это эпоха А. И. Герцена и Т. Н. Грановского в девятнадцатом веке, когда в университете начали создаваться демократические традиции. Третий период связан с деятельностью С. Н. Трубецкого, избранного на должность ректора Московского университета в 1905 г. И, наконец, четвертый – это период с 1951 года по 1973 год, когда ректором был Иван Георгиевич Петровский.

За время пребывания И. Г. Петровского на посту ректора в МГУ было открыто 5 новых факультетов, создано около 80 новых кафедр и около 200 новых лабораторий, удвоилось количество студентов. Число окончивших МГУ в течение этого периода близко к общему числу выпускников Московского университета за все предшествовавшие годы его существования. В стенах университета сформировался ряд новых научных школ, получивших всемирную известность.

Важнейшую задачу И. Г. Петровский видел в том, чтобы прививать студентам интерес к науке. Ежемесячно Иван Георгиевич приглашал к себе примерно 40 студентов разных факультетов для беседы как на научные темы, так и о повседневных проблемах студенческого быта.

В своем выступлении В. А. Садовничий отметил, что основную работу по подготовке открываемой конференции выполнил коллектив кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ. В. А. Садовничий выразил благодарность этому коллективу и заведующей кафедрой О. А. Олейник за сохранение традиций, заложенных И. Г. Петровским. В. А. Садовничий поздравил всех присутствующих с открытием конференции, поблагодарил всех участников и пожелал им успешной работы.

2. Фаддеев Л. Д. (Санкт-Петербург) *“Интегрируемые модели теории поля на дискретном пространстве-времени”*

3. Садовничий В. А. *“Математическое моделирование и его применение в космических исследованиях”*

В первой части работы (доклада) представлены математические модели физиологических систем человека, участвующих в формировании сенсорного конфликта невесомости на первом этапе орбитального полета.

Получено уравнение динамики купулы полукружных каналов вестибулярной системы – органа, реагирующего на угловые ускорения, возникающие в полете. Математическая модель купуло-эндолимфатической системы позволяет проводить анализ влияния углового движения на реакцию полукружных каналов в процессе имитации сенсорного конфликта невесомости на центрифуге с управляемым кардановым подвесом.

Получена модель перераспределения масс циркулирующей крови с учетом изменения величины внешнего давления. Функционирование системы кровообращения описано с помощью переменных, осредненных по периоду сердечного цикла и по участкам сосудистого русла: среднего артериального и венозного давления, средних объемов крови в венах и артериях. Большой круг кровообращения разделен на верхнюю и нижнюю части, что позволяет учесть гидростатическое давление столба крови при воздействии перегрузки. В качестве регуляторного механизма учитывается барорецепторный рефлекс регуляции артериального давления. В окрестности стационарного положения модель представляет собой билинейную управляемую систему шестого порядка. Управляющий параметр является кусочно-линейной функцией среднего артериального давления. Модель используется для разработки алгоритма изменения внешнего давления в кабине центрифуги при динамической имитации аэрокосмического полета. Описание алгоритмов динамической имитации, включая указанные модели физиологических систем, представлено в работе [1].

Вторая часть работы посвящена использованию линейных структур и теории особенностей в обработке цифровых изображений (ЦИ). Исследования по выделению основных структур и особых точек ЦИ, анализу и обработке ЦИ, распознаванию различных объектов на космических снимках, трансформации космических снимков в заданную картографическую проекцию ведутся нашей группой в течение последних 10 лет [2], [3].

На основании этих исследований разработан новый подход для обработки изображений. Введены и исследованы дискретные аналоги понятий особых точек и структурных линий (сепаратрис градиентного векторного поля). Предложены алгоритмы выделения структур на цифровом изображении и восстановления изображения по структурным линиям. Разработаны и исследованы новые методы сглаживания, подавления шумов и повышения контрастности цифровых изображений. Первые эксперименты показывают, что этот подход может привести к созданию новых методов сегментации и сжатия цифровых изображений. Описание подхода и некоторых алгоритмов опубликовано в [3].

[1] Александров В. В., Воронин Л. Н., Глазков Ю. Н., Ишлинский А. Ю., Садовничий В. А. Математические задачи динамической имитации аэрокосмических полетов. М.: Изд-во МГУ, 1995.

[2] Садовничий В. А. и др. // Вестник МГУ. Сер. 5. 1991. №2. С. 43–54.

[3] Садовничий В. А., Гринчук М. И., Мусин О. Р., Селезнев О. В., Староверов В. М. Структуры и особенности в обработке цифровых изображений. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ, 1995.

4. Фоменко А. Т. “Новые результаты в теории интегрируемых гамильтоновых систем”

Вечернее заседание 25 апреля 1996 г., секция 1.

1.¹ Риччи П. Э. (Ricci P. E.) (Италия, Рим) “Некоторые новые классы релятивистских ортогональных многочленов”

Соавторами доклада являются М. Хе (M. He), П. Наталини (P. Natalini) и С. Носкесе (S. Noschese).

Релятивистские многочлены Эрмита (кратко: РМЭ) были введены в работе [1]. Затем их изучали Б. Нагель (B. Nagel), Дж. Дехеза (J. Dehesa), А. Царзо (A. Zarzo), Ж. Торрес (J. Torres), А. Мартинес (A. Martinez). Эти многочлены возникают в теории квантовых релятивистских гармонических осцилляторов при представлении волновых функций многомерного оператора Шрёдингера.

Новые классы ортогональных многочленов, связанных с РМЭ и поэтому названных релятивистскими, были введены и исследованы авторами настоящего доклада. Это релятивистские многочлены Лагерра, Сеге, Якоби, Бесселя. Вообще говоря, все они обладают следующими свойствами:

- эти многочлены связаны с РМЭ;
- эти многочлены зависят от параметра N (выражающегося через скорость света) и стремятся к соответствующим классическим ортогональным многочленам при неограниченном возрастании N ;
- эти многочлены являются решениями уравнений типа гипергеометрического уравнения;
- эти многочлены удовлетворяют соотношениям ортогональности с переменными весами на соответствующих множествах.

Авторами изучены следующие вопросы:

- алгебраические и дифференциальные свойства, интегральные представления, производящие функции, ортогональность;
- распределение нулей (приближенное вычисление моментов плотности нулей);
- асимптотическое распределение нулей.

[1] Aldaya A., Bisquert J., Navarro-Salas J. // Phys. Lett. 1991. V. 156. P. 381–385.

2. Новокшенов В. Ю. (Уфа) “Построение бездисперсионного предела в уравнении Кортевега–де Фриза методом одевающей цепочки”

Рассматривается задача Гуревича–Питаевского (см. [1, гл. 4]) об асимптотике при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения уравнения Кортевега–де Фриза (кратко: КдФ) $u_t + 6uu_x + \varepsilon u_{xxx} = 0$ с быстроубывающим начальным условием $u(x, 0)$, имеющим строго монотонные “склоны” справа и слева от точки максимума. Хорошо известно, что главный вклад в асимптотику вносит дискретный спектр $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$, $N = O(\varepsilon^{-1})$, начального условия, который (вместе с фазовыми сдвигами $\{\varphi_n\}$) явно вычисляется по формулам квазиклассического приближения при $\varepsilon \rightarrow 0$. В отличие от известных подходов [2], [3], основанных на асимптотической оценке вронскиана $u(x, t, \varepsilon) \sim 2\varepsilon^2 \partial_x^2 \log W(\Psi_1, \dots, \Psi_N)$, в работе предлагается использование одевающей цепочки А. Б. Шабата $\varepsilon \partial_x(f_{n+1} + f_n) = -f_{n+1}^2 + f_n^2 - \lambda_n + \lambda_{n+1}$ в качестве инструмента решения обратной задачи рассеяния. N -солитонному потенциалу здесь соответствуют граничные условия $f_n \rightarrow \sqrt{-\lambda_n} \tanh(\varepsilon^{-1} \sqrt{-\lambda_n}(x - 4\lambda_n t - \varphi_n))$, $x \rightarrow +\infty$. Равномерная по x асимптотика f_n при $\varepsilon \rightarrow 0$ находится в виде $f_n \sim (\partial_\lambda - \partial_x) \langle \chi \rangle$, где $\langle \chi \rangle$ – среднее по периоду однозонной функции Бейкера–Ахиезера L – оператора КдФ с запрещенной зоной $[\lambda_n, 0]$. Ограниченность f_n при всех x вместе с граничными условиями при $x \rightarrow \infty$ дают интегральные соотношения на параметры χ . Оказывается, что эти соотношения в точности воспроизводят уравнения Царева на концы зон $r_j(x, t)$, определяющие уиземовское приближение главного члена асимптотики $u(x, t, \varepsilon) \sim -r_1 - r_2 - r_3 - 2\rho(\varepsilon^{-1}(x - Vt - W))$, где ρ – функция Вейерштрасса. Оценки цепочечных приближений f_n позволяют доказать оценку в среднем для нормы разности u и его приближения при $\varepsilon \rightarrow 0$.

¹Перевод этого и других текстов, представленных докладчиками на английском языке, выполнен А. С. Калашниковым.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00128).

- [1] С. П. Новиков (ред.) Теория солитонов. М.: Наука, 1980.
- [2] Lax P. D., Levermore C. D. // Comm. Pure Appl. Math. 1983. V. 36. P. 253–290.
- [3] Мазур Н. Г. // ТМФ. 1996. Т. 106. № 1. С. 44–61.
- [4] Веселов А. П., Шабат А. Б. // Функци. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. № 2. С. 1–21.

3. Фаминский А. В. “Краевые задачи для уравнения Кортевега–де Фриза и его обобщений”

Рассматриваются вопросы нелокальной корректности краевых задач для уравнения Кортевега–де Фриза

$$(1) \quad u_t + u_{xxx} + au_x + uu_x = 0$$

в различных областях. Например, в случае полуполосы $(0, T) \times \mathbb{R}_-$ задаются граничные условия

$$(2) \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{x=0} = u_1(t), \quad u_x|_{x=0} = u_2(t)$$

и устанавливаются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $T > 0$, $u_0 \in L_2(\mathbb{R}_-)$, $u_1 \in W_1^1(0, T)$, $u_2 \in L_2(0, T)$. Тогда существует единственное решение $u(t, x)$ задачи (1), (2) такое, что $u \in L_\infty(0, T; L_2(\mathbb{R}_-))$ и

$$\sup_{n \geq 0} \int_0^T \int_{-n-1}^{-n} u_x^2 dx dt < \infty.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $T > 0$, $u_0 \in H^2(\mathbb{R}_-)$, $u_1 \in H^1(0, T)$, $u_2 \in W_{4/3}^1(0, T)$, $u_0(0) = u_1(0)$, $u'_0(0) = u_2(0)$. Тогда существует единственное решение $u(t, x)$ задачи (1), (2) такое, что $u \in L_\infty(0, T; H^2(\mathbb{R}_-))$ и, кроме того,

$$\sup_{n \geq 0} \int_0^T \int_{-n-1}^{-n} u_{xxx}^2 dx dt < \infty.$$

Получены также соответствующие теоремы в пространствах более гладких функций.

Аналогичные результаты справедливы и для обобщенного уравнения КдФ с нелинейностью вида $g(u)u_x$, где функция g имеет не более чем линейный рост.

4. Жидков П. Е. (Дубна) “Инвариантные меры для уравнения Кортевега–де Фриза, порождаемые высшими законами сохранения”

Для произвольного натурального s обозначим через W_2^s пространство Соболева периодических с периодом $A > 0$ функций аргумента $x \in \mathbb{R}$ с нормой

$$\|u\|_s = \left\{ \int_0^A [u^2(x) + (D_x^s u(x))^2] dx \right\}^{1/2}.$$

Первый результат составляет теорема о корректности для любого $u_0 \in W_2^s$ периодической по пространственной переменной задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x + A, t) &= u(x, t), & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

в пространстве $C(\mathbb{R}; W_2^s)$, где $s \geq 2$ (здесь все величины вещественны, $A > 0$, а $u_0(x + A) = u_0(x)$). Из этого утверждения вытекает, что для каждого целого $s \geq 2$ указанная задача порождает динамическую систему с фазовым пространством W_2^s . Затем для указанных динамических

систем доказана инвариантность борелевских мер, ассоциированных с высшими законами сохранения, так что каждому формальному закону сохранения вида

$$I_n(v) = \int \left\{ \frac{1}{2} (D_x^n v(x))^2 + q_n(v(x), \dots, D_x^{n-1} v(x)) \right\} dx,$$

где $n \geq 3$ – целое, а q_n – полином, соответствует некоторая инвариантная мера для динамической системы с фазовым пространством W_2^{n-1} .

Аналогичный результат получен для (интегрируемого) нелинейного уравнения Шрёдингера с кубической нелинейностью.

5. Осипов А. С. “Некоторые приложения метода обратной задачи к интегрированию нелинейных дифференциально-разностных уравнений”

В сообщении рассматриваются ограниченные решения модели Вольтерра

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{a}_n &= a_n \left(\sum_{i=1}^q a_{n+i} - \sum_{i=1}^q a_{n-i} \right), \quad q \in \mathbb{N}, \\ a_n &= a_n(t) \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad t \in [0, T), \quad 0 < T \leq \infty; \quad \cdot = d/dt. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть для (1) начальные данные $(a_n(0))_{n=0}^\infty \in l_\infty$, $a_n(0) \neq 0$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что при $t \in [0, \delta)$ решение задачи Коши для (1) $(a_n(t))_{n=0}^\infty$, $a_n(t) \neq 0$, существует, единственно и находится следующим образом.

1) Строится матрица $L(0) = (L_{ij}(0))_{i,j=0}^\infty$ с ненулевыми элементами $L_{i,i-q} = a_{i-q}$, $L_{i,i+1} = 1$ (лассова матрица для (1)).

2) По формуле $S_k^i(0) = (L^{k-1}(0))_{0,i-1}$; $k \in \mathbb{N}$; $i = 1, \dots, q$; определяется моментная последовательность матрицы Вейля $S(\mathfrak{M}(\lambda, 0) = (S_k^1(0), \dots, S_k^q(0))_{k=0}^\infty$ и находится ее эволюция во времени $S(\mathfrak{M}, t)$ в силу (1):

$$S_k^i(t) = \left(\sum_{d=0}^\infty S_{i+(q+1)d}^i(0) \frac{t^d}{d!} \right)^{-1} \left(\sum_{d=0}^\infty S_{k+(q+1)d}^i(0) \frac{t^d}{d!} \right).$$

3) По формуле $a_n(t) = \frac{\Delta_{n+q}(t)\Delta_{n-1}(t)}{\Delta_{n+q-1}(t)\Delta_n(t)}$, где $\Delta_p(t) = \det(\alpha_{ij}(t))_{i,j=0}^p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha_{ij}(t) = S_{j+m+1}^{l+1}(t)$ при $i = mq + l$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $l = 0, \dots, q-1$; $\Delta_{-1} = 1$, определяем коэффициенты (1).

Если $\Delta_p(t) \neq 0$ для любого p и $t \in [0, T)$ (например, при $a_n(0) > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$), данная процедура дает глобальное решение системы.

В случае $n \in \mathbb{Z}$ можно найти решения (1) в форме степенных рядов, коэффициенты которых строятся при помощи конечных систем (1). Для уравнений автодуальной решетки [1] в полубесконечном случае устанавливается их эквивалентность системе (1) при $q = 1$.

[1] Абловитц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.

6. Васин И. А., Камынин В. Л. “Асимптотическое поведение слабых решений обратных задач для параболических уравнений с нерегулярными коэффициентами”

Исследуется близость при $t \rightarrow \infty$ решения $\{u, f\}$ обратной задачи

$$u_t - (a_{ij}(t, x)u_{x_i})_{x_j} + \alpha u = f(t)g(t, x), \quad (t, x) \in Q_\infty; \quad u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega;$$

$$u(t, x) = 0, \quad t \in [0, \infty), \quad x \in \partial\Omega; \quad \int_{\Omega} u(t, x)w(x) dx = \varphi(t), \quad t \in [0, \infty);$$

$Q_\infty \equiv (0, \infty) \times \Omega$, $\alpha \equiv \text{const}$, и решения $\{v, q\}$ обратной задачи

$$(1) \quad -(a_{ij}^\infty(x)v_{x_i})_{x_j} + \alpha v = qg^\infty(x), \quad x \in \Omega; \quad v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega;$$

$$(2) \quad \int_{\Omega} v(x)w(x) dx = \varphi^\infty.$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограничена; $u \in C(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega))$, $f \in L_2(0, T) \quad \forall T > 0$; $v \in \dot{W}_2^1(\Omega)$, $q \in \mathbb{R}^1$. Пусть $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$ и $\int_{\Omega} z(x)w(x) dx \neq 0$, где $z(x)$ найдена как решение прямой задачи (1) с $q = 1$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\|w\| + \|w_x\| \leq K_1$; $\sup_{t \in (0, \infty)} \|g(t, \cdot)\| + \|g^\infty\| \leq K_2$; $u_0 \in L_2(\Omega)$;

$$\int_{\Omega} u_0(x)w(x) dx = \varphi(0); \quad \left| \int_{\Omega} g(t, x)w(x) dx \right|, \quad \left| \int_{\Omega} g^\infty(x)w(x) dx \right| \geq g_0 > 0;$$

$\varphi \in W_2^1(0, T) \quad \forall T > 0$; $\Lambda_0|\xi|^2 \leq a_{ij}\xi_i\xi_j$, $a_{ij}^\infty\xi_i\xi_j \leq \Lambda_1|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha + \Lambda_0/(2\kappa^2) - 2(n\Lambda_1K_1K_2)^2/(\Lambda_0g_0^2) > 0$, где κ – константа из неравенства Фридрихса. Предположим, что при $k \rightarrow \infty$ слабо в $L_2(Q_1)$ $a_{ij}(t+k, x) \rightharpoonup a_{ij}^\infty(x)$; слабо в $L_2(\Omega)$ для любого $t \in [0, 1]$ $g(t+k, x) \rightharpoonup g^\infty(x)$; в норме $W_2^1(0, 1)$ $\varphi(t+k) \rightarrow \varphi^\infty$. Пусть существует $\mu(k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, такая, что $\forall \sigma(t, x) \in \dot{C}^\infty(Q_1)$

$$\left| \int_{Q_1} (a_{ij}(t+k, x) - a_{ij}^\infty(x))\sigma_{x_i}(t, x) dx dt \right| \leq \mu(k) \left\{ \sup_{t \in [0, 1]} \|\sigma(t, \cdot)\| + \|\sigma_x\|_{L_2(Q_1)} \right\}.$$

Тогда $\int_k^{k+1} \|u(t, \cdot) - v(\cdot)\|^2 dt \rightarrow 0$, $\int_k^{k+1} f(t) dt \rightarrow q$ при $k \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-00289) и Фонда INTAS (грант № 94-2187).

7. Кочубей А. Н. (Украина, Киев). “ p -адические коммутационные соотношения”

Как известно, канонические коммутационные соотношения квантовой механики не допускают представлений ограниченными операторами. Оказывается, что в p -адическом случае ситуация иная: ограниченные операторы

$$(a^+f)(x) = xf(x-1), \quad (a^-f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

в стандартном банаховом пространстве $C(\mathbb{Z}_p, Q_p)$ удовлетворяют соотношению

$$(1) \quad [a^-, a^+] = I.$$

При этом оператор $H = a^+a^-$ обладает полной ортонормированной (в p -адическом смысле) системой собственных функций: $HP_n = nP_n$, $n \geq 0$, где $\{P_n\}$ – известный базис Малера в $C(\mathbb{Z}_p, Q_p)$, оказывающийся, таким образом, p -адическим аналогом системы функций Эрмита.

Существует также представление соотношения (1) с оператором a^+a^- , не имеющим собственных векторов.

Представления деформированного соотношения

$$a_q^- a_q^+ - q a_q^+ a_q^- = I,$$

где $q \in Q_p$, $|q|_p = 1$, связаны с мультипликативными аналогами базиса Малера.

8. Маламуд М. М. (Украина, Донецк). “Обратные задачи для систем дифференциальных уравнений”

Пусть $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $1 \leq i \neq j \leq n$, $B = \text{diag}(\lambda_1 I_{k_1}, \dots, \lambda_n I_{k_n})$ – невырожденная блочно-диагональная матрица в $\mathbb{C}^N$ ($N = k_1 + \dots + k_n$), $Q(x) = (q_{ij}(x))$ – непрерывная на $[0, 1]$ матрица-функция, состоящая из $k_i \times k_j$ блоков $q_{ij}(x)$.

Рассмотрим систему уравнений 1-го порядка

$$(1) \quad B \frac{dy(x, \lambda)}{dx} + Q(x)y(x, \lambda) = \lambda y(x, \lambda)$$

и обозначим через $W(x, \lambda)$ фундаментальную $(N \times N)$ -матрицу ее решений, выделяемую условием $W(0, \lambda) = I_N$. Пусть, далее, $\widetilde{W}(x, \lambda)$ – фундаментальная матрица, соответствующая системе (1) с потенциальной матрицей $\widetilde{Q}(x) = (\widetilde{q}_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ той же блочной структуры.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$q_{ii}(x) = \widetilde{q}_{ii}(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1] \quad (1 \leq i \leq n).$$

Тогда верна импликация

$$W(1, \lambda) = \widetilde{W}(1, \lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \implies Q(x) = \widetilde{Q}(x) \quad \forall x \in [0, 1],$$

т.е. матрица монодромии $W(1, \lambda)$ системы (1) однозначно определяет $Q(x)$.

При $k_1 = \dots = k_n = 1$ теорема 1 получена З. Л. Лейбензоном. В случае вещественных λ_i ($1 \leq i \leq n$) она допускает следующее уточнение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, причем

$$\lambda_i > 0 \quad (1 \leq i \leq p), \quad \lambda_{i+p} < 0 \quad (1 \leq i \leq q), \quad n = p + q.$$

Тогда число столбцов матрицы монодромии $W(1, \lambda)$, однозначно определяющих $Q(x)$, равно $\max(p, q)$, т.е. кратности спектра оператора $J \otimes B$.

Вечернее заседание 25 апреля 1996 г., секция 2.

1. Дмитриев В. И., Салтыков Е. Г. “Высокочастотное приближение функции Грина уравнения Гельмгольца в полярной системе координат”

Периодическое по φ с периодом 2π решение уравнения

$$(1) \quad \Delta u + [k^2 - N(r, \varphi)]u = -\frac{\delta(r - r_0)\delta(\varphi - \varphi_0)}{r} \quad (0 \leq r, 0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

удовлетворяющее условию излучения, представимо через неперидическое решение V уравнения (1), определенное в области $r \geq 0, -\infty < \varphi < \infty$, в виде

$$u(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} V(r, \varphi + 2\pi m),$$

$$V(k, r, \varphi) = \int_{\Lambda} \Phi(k, P) R(k, r, P) d\lambda, \quad P = \{\varphi, \lambda\}.$$

Предполагается, что $N(r, \varphi)$ – периодическая по φ с периодом 2π комплекснозначная кусочно-непрерывная функция переменных r и φ , $N = \text{const}$ при $0 \leq r \leq r_1, r_2 \leq r, r_1 \leq r_2$. Функция R является ограниченным решением уравнения Штурма–Лиувилля:

$$(2) \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + [-k^2 + N(r, \varphi)] R = \frac{\lambda^2}{r^2} R \quad (0 < r),$$

удовлетворяет условию излучения и при $r \rightarrow 0$ условию

$$R = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin[\lambda \ln r + \gamma(k, \varphi, \lambda)] + o(1).$$

Λ – непрерывный спектр, соответствующий задаче (2). (Дискретный спектр, по предположению, отсутствует.) Функция Φ удовлетворяет уравнению:

$$(3) \quad \Phi(P) = G(P, \varphi_0)R(r_0, \varphi_0, \lambda) + \int_{\Lambda} d\lambda' \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi' \left[-\frac{\partial}{\partial \varphi'} (K_1 G) + K_2 G \right] \Phi(Q),$$

$$G_{\varphi\varphi} - [\lambda^2 + \gamma_{\varphi}^2(P)]G = -\delta(\varphi - \varphi'), \quad Q = \{\varphi', \lambda'\}.$$

Функции K_1 и K_2 выражаются через функции R , R_{φ} и $R_{\varphi\varphi}$.

При большом значении параметра K в (1) или при слабой зависимости функции N от φ ряд Неймана для уравнения (3) сходится.

2. Сушко В. Г. “Асимптотическое решение краевой задачи для бисингулярного параболического уравнения”

В полуполосе $D\{0 < t \leq T, 0 < x < \infty\}$ рассматривается краевая задача

$$(1) \quad \varepsilon^2 u_{xx} - a(t, x)u_x - b(t, x)u - u_t = f(t, x),$$

$$(2) \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad u(t, 0) = g(t),$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, коэффициенты, правая часть, начальная и граничная функции бесконечно дифференцируемы в замыкании D , $a(t, x) \geq a_0 > 0$. Решение соответствующей предельной задачи при $\varepsilon = 0$ является непрерывной в $\overline{D}$ функцией, имеющей скачки производных на выходящей из угловой точки границы характеристике $x = x_0(t)$ предельного уравнения.

Для решения задачи (1), (2) строится асимптотическое представление вида

$$(3) \quad U_N(t, x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{2N} \varepsilon^k [u_k(t, x) + v_k(t, (x - x_0(t))/\varepsilon) + w_k(t, x, \varepsilon)].$$

Здесь $u_0(t, x)$ – решение предельной задачи, $u_k(t, x)$ – решения некоторых уравнений в частных производных первого порядка; функции $v_k(t, \xi)$, $w_k(t, x, \varepsilon)$ имеют погранслоный характер, являются решениями краевых задач для параболических уравнений с коэффициентами, зависящими только от t , и могут быть выписаны в явном виде.

ТЕОРЕМА. Представление (3) является асимптотическим разложением решения задачи (1), (2), и для него в $\overline{D}$ справедлива оценка

$$|u(t, x, \varepsilon) - U_N(t, x, \varepsilon)| \leq C(N)\varepsilon^{2N+1}.$$

Аналогичного типа представления могут быть построены и при других предположениях относительно коэффициентов уравнения.

3. Калякин Л. А. (Уфа). “Корректность задачи о возмущении солитонов”

Рассматривается нелинейное эволюционное уравнение с малым возмущением $\partial_t u + L[u] = \varepsilon F[u]$ в предположении наличия у предельной задачи двухпараметрического семейства решений $U(x, s; \beta)$, $x \in \mathbb{R}$, $s = s(t) + s_0$. Характерный пример дает возмущенное уравнение КдФ $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \varepsilon F[u]$ ($x \in \mathbb{R}$, $t > 0$) с односолитонным начальным данным в главном члене асимптотики $u(x, t, \varepsilon)|_{t=0} = 2\beta^2 \operatorname{sech}^2(\beta x - s_0) + \varepsilon v(x)$ ($0 < \varepsilon \ll 1$). Рассматривается формальное асимптотическое по модулю $o(\varepsilon^2)$ решение $u(x, t; \varepsilon) = U(x, \varepsilon^{-1}S_0(\tau) + S_1(\tau); B_0(\tau)) + \varepsilon V + \varepsilon^2 W$, $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\tau = \varepsilon t$), равномерное на большом промежутке времени $0 < t \leq O(\varepsilon^{-1})$; $\sigma = S/\varepsilon$.

ТЕОРЕМА. Пусть невозмущенная задача представляет собой уравнение с односолитонным начальным данным $U(x, s; \beta)$. Если выполнено секулярное условие $\varepsilon V + \varepsilon^2 W = o(1)$, то параметры главного члена B_0 , S_0 , $S_1(\tau)$ определяются однозначно и не зависят от произволов, которые остаются в поправках V , W , в случае уравнений КдФ и МКдФ, нелинейного уравнения Шрёдингера, уравнения Sin-Gordon, уравнения Фил-4.

Доказательство пригодно для других уравнений и сводится к проверке асимптотических тождеств, которые определяются вариационными производными нелинейного оператора и не зависят от возмущения:

$$\begin{aligned} \partial_t \int [V, V_1] dx + \int ([\delta L[U] \partial_\sigma V, V_1] + [\partial_\sigma V, \delta L[U] V_1]) dx &= o(1), \\ \int [\delta^2 L[U] V_1 V_1, V_1] dx &= o(1). \end{aligned}$$

Здесь $V_1 = \partial_x U$ – асимптотическое решение линеаризованного однородного уравнения $\partial_t V_1 + \delta L[U] V_1 = O(\varepsilon)$. Функция V – решение неоднородного уравнения, соответствующее первой поправке. Произведение $[u, v]$ определяется формулами спектрального разложения по базису квадратов функций Йоста в спектральной задаче, соответствующей невозмущенному уравнению.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00501).

4. Нефедов Н. Н. “Метод дифференциальных неравенств для систем нелинейных сингулярно возмущенных уравнений”

В докладе рассматриваются сингулярно возмущенные задачи вида

$$(1) \quad \varepsilon^2 \Delta u = f(u, x, \varepsilon), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R}^n; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial D,$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, Δ – оператор Лапласа, функция f и граница области ∂D являются достаточно гладкими, ν – внутренняя нормаль к $\partial\Omega$. Для скалярных задач вида (1) разработан асимптотический метод дифференциальных неравенств, суть которого состоит в том, что нижнее и верхнее решения строятся путем модификации формальной асимптотики. В настоящем докладе делается обобщение на векторный случай, причем для простоты изложения рассматривается случай $n = 2$.

Потребуем выполнения следующих условий.

(A1). Вырожденное уравнение $f(u, x, 0) = 0$ имеет два решения $u = \varphi_1(x)$ и $u = \varphi_2(x)$, причем $\varphi_1^1(x) \neq \varphi_2^1(x)$, а $\varphi_1^2(x) = \varphi_2^2(x)$.

(A2). Пусть $f^1(\varphi_1^1(x), u^2(x), x, 0) = f^1(\varphi_2^1(x), u^2(x), x, 0) = f^2(u^1(x), \varphi_1^2(x), x, 0) = 0$, $f_{u^1}^1(\varphi_1^1(x), u^2(x), x, 0) > 0$, $f_{u^1}^1(\varphi_2^1(x), u^2(x), x, 0) > 0$, $f_{u^2}^1(u^1(x), \varphi_1^2(x), x, 0) > 0$ в рассматриваемой области.

(A3). Существует замкнутая кривая C , лежащая в D , такая, что

$$I(x) = \int_{\varphi_1^1(x)}^{\varphi_2^1(x)} f^1(s, u^2(x), x, 0) ds = 0, \quad \int_{\varphi_1^1(x)}^p f^1(s, u^2(x), x, 0) ds > 0,$$

$p \in (\varphi_1^1(x), \varphi_1^2(x))$, $x \in C$, $\frac{\partial I}{\partial N}(x) < 0$, $x \in C$, где N – внутренняя нормаль к C . В этом случае методом дифференциальных неравенств доказана

ТЕОРЕМА. При условиях (A1)–(A3) для достаточно малых ε существует решение (1) с внутренним переходным слоем в окрестности C , являющееся также устойчивым решением соответствующей параболической задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00694).

5. Головатый Ю. Д. (Украина, Львов). “О двухпараметрической спектральной задаче для бигармонического оператора”

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, а γ – гладкая замкнутая кривая, лежащая в Ω . В окрестности γ введем координаты (s, ξ) , где s – длина дуги γ , ξ – нормаль к γ . Следующая двухпараметрическая спектральная задача возникла при исследовании асимптотики собственных значений и собственных функций при $\varepsilon \rightarrow 0$ закрепленной пластины с сильно возмущенной плотностью в ε -окрестности многообразия γ :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - \mu_1 q(\xi) w(s, \xi) = 0, \quad (s, \xi) \in \Gamma; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}(s, \pm 1) = \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3}(s, \pm 1) = 0; \\ (2) \quad & \Delta^2 v = 0, \quad x \in \Omega \setminus \gamma, \quad v|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0; \quad v|_{\gamma} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\gamma \pm 0} = \frac{\partial w}{\partial \xi}(s, \pm 1); \\ (3) \quad & \left[\frac{\partial \overline{v}}{\partial n} \Delta v \right]_{\gamma} + 2\kappa(s) \operatorname{Re} \int_{-1}^1 \overline{w} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} d\xi + \mu_2 \int_{-1}^1 q(\xi) |w|^2 d\xi = 0; \end{aligned}$$

где $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ – параметры, $\kappa(s)$ – кривизна кривой γ , n – вектор нормали, заданный на $\partial\Omega \cup \gamma$. Здесь $q > 0$, $\Gamma = \gamma \times (-1, 1)$, $[f]_{\gamma}$ – скачок функции f на γ .

Для такой задачи легко обобщить понятие точечного спектра. Сопоставив задаче (1)–(3) соответствующий матричный оператор, можно утверждать следующее.

ТЕОРЕМА. Спектр задачи (1)–(3) – вещественный, точечный, лежит в полуплоскости $\mu_1 \geq 0$ и обладает свойствами:

- (i) если (μ_1, μ_2) – точка спектра, то μ_1 – собственное значение задачи (1);
- (ii) при $\mu_1 > 0$ спектр – дискретный и каждая пара собственных значений (μ_1, μ_2) имеет конечную кратность;
- (iii) при $\mu_2 > 0$ каждая пара $(0, \mu_2)$ принадлежит точечному спектру и имеет бесконечную кратность.

6. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю. (оба – Ярославль), Розов Н. Х. “О явлении буферности в длинной линии с туннельным диодом”

Рассматривается дифференциально-разностное уравнение вида

$$\begin{aligned} (1) \quad & \dot{x}(t) - (1 - \alpha\varepsilon)\dot{x}(t - h) + (1 - \varepsilon)x(t) + (1 - \alpha\varepsilon)(1 + \varepsilon)x(t - h) \\ & = \beta [x(t) - (1 - \alpha\varepsilon)x(t - h)]^2 - [x(t) - (1 - \alpha\varepsilon)x(t - h)]^3, \end{aligned}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$; $\alpha, h > 0$; знак β произволен. Уравнение (1) моделирует работу генератора, содержащего отрезок длинной линии и туннельный диод.

ТЕОРЕМА. Пусть при некотором натуральном n выполняются неравенства $\alpha < 2(1 + 2\omega_n^2 - \omega_1^2)^{-1}$, $1 + 10\omega_n^2 - 15\omega_n^4 \neq 0$, где $\omega_1 < \omega_2 < \dots$ – положительные корни уравнения $\omega \operatorname{tg}(\omega h/2) = 1$. Тогда найдется такое $\varepsilon_n > 0$, что при любом ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_n$, уравнение (1) имеет экспоненциально орбитально устойчивый (в метрике фазового

пространства $W_2^1(-h, 0)$ цикл, для которого справедливо асимптотическое при $\varepsilon \rightarrow 0$ представление

$$x(\tau, \varepsilon) = \frac{1 + \omega_n^2}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{2}{1 + \omega_n^2} - \alpha} \cos(\omega_n \tau) + O(\varepsilon^2),$$

$$\tau = [1 + \varepsilon \sigma + O(\varepsilon^2)]t, \quad \sigma = -4\beta^2 [2 - \alpha(1 + \omega_n^2)] / 3(1 + 3\omega_n^2)(2 + h + h\omega_n^2).$$

Из приведенной теоремы следует, что при подходящем уменьшении параметров α , ε можно гарантировать существование у уравнения (1) любого наперед заданного числа устойчивых циклов. Иначе говоря, в генераторе наблюдается явление буферности (что удастся подтвердить и экспериментально). Отметим, что при уменьшении параметра α в уравнении (1) появляются также еще и торы все более высоких размерностей, однако все они неустойчивы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и INTAS.

7. Васильева А. Б. “О внутреннем переходном слое типа ступеньки в системах сингулярно возмущенных уравнений”

Рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача

$$\varepsilon \frac{d^2 y_i}{dx^2} = \sum_{k=1}^2 A_{ik}(y_1, y_2, x) \frac{dy_k}{dx} + B(y_1, y_2, x), \quad 0 < x < 1, \quad i = 1, 2;$$

$$y_1(0, \varepsilon) = y_1^0, \quad \frac{dy_1}{dx}(0, \varepsilon) = z_1^0; \quad y_2(1, \varepsilon) = y_2^1, \quad \frac{dy_2}{dx}(1, \varepsilon) = z_2^1,$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Строится асимптотика по параметру ε решения этой задачи, имеющего форму контрастной структуры типа ступеньки (т.е. имеющего внутренний переходный слой типа ступеньки). При этом в некоторой точке x_0 ($0 < x_0 < 1$) в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место скачок обеих компонент y_1 и y_2 .

Результат получен на базе работ [1], [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00694).

[1] Васильева А. Б. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 10. С. 1401–1411.

[2] Васильева А. Б. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 4. С. 520–531.

8. Бутузов В. Ф. “Контрастные структуры типа всплеска в нелинейной сингулярно возмущенной параболической системе”

Для системы двух уравнений

$$\varepsilon^4 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = f(u, v, x, t), \quad \varepsilon^2 \left(b^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} \right) = g(u, v, x, t),$$

рассматриваемой области $(0 < t < T) \times (0 < x < l)$ с граничными условиями второго рода, построены асимптотические разложения по малому параметру ε решений, имеющих существенное отклонение от решений вырожденной задачи в малой окрестности некоторой кривой $x = x_*(t, \varepsilon)$. Такие решения называются контрастными структурами типа всплеска. Асимптотика контрастной структуры содержит регулярную часть, пограничные функции в окрестностях $x = 0$ и $x = l$ и функции, описывающие всплеск решения. Кривая всплеска $x = x_*(t, \varepsilon)$ заранее не известна, она находится в ходе построения асимптотики в виде ряда $x_*(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots$. Рассмотрены два случая.

1°. В окрестности кривой $x = x_*(t, \varepsilon)$ происходит всплеск функции $u(x, t, \varepsilon)$, который описывается функциями, зависящими от $\xi = \varepsilon^{-2}(x - x_*(t, \varepsilon))$, и функциями, зависящими от $\zeta = \varepsilon^{-1}(x - x_*(t, \varepsilon))$. Для существования такой контрастной структуры требуется, чтобы:

а) уравнение $f(u, v, x, t) = 0$ имело два корня $u = \varphi_1(v, x, t)$ и $u = \varphi_2(v, x, t)$, причем $\varphi_1 < \varphi_2$, $f_u(\varphi_1, v, x, t) > 0$, $f_u(\varphi_2, v, x, t) < 0$;

б) существовала функция $\psi(v, x, t)$ такая, что $\int_{\varphi_1}^{\psi} f(u, v, x, t) du = 0$.

2°. В окрестности кривой $x = x_*(t, \varepsilon)$ происходит всплеск обеих функций $u(x, t, \varepsilon)$ и $v(x, t, \varepsilon)$, который описывается только функциями, зависящими от ζ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00694).

Вечернее заседание 25 апреля 1996 г., секция 3.

1. Бамбузи Д. (Bambusi D.) (Италия, Милан), Нехорошев Н. Н. “Сильная устойчивость приближенной основной моды некоторых нелинейных волновых уравнений”

2. Буте де Монвель А. (Boutet de Monvel A.) (Франция, Париж) “Гамильтоны N тел: регулярность граничных значений резольвенты”

Пусть A, H – самосопряженные операторы в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Обозначим $R(z) = (H - zI)^{-1}$ для любого комплексного числа z из дополнения к спектру $\sigma(H)$ оператора H . Предположим, что функция $\tau \mapsto R_\tau(z) = \exp(-iA\tau)R(z)\exp(iA\tau) \in B(\mathcal{H})$ удовлетворяет условию Липшица (данное свойство не зависит от z). Тогда пересечение областей определения $D(H)$ и $D(A)$ операторов H и A является ядром для H , а квадратичная форма, заданная на $D(H) \cap D(A)$ выражением $2 \operatorname{Re}\langle Hf, iAf \rangle$, непрерывна в топологии графика, соответствующей H . Обозначим через $[H, iA]$ непрерывную квадратичную форму на множестве $D(H)$ (наделенном топологией графика), являющуюся расширением предыдущей.

Пусть $E(J)$ – спектральный проектор для H , соответствующий ограниченному вещественному борелевскому множеству J . Тогда квадратичную форму $E(J)[H, iA]E(J)$ можно отождествить с некоторым ограниченным симметрическим оператором в $\mathcal{H}$.

Теперь мы можем определить множество $\mu^A(H)$ вещественных чисел, на котором выполняется строгая оценка Мурра (Mourre): точка λ вещественной оси принадлежит $\mu^A(H)$ тогда и только тогда, когда существуют такое число $a > 0$ и такая ограниченная открытая окрестность J точки λ , что $E(J)[H, iA]E(J) \geq aE(J)$.

Э. Мурр установил, что если H является достаточно регулярным относительно A , то H обладает хорошими спектральными свойствами на $\mu^A(H)$. Наши результаты дают точное описание свойств гладкости граничных значений $R(\lambda \pm i0)$ резольвенты, рассматриваемых как функции спектрального параметра $\lambda \in \mu^A(H)$.

Чтобы получить оптимальные результаты, будем использовать классы Гёльдера–Зигмунда. Пусть $\alpha > 0$ – вещественное число, E – банахово пространство, $f: \mathbb{R} \rightarrow E$ – ограниченная непрерывная функция. Будем говорить, что f принадлежит классу Λ^α , если выполняется одно из следующих условий:

- 1) если $0 < \alpha < 1$, то $\|f(x + \varepsilon) - f(x)\| \leq C|\varepsilon|^\alpha$ для любых $x, \varepsilon \in \mathbb{R}$;
- 2) если $\alpha = 1$, то $\|f(x + \varepsilon) + f(x - \varepsilon) - 2f(x)\| \leq C|\varepsilon|$ для любых $x, \varepsilon \in \mathbb{R}$;
- 3) если $\alpha = k + \sigma$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $0 < \sigma \leq 1$, то f принадлежит классу C^k , а ее производная $f^{(k)}$ порядка k принадлежит классу Λ^σ .

Оператор H принадлежит классу $C^\alpha(A)$, если функция $\tau \mapsto R_\tau(z) \in B(\mathcal{H})$ принадлежит классу Λ^α (это свойство не зависит от z). Для вещественного $s > 0$ обозначим через $\mathcal{H}_s$ область определения оператора $|A|^s$, наделенную топологией графика. Как обычно, будем считать, что $\mathcal{H}_s \subset \mathcal{H} = \mathcal{H}^* \subset \mathcal{H}_s^*$, откуда $B(\mathcal{H}) \subset B(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_s^*)$. Положим $\mathbb{C}_\pm = \{z \in \mathbb{C} \mid \pm \operatorname{Im} z > 0\}$.

Теперь мы можем сформулировать один из наших основных результатов.

Пусть $s > 1/2$ – вещественное число, а H принадлежит классу $C^{s+1/2}(A)$. Предположим также, что в спектре H есть лакуна (т.е. $\sigma(H) \neq \mathbb{R}$). Тогда голоморфные отображения $\mathbb{C}_\pm \ni z \mapsto R_\tau(z) \in B(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_s^*)$ обладают непрерывными расширениями на $\mathbb{C}_\pm \cup \mu^A(H)$, а соответствующие граничным значениям отображения $\mu^A(H) \ni \lambda \mapsto R(\lambda \pm i0) \in B(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_s^*)$ принадлежат локально классу $\Lambda^{s-1/2}$.

Пусть Π_+ и Π_- – спектральные проекторы для A , связанные, соответственно, с полуосями $[0, +\infty)$ и $(-\infty, 0]$. Аналогично предыдущему устанавливаются свойства регулярности отображений $\lambda \mapsto \Pi_\pm R(\lambda \pm i0) \in B(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_t)$, где $s > 1/2$ и $t \geq s - 1$ (если $t < 0$, то $\mathcal{H}_t \equiv \mathcal{H}_t^*$).

Как следствия получаются теоремы о свойствах потока $\{\exp(iAr), r \in \mathbb{R}\}$, порождаемого оператором H .

Применения этих абстрактных результатов к различным классам псевдодифференциальных операторов H даны в диссертации Ж. Сабани (J. Sahbani).

Доклад основан на работе, выполненной совместно с Владимиром Жоржеску (Vladimir Georgescu).

[1] Amrein W. O., Boutet de Monvel A., Georgescu V. Commutator Methods and Spectral Theory of N -Body Hamiltonians. // Progress in Math. V. 135. Basel: Birkhäuser, 1996.

3. Яфаев Д. Р. (Санкт-Петербург). “Теоремы о следах для псевдодифференциальных операторов”

Основные результаты доклада опубликованы в [1].

[1] Lerner N., Yafaev D. On trace theorems for pseudo-differential operators // Exposé № II. Paris: Ecole Polytechnique, 1995.

4. Радвогин Ю. Б. “Фронтальная асимптотика нелинейного уравнения Клейна–Гордона”

5. Сабитов К. Б. (Стерлитамак). “О задаче Моравец для уравнений смешанного типа”

Рассмотрим уравнение Лаврентьева–Бицадзе

$$(1) \quad Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} \equiv u_{xx} + K(y) u_{yy} = 0$$

в области D , ограниченной спрямляемой кривой Γ , лежащей в полуплоскости $y > 0$, с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, кусочно-гладкой кривой $\gamma: dx + \sqrt{-K(y)} dy \geq 0$ и характеристикой $CB: x - y = 1$ уравнения (1) при $y < 0$.

ЗАДАЧА МОРАВЕЦ (задача М). Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \wedge C^1(D \cup \Gamma \cup \gamma) \wedge C^2(D_+ \cup D_-);$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-;$$

$$u_x dy/ds - K(y) dx/ds = \varphi(s), \quad (x, y) \in \Gamma \cup \gamma,$$

где φ – заданная на $\Gamma \cup \gamma$ известная функция, $D_{\pm} = D \cap \{\pm y > 0\}$, s – длина дуги кривой $\Gamma \cup \gamma$, отсчитываемая от точки B .

В известных работах К. Моравец и Л. Берса получены теоремы единственности решения этой задачи при некоторых геометрических ограничениях на кривую Γ . В докладе в случае, когда γ совпадает с характеристикой $x + y = 0$, доказаны теоремы единственности и существования решения задачи М без каких-либо ограничений геометрического характера на кривую Γ . В общем случае, когда γ , вообще говоря, не является характеристической кривой, получены теоремы единственности решения задачи М при произвольной кривой Γ из класса Ляпунова. Изучена также спектральная задача М для оператора L , которая сведена к нелокальной эллиптической задаче на собственные значения.

6. Шишмарев И. А. “Асимптотика при больших временах решений различных нелинейных эволюционных уравнений и систем”

7. Троицкая С. Д. “О единственности обобщенного решения задачи Дарбу”

Пусть в плоскости Oxy задана область $D = \{(x, y) : x_* < x < 0, l_2(x) < y < l_1(x)\}$, где функции $l_i(x) \in C^2([x_*, 0])$, $l'_i(x) < 0$, $i = 1, 2$, и $l_1(0) = l_2(0) = 0$, $0 < \lim_{x \rightarrow -0} |l'_2(x)| < \lim_{x \rightarrow -0} |l'_1(x)|$. В области D для гиперболического уравнения

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = f(x, y),$$

в котором $a(x, y), b(x, y) \in C^1(D_0)$, $c(x, y) \in C(D_0)$, где область $D_0 \supset \overline{D}$, а $f \in L_2(D)$, изучается обобщение классической задачи Дарбу – краевая задача, заключающаяся в нахождении обобщенного решения $u(x, y)$ уравнения (1), принадлежащего пространству С. Л. Соболева $W_2^1(D)$ и удовлетворяющего краевым условиям вида

$$(2) \quad u|_{y=l_i(x)} = \varphi_i(x), \quad x \in (x_*, 0), \quad \varphi_i \in W_2^1((x_*, 0)), \quad i = 1, 2, \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0).$$

ТЕОРЕМА 1. Для любой функции $f \in L_2(D)$, любых $\varphi_i \in W_2^1((x_*, 0))$, $i = 1, 2$, в пространстве $W_2^1(D)$ всегда существует и притом единственное обобщенное решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), и для него справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^{1h}(D)}^2 := \|u\|_{W_2^1(D)}^2 + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right\|_{L_2(D)}^2 \leq c \{ \|f\|_{L_2(D)}^2 + \|\varphi_1\|_{W_2^1((x_*, 0))}^2 + \|\varphi_2\|_{W_2^1((x_*, 0))}^2 \},$$

где c не зависит от f , φ_i , $i = 1, 2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01292).

8. Филиновский А. В. "Стабилизация решений волнового уравнения в расширяющихся областях"

Изучается поведение при $t \rightarrow \infty$ решения смешанной задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ u(0, x) &= f(x), \quad u_t(0, x) = g(x), \quad u|_{x \in \partial\Omega} = 0, \end{aligned}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — неограниченная область с гладкой границей, $\overline{\Omega}$ не содержит начало координат, функции f и g — гладкие и финитные в Ω . Пусть $m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $\varphi(x) = \alpha(x_1^2 + \dots + x_m^2) + x_{m+1}^2 + \dots + x_n^2$. Ω называется областью класса G_φ , если $(\nu, \nabla \varphi) \leq 0$, $x \in \partial\Omega$, где ν — единичный вектор внешней по отношению к Ω нормали к $\partial\Omega$, и $x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq C_1|x|^{2\alpha}$, $x \in \Omega$, $C_1 > 0$.

ТЕОРЕМА. Пусть $n \geq 9$, $1 \leq m \leq 2n + 3 - \sqrt{28n + 42}$, $\frac{1}{2} + \frac{n}{(n-2)(n-6)} \leq \alpha < 1$ и $\Omega \in G_\varphi$. Тогда справедлива оценка

$$\int_0^\infty dt \int_\Omega \left(\left| \frac{(\nabla u, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} + \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} u_t \right|^2 + |\nabla u|^2 - \frac{|(\nabla u, \nabla \varphi)|^2}{|\nabla \varphi|^2} + \frac{|u|^2}{|x|^2} \right) \frac{dx}{|x|^{2\alpha-1}} \leq C_2(n, \alpha, f, g).$$

Утреннее заседание 26 апреля 1996 г., секция 1.

1. Абдрашитов И. В. "О накоплении собственных значений к границе существенного спектра в одной задаче теории упругости"

Рассматривается спектральная задача

$$\begin{aligned} (1) \quad & y^{(IV)} + (g(x)y')' + \lambda((\alpha(x)y'')'' + \beta(x)y) + \lambda^2 y = 0, \\ (2) \quad & y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0, \end{aligned}$$

которая при условии $\alpha(x) \equiv \alpha = \text{const}$ была детально изучена в работах В. Н. Пивоварчика, П. Ланкастера, А. А. Шкаликова, Р. О. Гринива.

ТЕОРЕМА 1. Существенный спектр задачи (1), (2) представляет собой отрезок $\Gamma = [-1/\alpha_-; -1/\alpha_+]$, где $\alpha_- = \min_{[0,1]} \alpha(x)$, $\alpha_+ = \max_{[0,1]} \alpha(x)$.

Естественным образом возникающий вопрос о накоплении собственных значений (СЗ) у концов отрезка Γ рассмотрим в более общей постановке. Пусть в уравнении

$$(3) \quad -(r(x, \lambda)y'')'' + (g(x, \lambda)y')' - p(x, \lambda)y = 0$$

функции $r(x, \lambda) > 0$, $g(x, \lambda)$, $p(x, \lambda)$ вещественны, непрерывны при $(x, \lambda) \in [0, 1] \times (\mu, \nu)$ и числа

$$r := \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{r(x, \nu)}{|x-a|^\gamma}, \quad g := \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{g(x, \nu)}{|x-a|^{\gamma-2}}, \quad p := \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{p(x, \nu)}{|x-a|^{\gamma-4}}$$

конечны для некоторой точки $a \in (0, 1]$. Через $\min$ и $\max$ будем обозначать минимальное и максимальное СЗ матриц:

$$H(x, \lambda) = \begin{pmatrix} p(x, \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(x, \lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r(x, \lambda)} \end{pmatrix},$$

$$B(x) = \begin{pmatrix} p|a-x|^{\gamma-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g|a-x|^{\gamma-2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r|a-x|^\gamma} \end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть

- 1) алгебраическое уравнение относительно неизвестного ρ

$$(*) \quad \rho^4 + 2\rho^3(\gamma - 3) + \rho^2(\gamma^2 - 7\gamma + 11 - g/r) + \rho(-g(\gamma - 3)/r - (\gamma - 2)(\gamma - 3)) + p/r = 0$$

имеет четыре простых комплексных корня,

- 2) $\min B(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow a - 0; \max B(x) < C_B = \text{const} \quad \forall x \in [0, a),$
- 3) $\max H(x, \lambda) < C_H = \text{const} \quad \forall (x, \lambda) \in [0, 1] \times (\lambda_H, \nu), \lambda_H = \text{const}.$

Тогда существует последовательность СЗ $\lambda_n \rightarrow \nu - 0$ задачи (3), (2).

ТЕОРЕМА 3. Если $r(x, \lambda), g(x, \lambda), p(x, \lambda)$ – неубывающие по λ функции, и уравнение (*) имеет только вещественные корни, то в некоторой левой полукрестности точки ν нет СЗ задачи (3), (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01292).

2. Гринив Р. О. “О локализации собственных значений оператора Шрёдингера с потенциалом, зависящим от спектрального параметра”

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2(0, \infty)$ рассматривается модельная спектральная задача для оператора Шрёдингера с потенциалом, нелинейно зависящим от спектрального параметра λ :

$$(1) \quad -y'' + \left(p(x) - \lambda + \frac{q(x)}{\lambda - u(x)} \right) y = 0, \quad y(0) = 0.$$

Задачи такого вида возникают, например, в магнитогидродинамике при описании идеально проводящей невязкой сжимаемой горячей плазмы.

Предполагается, что функция $u(x)$ непрерывна, $u_- \leq u(x) \leq u_+ \leq 0$, причем значение u_- (u_+) достигается в единственной точке x_- (x_+); $q(x) \geq 0$ и $q(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$; $p(x) \geq 0$, $p(x + 2\pi) = p(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$. При фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ обозначим через $L(\lambda)$ оператор, определенный равенствами (1). Известно (см. [1]), что существенным спектром $\sigma_{\text{ess}}(L)$ оператор-функции (о.-ф.) $L(\lambda)$ является объединение отрезка $[u_-, u_+]$ и существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(A) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$ оператора Шрёдингера $A = -\frac{d^2}{dx^2} + p(x)$ на $\mathbb{R}^+$ с периодическим потенциалом $p(x)$. В докладе обсуждается вопрос о накоплении собственных значений (СЗ) о.-ф. $L(\lambda)$ к концам $\sigma_{\text{ess}}(L)$. Для задачи (1), рассматриваемой на конечном отрезке, такой вопрос исследован в [2]. Заметим, что в интервале (u_+, a_1) СЗ о.-ф. $L(\lambda)$ нет.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q \in C(x_-)$ и $u \in C^2(x_-)$. Тогда

- (а) если $8q(x_-) > u''(x_-)$, то $\lambda = u_-$ является точкой накопления СЗ о.-ф. $L(\lambda)$;
- (б) если $8q(x_-) < u''(x_-)$, то СЗ о.-ф. $L(\lambda)$ к точке $L = u_-$ не накапливаются.

ТЕОРЕМА 2. Точка $\lambda = a_k$ ($\lambda = b_k$) является точкой накопления СЗ о.-ф. $L(\lambda)$ тогда и только тогда, когда СЗ оператора $L(a_k)$ ($L(b_k)$) накапливаются к точке 0.

СЛЕДСТВИЕ (ср. [3]). (а) Точки $\lambda = a_k$ не являются точками накопления СЗ о.-ф. $L(\lambda)$.
 (б) Пусть существует неубывающая функция $\varphi(x) \geq 0$ такая, что $\int_0^\infty (\varphi|q| + \varphi^{-1}) dx < \infty$. Тогда дискретный спектр о.-ф. $L(\lambda)$ в лакунах (b_k, a_{k+1}) , $k \geq 1$, конечен.
 (в) Если $\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_x \int_x^\infty q(t) dt = \infty$, то точки $\lambda = b_k$ являются точками накопления СЗ о.-ф. $L(\lambda)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01292).

[1] Шкалик А. А. // Матем. заметки. 1996. Т. 58. № 6. С. 945–949.

[2] Mennicken R., Schmid H., Shkalikov A. A. Criterion on the eigenvalue accumulation of nonlinear spectral problems for ordinary differential operators with singularities // Systems and Networks. V. 2. Berlin: Akademie Verlag, 1994. P. 793–798.

[3] Sobolev A. V. // Adv. Soviet Math. 1991. V. 7. P. 159–178.

З. Минкин А. М. (Саратов). “Спектральность по Данфорду и регулярность по Биркгофу”

Пусть L – дифференциальный оператор в $L^2(-1, 1)$, определенный выражением

$$(1) \quad l(y) = D^n y + \sum_{k=0}^{n-2} p_{n-k}(x) D^k y, \quad D = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}, \quad x \in [-1, 1], \quad p_k \in L(-1, 1),$$

и линейно независимыми краевыми условиями

$$(2) \quad \begin{aligned} U_{k_\nu}(y) &= a_{k_\nu} D^{k_\nu} y(-1) + b_{k_\nu} D^{k_\nu} y(1) + \dots = 0, \quad \nu = 0, \dots, n-1, \\ |a_{k_\nu}| + |b_{k_\nu}| &> 0, \quad 0 \leq k_0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_{n-1}, \quad k_\nu < k_{\nu+2}. \end{aligned}$$

Многоточие в (2) заменяет члены с производными меньших порядков в ± 1 . Положим $B_s^- = [a_{k_\nu} \varepsilon_s^{k_\nu}]_{\nu=0}^{n-1}$, $B_s^+ = [b_{k_\nu} \varepsilon_s^{k_\nu}]_{\nu=0}^{n-1}$ и введем определители регулярности Θ_i , $i = -1, 0, 1$, если n четно, $n = 2q$, следующим тождеством:

$$\begin{aligned} \Theta_1 s + \Theta_0 + \Theta_{-1} s^{-1} \\ \equiv \det[B_0^- + s B_0^+; B_s^-, s = 1, \dots, q-1; B_q^- + s^{-1} B_q^+; B_s^+, s = q+1, \dots, n-1], \end{aligned}$$

а в нечетном случае, $n = 2q+1$, введем определители Θ_0, Θ_1 так:

$$\Theta_1 s + \Theta_0 \equiv \det[B_0^- + s B_0^+; B_s^-, s = 1, \dots, q; B_s^+, s = q+1, \dots, n-1].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Краевые условия *регулярны* (по Биркгофу), кратко $L \in (R)$, если

- 1) $\Theta_{\pm 1} \neq 0$, n четно;
- 2) $\Theta_0 \neq 0$, $\Theta_1 \neq 0$, n нечетно.

Регулярные краевые условия *сильно регулярны*, если порядок n нечетен или если он четен и дополнительно $\Theta_0^2 \neq 4\Theta_1\Theta_{-1}$.

Г. М. Кесельман и В. П. Михайлов показали, что сильно регулярные краевые задачи спектральны по Данфорду. Наш основной результат дает частичный обратный к их теореме.

ТЕОРЕМА.

1. Если L спектрален и полон, то $L \in (R)$.
2. Если L – диссипативный оператор, то $L \in (R)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00014).

4. Мирзоев К. А. “ $\mathcal{L}_p$ -свойства решений симметрических обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущенными коэффициентами”

Символом $l_n[f]$ обозначим линейное симметрическое квазидифференциальное выражение

$$(1) \quad (\dots((p_n f^{(n)})' - p_{n-1} f^{(n-1)})' - \dots - p_1 f')' - p_0 f.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, 1/p_n \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1[0, +\infty)$, $p_n(x) \geq 0$ почти всюду при $x \in [0, +\infty)$, и пусть (a_m, b_m) ($m = 1, 2, \dots$) – последовательность непересекающихся интервалов, таких, что $a_m \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow +\infty$. Тогда для любого $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ существует квазидифференциальное выражение $l'_n[f]$ вида (1) с коэффициентами $p'_0, p'_1, \dots, p'_{n-1}, 1/p_n \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1[0, +\infty)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1°. $p'_s(x) = p_s(x)$ при $x \in [0, +\infty)$, если $s \neq k$, и $p'_k(x) = p_k(x)$ при $x \in \bigcup_{m=1}^{+\infty} (a_m, b_m)$ ($s = 0, 1, \dots, n-1$).
- 2°. Уравнение $l'_n[f] = 0$ имеет решение, не принадлежащее пространству $\mathcal{L}_p[0, +\infty)$ ($1 \leq p \leq +\infty$).

Если коэффициенты выражения $l_n[f]$ удовлетворяют каким-либо условиям гладкости, то коэффициенты $l'_n[f]$ также можно взять из этого класса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00333).

5. Мотовилов А. К. (Дубна). “Структура резольвенты на нефизических листах спектрального параметра в задачах квантовомеханического многоканального рассеяния”

6. Рыхлов В. С. (Саратов). “О полноте собственных функций дифференциальных пучков операторов”

Рассмотрим дифференциальный пучок операторов $L(\lambda)$, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y, \lambda) := \sum_{s+k \leq n} \lambda^s p_{sk} y^{(k)}, \quad p_{sk} \in \mathbb{C}, \quad p_{0n} \neq 0, \quad x \in [0, 1],$$

и краевыми условиями

$$U_\nu(y, \lambda) \equiv U_{\nu 0}(y, \lambda) + U_{\nu 1}(y, \lambda) := \sum_{k < n} \sum_{s+k < n} \lambda^s \{ \alpha_{\nu sk} y^{(k)}(0) + \beta_{\nu sk} y^{(k)}(1) \} = 0,$$

$$\nu = \overline{1, n}, \quad \alpha_{\nu sk}, \quad \beta_{\nu sk} \in \mathbb{C}.$$

Пусть $\{y_j(x, \lambda)\}_{j=1}^n$ – фундаментальная система решений уравнения $l(y, \lambda) = 0$; $\{\omega_j\}_{j=1}^n$ – корни характеристического уравнения (считаем, что они попарно различны и отличны от нуля); $\{\chi_k\}$ – множество, состоящее из 0 и всевозможных сумм этих корней, содержащих от 1 до n попарно различных слагаемых; $\Lambda = \{\lambda_s\}$ – множество собственных значений (с.з.) пучка $L(\lambda)$ (считаем, что с.з. простые); $\Delta(\lambda) = \det[U_\nu(y_j, \lambda)]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $g(x, \lambda)$ назовем *порождающей* для собственных функций (с.ф.) пучка $L(\lambda)$, если множество $\{g(x, \lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ совпадает с множеством всех его с.ф.

В качестве порождающих удобно брать функции

$$\gamma(x, \lambda, \Gamma) := \begin{vmatrix} 0 & y_1(x, \lambda) \cdots y_n(x, \lambda) \\ \Gamma(\lambda) & \Delta(\lambda) \end{vmatrix},$$

где n -мерная вектор-функция $\Gamma(\lambda)$ подбирается так, чтобы порождающая функция обладала дополнительными свойствами, в частности, требуемой сопряженной диаграммой.

Возьмем в качестве $y_j(x, \lambda)$ решения из [1, с. 20], аналитические при $|\lambda| \gg 1$ с асимптотикой $y_j^{(s)}(x, \lambda) = (\lambda \omega_j)^s e^{\lambda \omega_j x} (1 + O(1/|\lambda|))$. Обозначим $v_{\nu j}(\lambda) := U_{\nu 0}(y_j, \lambda)$, $w_{\nu j}(\lambda) := e^{-\lambda \omega_j} U_{\nu 1}(y_j, \lambda)$, $V_j := [v_{1j}, \dots, v_{nj}]$, $W_j := [w_{1j}, \dots, w_{nj}]$.

ЛЕММА 1. *Сопряженные диаграммы по λ функций $\gamma(x, \lambda, V_j)$ при $x \in [0, 1]$ содержатся в выпуклой оболочке сопряженной диаграммы $\Delta(\lambda)$ и тех χ_k , которые содержат в качестве слагаемого ω_j .*

ЛЕММА 2. *Сопряженные диаграммы по λ функций $\gamma(x, \lambda, W_j)$ при $x \in [0, 1]$ содержатся в выпуклой оболочке сопряженной диаграммы $\Delta(\lambda)$ и тех χ_k , которые не содержат в качестве слагаемого ω_j .*

Использование этих лемм значительно расширяет класс пучков $L(\lambda)$, для которых может быть доказана m -кратная полнота с.ф. ($0 < m \leq n$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00014).

[1] Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов-на-Дону, 1994.

7. Степин С. А. “Сингулярные возмущения операторных пучков с непрерывным спектром и свойства колебательных режимов в магнитной гидродинамике”

При изучении колебательных движений слоя плазмы $\{a \leq z \leq b\}$, находящейся во внешнем магнитном поле, возникает краевая задача

$$\begin{aligned} (1) \quad & \varepsilon \lambda (y'' - \alpha^2 y) + (q(z) + \lambda^2) y = 0, \\ (2) \quad & y'(a) = y'(b) = 0. \end{aligned}$$

Здесь λ – спектральный параметр, $\alpha > 0$ – волновое число, функция q задает стратификацию плотности плазмы вдоль оси z ; $\varepsilon \downarrow 0$ соответствует переходу от резистивной магнитной гидродинамики к идеальной.

Замена $\varphi = \Delta_\alpha^{1/2} y$, Δ_α – дифференциальный оператор $d^2/dz^2 - \alpha^2$, порожденный условиями (2), сводит задачу (1), (2) к спектральному анализу квадратичного операторного пучка $L(\lambda) = \varepsilon \lambda I + \lambda^2 A + B$ в $\mathfrak{H} = \mathcal{L}_2(a, b)$ с самосопряженными $A, B \in \mathfrak{S}_\infty$. Известно, что система корневых векторов L образует два базиса Рисса $E^\pm$ в $\mathfrak{H}$; мерой неортогональности базиса Рисса служит величина $\Upsilon = \|W\| \cdot \|W^{-1}\|$, где W – ортогонализатор базиса.

С использованием квазиклассических асимптотик для решений уравнения (1) обнаруживается эффект нарушения полунепрерывности (снизу) спектра у задачи (1), (2) при $\varepsilon \downarrow 0$. В результате сопоставления этого факта с оценкой резольвенты операторного корня (пучка L), отвечающего подсистеме E^+ (E^-), устанавливается

ТЕОРЕМА. Пусть $q(z)$ аналитична в окрестности $[a, b]$, $b > a > 0$, и достаточно близка к функции kz , $k > 0$, в равномерной метрике. Тогда для каждого из двух базисов Рисса $\Delta_\alpha^{-1/2} E^\pm$ в $W_2^1[a, b]$, образованных корневыми функциями задачи (1), (2), величины $\Upsilon^\pm(\varepsilon)$ неограничены при $\varepsilon \downarrow 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00333).

8. Темирбулатов Н. С. “Спектральная задача для уравнения переноса”

Рассмотрим уравнение переноса для плоскопараллельной области со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sigma \phi = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \phi(t, x, \mu') d\mu', \\ (2) \quad & \begin{cases} \phi(t, 0, \mu) = 0 & \text{при } \mu > 0, \\ \phi(t, 1, \mu) = 0 & \text{при } \mu < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

где $x \in [0, 1]$, $t \in [0, \infty)$, $\mu \in [-1, 1]$.

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \sigma_0 \phi_0 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ (2n+1) \frac{\partial \phi_n}{\partial t} + n \frac{\partial \phi_{n-1}}{\partial x} + (n+1) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial x} + (2n+1) \sigma_n \phi_n = 0; \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_{mi} \phi_i(0) &= 0, & a_{mi} &= (2i+1) \int_0^1 p_i(\mu) p_{2m+1}(\mu) d\mu, \\ \sum_{i=0}^n b_{mi} \phi_i(1) &= 0, & b_{mi} &= (2i+1) \int_{-1}^0 p_i(\mu) p_{2m+1}(\mu) d\mu, \end{aligned} \quad m = 0, 1, \dots, k-1.$$

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} A & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} B & & \\ & E & \\ & & E \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} D \frac{d^2}{dx^2} & & \\ & D \frac{d}{dx} & \\ & & -D \frac{d}{dx} \end{bmatrix},$$

ТЕОРЕМА 1. Спектр задачи дискретен и состоит из k серий счетного числа собственных значений (СЗ) в полосе $-e_k/2 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq c/2$, где e_k – наибольшее СЗ матрицы E и $e_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, а также конечного числа вещественных СЗ положительного типа на отрезке $[c/2, c]$.

[1] Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. М.: Госатомиздат, 1961.

Рассмотрим дифференциальное уравнение Штурма–Лиувилля

$$(1) \quad -y'' + q(x)y = \lambda y = \rho^2 y, \quad \text{Im } \rho > 0.$$

Пусть функции $C(x, \lambda)$, $S(x, \lambda)$ являются решениями уравнения (1) при начальных условиях $C(0, \lambda) = S'(0, \lambda) = 1$, $C'(0, \lambda) = S(0, \lambda) = 0$. Обозначим $\Phi(x, \lambda) = C(x, \lambda) + \mathfrak{M}(\lambda)S(x, \lambda)$ решение Вейля, где $\mathfrak{M}(\lambda)$ – функция Вейля для (1). Если функция $q(x)$ является аналитической в точке $x = 0$ ($q(x) \in A$), то при $|\rho| \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\mathfrak{M}(\lambda) = (i\rho) \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{M}_k}{(i\rho)^k}\right), \quad \mathfrak{M}_1 = 0.$$

Последовательность $\{\mathfrak{M}_k\}_{k \geq 1}$ будем называть последовательностью Вейля. Последовательность Вейля однозначно определяется поведением функции $q(x)$ в окрестности точки $x = 0$, т.е. значениями $q^{(k)}(0)$, $k \geq 0$. Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия на рост последовательности Вейля.

ТЕОРЕМА. 1) Если $q(x) \in A$ (аналитична в точке $x = 0$), то существует $\delta > 0$ такое, что

$$(2) \quad \mathfrak{M}_k = O\left(\left(\frac{k}{\delta}\right)^k\right).$$

2) Для любых наперед заданных чисел $\{\mathfrak{M}_k\}_{k \geq 1}$, $\mathfrak{M}_1 = 0$, удовлетворяющих (2) при некотором $\delta > 0$, существует единственная функция $q(x) \in A$, для которой $\{\mathfrak{M}_k\}_{k \geq 1}$ является последовательностью Вейля.

Работа выполнена при поддержке ГК РФ (грант № 96-17-4).

Утреннее заседание 26 апреля 1996 г., секция 2.

1. Шаповал А. Б. “Интегральные многообразия для неавтономных нелинейных параболических уравнений”

В гильбертовом пространстве H с нормой $\|\cdot\|$ рассмотрим эволюционное уравнение

$$(1) \quad d_t u + Au + f(u, t) = 0.$$

Здесь $A = A^* > 0$ — неограниченный линейный оператор с областью определения $D(A)$, плотной в H . Его собственные числа $\{\lambda_j\}$ удовлетворяют следующему условию: для некоторых чисел β , $0 \leq \beta < 1$, и $C > 0$ существует такое N , что

$$\frac{\lambda_{N+1} - \lambda_N}{\lambda_{N+1}^\beta + \lambda_N^\beta} \geq C.$$

Отображение $f(\cdot, t) : D(A) \rightarrow D(A^{1-\beta})$ дифференцируемо по Фреше, причем для любых $u, v \in D(A)$ и $t \in \mathbb{R}$ верны неравенства

$$\begin{aligned} \|f'_u(u, t)v\| &\leq M_0(\|Au\|)\|A^\beta v\|, \\ \|A^{1-\beta}f'_u(u, t)v\| &\leq M_1(\|Au\|)\|Av\|, \quad \|A^{1-\beta}(f(v, t_1) - f(v, t_2))\| \leq M_2(\|v\|)|t_1 - t_2|, \end{aligned}$$

где $M_i(\cdot)$, $i = 0, 1, 2$, — монотонно возрастающие функции.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены перечисленные выше условия. Предположим, что уравнение (1) с начальным условием $u|_{t=\tau} = u_\tau$ имеет единственное решение при любом $u_\tau \in D(A)$. Предположим также, что уравнение (1) обладает равномерным по τ ограниченным в $D(A)$ поглощающим множеством. Тогда существует интегральное многообразие этого уравнения, для которого выполнено свойство асимптотической полноты.

Из теоремы 1 следует, что уравнение $u_t - u_{xx} + f(u, x, t) = 0$ при определенных условиях на f обладает интегральным многообразием.

2. Чепыжов В. В. “Траекторный аттрактор неавтономной системы реакции-диффузии без единственности решения задачи Коши”

Изучается система m уравнений реакции-диффузии в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$:

$$(1) \quad \partial_t u = a \Delta u - f(u, t) + g(x, t), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0.$$

Здесь $u = u(x, t) = (u^1, \dots, u^m)$, $f = (f^1, \dots, f^m)$, $g = (g^1, \dots, g^m)$. Вещественная матрица $a + a^* > 0$. Предполагается, что $f \in C(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^m)$ и

$$\gamma|v|^p - C_1 \leq (f(v, s), v), \quad |f(v, s)| \leq C_2(|v|^{p-1} + 1) \quad \forall v \in \mathbb{R}^m, \quad s \geq 0, \quad p \geq 2.$$

Обозначим $H = (L_2(\Omega))^m$, $V = (H_0^1(\Omega))^m$, $V' = (V)^*$. Предполагается, что

$$\sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} \|g(\cdot, s)\|_{V'}^2 ds < \infty.$$

Задача Коши для (1) в пространстве $\mathcal{F}_+^{\text{loc}} = L_\infty(\mathbb{R}_+; H) \cap L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V) \cap L_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; L_p(\Omega)^m)$ имеет слабое решение $u(x, s)$ ($s = t$), которое может быть неединственным. Рассматривается семейство уравнений вида (1), в которых $(f(v, s), g(x, s)) \equiv \sigma(s) \in \mathcal{H}_+(f_0(v, s), g_0(x, s)) \equiv \Sigma$, где $\mathcal{H}_+(\cdot, \cdot)$ – оболочка заданной пары функций $(f_0(v, s), g_0(x, s)) \equiv \sigma_0(s)$ в пространстве $C(\mathbb{R}_+; \mathcal{M}) \times L_{2,w}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V') \equiv \Xi_+$, где $\mathcal{M} = C(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$. Предполагается, что Σ компактно в Ξ_+ . Пусть $\mathcal{K}_\sigma^+$ – совокупность слабых решений $u(s)$, $s \geq 0$, уравнения (1) с $\sigma(s) \in \Sigma$. Доказано, что норма $\|u\|_{\mathcal{F}_+^a}$ конечна для любого $u \in \mathcal{K}_\sigma^+$. Здесь

$$\|u\|_{\mathcal{F}_+^a} = \sup_{t \geq 0} \{ \|u(t+s)\|_{L_\infty(0,1;H)} + \|u(t+s)\|_{L_2(0,1;V)} + \|u(t+s)\|_{L_p(0,1;L_p)} \}.$$

В пространстве $\mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ вводится топология сходимости: по определению, $u_n \rightarrow u$ ($n \rightarrow \infty$) $\Leftrightarrow u_n \rightarrow u$ *-слабо в $L_\infty(t_1, t_2; H)$, слабо в $L_2(t_1, t_2; V)$ и слабо в $L_p(t_1, t_2; L_p)$ при $n \rightarrow \infty \quad \forall [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}_+$. На $\mathcal{K}^+ = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \mathcal{K}_\sigma^+$ действует полугруппа сдвигов $\{T(t), t \geq 0\}$, $T(t): \mathcal{K}^+ \rightarrow \mathcal{K}^+$, $T(t)u(s) = u(t+s)$, $t \geq 0$.

ТЕОРЕМА. Полугруппа сдвигов $\{T(t), t \geq 0\}$ на $\mathcal{K}^+$ обладает глобальным аттрактором $\mathcal{A}_\Sigma$, компактным в $\mathcal{F}_+^{\text{loc}}$, ограниченным в $\mathcal{F}_+^a$ и притягивающим любые ограниченные в $\mathcal{F}_+^a$ множества из $\mathcal{K}^+$ в топологии $\mathcal{F}_+^{\text{loc}}$. При этом $\mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{A}_{\omega(\Sigma)}$, где $\mathcal{A}_{\omega(\Sigma)}$ – глобальный аттрактор полугруппы сдвигов на множестве $\bigcup_{\sigma \in \omega(\Sigma)} \mathcal{K}_\sigma^+$. Здесь $\omega(\Sigma)$ – ω -предельное множество от Σ .

$\mathcal{A}_\Sigma$ называется траекторным аттрактором уравнения (1).

Изложенные в докладе результаты получены совместно с М. И. Вишиком.

3. Вишик М. И. “Траекторные аттракторы эволюционных уравнений математической физики”

Изучается неавтономное гиперболическое уравнение

$$(1) \quad \partial_t^2 u + \gamma \partial_t u = \Delta u - f(u, t) + g(x, t), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \gamma > 0,$$

$t \geq 0$, $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Функция $f(v, s)$ имеет любой порядок роста $p - 1$ по v при $|v| \rightarrow \infty$ и удовлетворяет условию: $f(v, s)v \geq \gamma_1 F(v, s) + \alpha^{-1} F(v, s) - C_1 \quad \forall v \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}_+$; $\gamma_1 > 0$, $0 < \alpha(\gamma - \alpha) < \lambda_1$, $F(v, s)$ — первообразная $f(v, s)$ по v . В этом случае задача Коши для (1) в энергетическом пространстве имеет решение $u(x, s)$ ($s = t$), которое может быть неединственным [1]. Рассматривается семейство уравнений вида (1), в которых $(f(v, s), g(x, s)) \equiv \sigma(s) \in \mathcal{H}_+(f_0(v, s), g_0(x, s)) \equiv \Sigma$, где $\mathcal{H}_+(\cdot)$ — оболочка заданной пары функций $(f_0(v, s), g_0(x, s)) \equiv \sigma_0(s)$ в пространстве $C(\mathbb{R}_+; \mathcal{M}) \times L_{2,w}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; L_2(\Omega)) \equiv \Xi_+$. Здесь $\mathcal{M}$ — соответствующее пространство функций $\psi(v)$ (см. [2]). Предполагается, что Σ компактно в Ξ_+ . Пусть $\mathcal{K}^+(m)$, $m > 0$, — совокупность слабых решений $u(s)$, $s \geq 0$, уравнения (1) с $\sigma(s) \in \Sigma$, удовлетворяющих неравенству: $z(t) \leq R_\alpha + m \exp(-\delta_\alpha t)$, $t \geq 0$, $R_\alpha > 0$, $\delta_\alpha > 0$, где $z(t) = |\partial_t u + \alpha u|^2 + \|u\|^2 + 2 \int_\Omega F(u(x, t), t) dx$. На $\mathcal{K}^+(m)$ действует полугруппа сдвигов $\{T(t), t \geq 0\}$, $T(t): \mathcal{K}^+(m) \rightarrow \mathcal{K}^+(m)$, $T(t)u(s) = u(t+s)$, $t \geq 0$. Вводится пространство $\mathcal{F}_{+,w}^{\text{loc}} \equiv \{v(s) \mid s \geq 0\}$ со следующей топологией сходимости: $v_n \rightarrow v (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow v_n \rightharpoonup v$ *-слабо в $L_\infty(t_1, t_2; H_0^1(\Omega) \cap L_p(\Omega))$, $\partial_t v_n \rightarrow \partial_t v$ *-слабо в $L_\infty(t_1, t_2; L_2(\Omega))$ при $n \rightarrow \infty \quad \forall [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}_+$.

ТЕОРЕМА. Полугруппа сдвигов $\{T(t), t \geq 0\}$ на $\mathcal{K}^+(m)$ обладает глобальным аттрактором $\mathcal{A}_\Sigma$, компактным в $\mathcal{F}_{+,w}^{\text{loc}}$ и притягивающим любые множества из $\mathcal{K}^+(m)$ в топологии $\mathcal{F}_{+,w}^{\text{loc}}$. $\mathcal{A}_\Sigma$ не зависит от m .

$\mathcal{A}_\Sigma$ называется траекторным аттрактором уравнения (1). Доказан ряд теорем о структуре $\mathcal{A}_\Sigma$ и об аттракторах возмущенных уравнений (1). Например, аттрактор $\mathcal{A}_\Sigma$ не изменяется, если к $g(x, t)$ добавить функцию вида $g_1(x) \sin t^2$, $g_1(x) \in L_2(\Omega)$.

Аналогичные результаты получены для 3D системы Навье–Стокса и для системы уравнений реакции-диффузии, у которой функция взаимодействия $f(u, t)$ не удовлетворяет условию Липшица по u .

Изложенные в докладе результаты получены совместно с В. В. Чепыжовым.

[1] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

[2] Chepyzhov V. V., Vishik M. I. // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1995. V. 321. P. 1309–1314.

4. Горицкий А. Ю. “Интегральные многообразия неавтономной системы реакции-диффузии”

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ рассматривается система

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - f(u, t) + g(x, t), \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$(2) \quad u|_{t=\tau} = u_\tau(x) \in (L_2(\Omega))^M = H.$$

Здесь $u = \vec{u}(t, x) \in \mathbb{R}^M$. Вектор-функции $f(v, t)$ и $g(x, t)$ удовлетворяют условиям

$$(3) \quad \gamma_1 |v|^p - C_1 < (f(v, t), v) < \gamma_2 |v|^p + C_2, \quad \gamma_1, \gamma_2 > 0, \quad p > 2,$$

$$(4) \quad (f'_v(v, t)\xi, \xi) \geq -C_3 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^M,$$

$$(5) \quad |f(v, t)| \leq C_4 (1 + |v|^{p-1}),$$

$$(6) \quad \|f'_v(v, t)\| \leq C_5 (1 + |v|^{p-2}),$$

$$(7) \quad g(x, t) \in L_q^{\text{loc}}(\mathbb{R}, (L_q(\Omega))^M),$$

где $q > 1 + n/2$ при $n \geq 2$ и $q = 2$ при $n = 1$.

При наложенных условиях задача (1)–(2) имеет единственное решение

$$u \in L_2((\tau, \tau + T), (H_0^1(\Omega))^M) \cap (L_p(\Omega \times (\tau, \tau + T)))^M$$

для всех $T > 0$.

ТЕОРЕМА 1. При выполнении условий (3)–(7) задача (1), (2) обладает ограниченным в $(L_\infty(\Omega))^M$, равномерным по τ поглощающим множеством $B_0 = \{u \in H \mid \|u\|_{(L_\infty(\Omega))^M} \leq R_0\}$.

Обозначим $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$ собственные значения оператора $-\Delta$ в области Ω с условиями Дирихле на границе.

ТЕОРЕМА 2. Если $\lambda_{N+1} - \lambda_N > 2 \sup_{|v| \leq R_0, t \in \mathbb{R}} \|f'_v(v, t)\|$, то существует $(N+1)$ -мерное экспоненциально притягивающее интегральное многообразие M . Для каждого решения $u(t)$, $t \geq \tau$, задачи (1)–(2) существует интегральная кривая $(\tilde{u}(t), t) \in M$, для которой выполнено

$$|u(t) - \tilde{u}(t)|_H \leq C(|u_\tau|) \cdot e^{-\lambda(t-\tau)} \quad \forall t \geq \tau,$$

где $\lambda > (\lambda_{N+1} + \lambda_N)/2$.

Изложенные в докладе результаты получены совместно с В. В. Чепыжовым.

5. Кондратьев В. А., Олейник О. А. “Об асимптотике при больших значениях времени решений эволюционных уравнений и систем”

Одной из задач, рассмотренных в докладе, является следующая. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}_x^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $Q = \{x, t : x \in \Omega, 0 < t < \infty\}$, $\sigma = \{x, t : x \in \partial\Omega, 0 < t < \infty\}$.

В области Q рассмотрим параболическую систему вида

$$(1) \quad \frac{\partial u_k}{\partial t} - L_k(u_k) + f_k(u, t) = 0, \quad k = 1, \dots, N,$$

где

$$L_k(u_k) \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}^k(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n a_i^k(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_i},$$

$u = (u_1, \dots, u_N)$. Предположим, что

$$\lambda_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda_2 |\xi|^2,$$

$\lambda_1, \lambda_2 = \text{const} > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi|^2 = \sum_{j=1}^n \xi_j^2$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, a_{ij}, a_i – ограниченные измеримые функции в Ω . Вектор-функция $f = (f_1, \dots, f_N)$ определена при $|u|^2 \leq a$, $a = \text{const} > 0$, и при $0 \leq t < \infty$, $f(0, t) \equiv 0$, $f(u, t)$ непрерывна по u и t при $|u|^2 \leq a$ и $0 \leq t < \infty$, существуют производные $\partial f_k / \partial u_j$ при $|u|^2 < a$ и $\partial f_k / \partial u_j \rightarrow 0$ при $u \rightarrow 0$ равномерно по $t, k, j = 1, \dots, N$. Пусть на границе σ области Q выполнены граничные условия Неймана

$$(2) \quad \frac{\partial u_k}{\partial \nu_k} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(x) \nu_i \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = 0, \quad k = 1, \dots, N,$$

где $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

ТЕОРЕМА. Если $u(x, t)$ – решение системы (1) с граничным условием (2), $u(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то

$$(3) \quad u(x, t) = W(t) + v(x, t),$$

где $W(t)$ – некоторое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(4) \quad \frac{dW}{dt} + f(W, t) = 0,$$

а вектор-функция $v(x, t)$ удовлетворяет условию

$$\int_{Q_\tau} |v|^2 dx dt \leq C_1 e^{-\alpha_1 \tau}, \quad C_1, \alpha_1 = \text{const} > 0, \quad Q_\tau = Q \cap \{x, t : t > \tau\}.$$

Для доказательства (3) мы рассматриваем вектор-функцию $V = (V_1, \dots, V_N)$, где

$$V_k(t) = \int_{\Omega(t)} w_k(x) u_k(x) dx, \quad \Omega(\tau) = Q \cap \{x, t : t = \tau\},$$

w_k является положительным решением задачи

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}^k(x) \frac{\partial w_k}{\partial x_j} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i^k(x) w_k) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \int_{\Omega} w_k(x) dx = 1,$$

$$\frac{\partial w_k}{\partial \nu_k} - \sum_{i=1}^n a_i^k(x) \nu_i w_k = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad k = 1, \dots, N.$$

Доказывается, что

$$(5) \quad \|u - V\|_{L_2(Q_\tau)} \leq C_2 e^{-\alpha_2 \tau}, \quad |V(t) - W(t)| \leq C_3 e^{-\alpha_3 t},$$

где $C_i, \alpha_i = \text{const} > 0$, $W(t)$ – некоторое решение системы (4). Из (5) следует соотношение (3).

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 96-01-00504, № 95-01-00165).

6. Насруллаев А. И. “Об одном классе нелинейных уравнений в неограниченных областях”

Рассматривается уравнение

$$(1) \quad \Delta u - e^u = 0$$

в плоской угловой области $K_a(1, \infty) = \{(x_1, x_2) : |x_1| < ax_2, |x| > 1\}$, где $a = \text{const} > 0$. Предполагается, что решения уравнения (1) удовлетворяют либо граничному условию Дирихле:

$$(2) \quad u = 0 \quad \text{при } |x_1| = ax_2, \quad |x| > 1,$$

либо граничному условию Неймана:

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_1} = 0 \quad \text{при } x_1 = ax_2, \quad |x| > 1, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_2} = 0 \quad \text{при } x_1 = -ax_2, \quad |x| > 1,$$

где ν_1 и ν_2 – единичные векторы внешней нормали на соответствующих сторонах угла $K_a(1, \infty)$.

ТЕОРЕМА 1 (задача Неймана). Пусть $u(x) \in C^1(\overline{K_a(1, \infty)}) \cap C^2(K_a(1, \infty))$ является решением задачи (1), (3). Тогда либо

$$u(x) = -2 \ln |x| - 2 \ln \ln |x| + \ln 2 + o(1) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty,$$

либо

$$u(x) = -C_1 \ln |x| + O(1) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \quad C_1 = \text{const} > 2.$$

ТЕОРЕМА 2 (задача Дирихле). Пусть $u(x) \in C(\overline{K_a(1, \infty)}) \cap C^2(K_a(1, \infty))$ является решением задачи (1), (2). Тогда

- 1) $u(x) < 0$ в $K_a(T, \infty)$, где $T = \text{const} > 1$ и не зависит от $u(x)$,
- 2) $u(x)$ не ограничена при $|x| \rightarrow \infty$,
- 3) если $a < 1$, то

$$u(x) = C_2 p(x) |x|^q + h(x) |x|^2 + O(|x|^{-q}) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty,$$

где $q = \pi(2 \arctg a)^{-1}$, $C_2 = \text{const} \geq 0$, $p(x)$ и $h(x)$ – ограниченные и отрицательные в $K_a(1, \infty)$ функции.

7. Улицевич Т. “Об асимптотических свойствах решений нелинейных эллиптических уравнений со смешанными условиями на границе области”

Рассмотрим уравнение

$$(1) \quad \Delta u(x) - |u|^{p-1} u = 0$$

в полуцилиндре $S(0, \infty)$, где $p > 1$, $S(a, b) = \{x : x \in \mathbb{R}^n, x' \in \omega, a < x_n < b\}$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $n \geq 2$, ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$ с гладкой границей, $\sigma(a, b) = \partial\omega \times (a, b)$. Обозначим

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \partial\omega \times (x_n^{2k-1}, x_n^{2k}), \quad 0 \leq x_n^1 \leq x_n^2 \leq \dots \leq x_n^k \leq \dots, \\ \rho_k &= x_n^{2k+1} - x_n^{2k}, \quad \rho_k \leq \infty, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Будем предполагать, что решения уравнения (1) удовлетворяют граничным условиям

$$(2) \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_k,$$

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \sigma(0, \infty) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_k,$$

где ν – внешняя нормаль.

ЛЕММА. Пусть $u(x)$ – решение уравнения (1) в $S(0, \infty)$, удовлетворяющее граничным условиям (2) и (3). Тогда

$$|u(x)| \leq C |x_n|^{2/(1-p)},$$

где $p > 1$, $C = \text{const} > 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u(x)$ – решение уравнения (1) в $S(0, \infty)$ с граничными условиями (2) и (3), где $\sigma_k \geq \sigma_0$, $\rho_k \leq M$, $M = \text{const} > 0$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда

$$|u(x)| \leq C \exp(-\alpha x_n),$$

где $\alpha = \text{const} > 0$, $C = \text{const} > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что решение уравнения (1) в $S(0, \infty)$ меняет знак в $S(0, \infty)$, если функция $u(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения в $S(k, \infty)$ при любом $k = \text{const} > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u(x)$ – решение уравнения (1) в $S(0, \infty)$, удовлетворяющее граничным условиям (2) и (3), $n = 2$, $u(x)$ меняет знак в $S(0, \infty)$. Тогда существуют константы $C = \text{const} > 0$, $\beta = \text{const} > 0$ такие, что

$$|u(x)| \leq C \exp(-\beta x_n).$$

Аналогичные теоремы имеют место в случае, когда в уравнении (1) оператор Лапласа заменен самосопряженным эллиптическим оператором второго порядка.

8. Чуешов И. Д. (Украина, Харьков) “О функционалах, однозначно определяющих асимптотическое поведение решений системы Кармана”

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ рассматривается уравнение

$$(1) \quad \partial_t^2 u + \gamma \partial_t u + (L + M)u + [u, L^{-1}[u, u]] = 0, \quad t > 0,$$

где $\gamma > 0$ достаточно велико, L – бигармонический оператор с условиями Дирихле на $\partial\Omega$, M – линейный дифференциальный оператор не выше второго порядка с гладкими коэффициентами, $[u, v] = \partial_x^2 u \cdot \partial_y^2 v + \partial_y^2 u \cdot \partial_x^2 v - 2 \cdot \partial_{xy}^2 u \cdot \partial_{xy}^2 v$. Как известно, задача Коши для уравнения (1) однозначно разрешима в классе функций

$$\mathcal{W} = C(\mathbb{R}_+; H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_+; H_0^2(\Omega)),$$

где $H^s(\Omega)$ – пространство Соболева порядка s с нормой $\|\cdot\|_s$.

Множество $\mathcal{L} = \{l_j : j = 1, \dots, N\}$ линейных функционалов из $H^{-2}(\Omega)$ называется множеством определяющих элементов задачи (1), если для любой пары ее решений $u(t), v(t) \in \mathcal{W}$ из условия $l_j(u(t) - v(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для $j = 1, \dots, N$ следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{\|\partial_t(u(t) - v(t))\|_2^2 + \|u(t) - v(t)\|_4^2\} = 0.$$

ТЕОРЕМА. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что $\mathcal{L}$ является множеством определяющих элементов задачи (1) при условии, что $\varepsilon_{\mathcal{L}} < \varepsilon_0$, где

$$\varepsilon_{\mathcal{L}} = \sup\{\|w\|_1 : w \in H_0^2(\Omega), l_j(w) = 0, l_j \in \mathcal{L}, \|w\|_2 \leq 1\}.$$

Из этой теоремы вытекает, что задача (1) обладает конечными наборами определяющих мод, узлов и объемных средних. Понятие определяющих мод впервые было введено Фояшем–Проди (1967) и Ладыженской (1972) для двумерной системы Навье–Стокса.

9. Зелик С. В. “Траекторный аттрактор квазилинейной эллиптической системы в цилиндрической области”

В полуцилиндре $(t, x) \in \Omega_+ = \mathbb{R}_+ \times \omega$, где ω – ограниченная область с гладкой границей, рассматривается эллиптическая система

$$(1) \quad \begin{cases} a(\partial_t^2 u + \Delta u) + \gamma \partial_t u - f(u) = g(t), \\ u = (u_1, \dots, u_k); \quad u|_{t=0} = u_0; \quad u|_{\partial\omega} = 0, \end{cases}$$

где Δ – оператор Лапласа по переменной x ; $a, \gamma \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ – постоянные матрицы, причем $a = a^* > 0$. Предполагается, что выполнены следующие условия:

- 1) $f \in C(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$;
- 2) $f(u) \cdot u \geq -C + C|u|^{2+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$, $u \cdot v$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$;
- 3) $g \in [L_p(\Omega_t)]^k \quad \forall t \geq 0$, где $p > n + 1$, $\Omega_t = [t, t + 1] \times \omega$;
- 4) $|g|_a = \sup_{t \geq 0} \|g, \Omega_t\|_{L_p} < \infty$;
- 5) $u_0 \in [H_{2-1/p, p}(\omega) \cap H_{1, p}^0(\omega)]^k = V$. (Здесь $H_{l, p}$ – пространство Соболева функций, производные которых до порядка l принадлежат L_p .)

Под решением задачи (1) понимается функция u из $[H_{2, p}(\Omega_t)]^k \quad \forall t \geq 0$, имеющая конечную норму $\|u\|_a = \sup_{t \geq 0} \|u, \Omega_t\|_{2, p} < \infty$, и удовлетворяющая (1) в смысле равенства в L_p .

ТЕОРЕМА. 1. Для любого $u_0 \in V$ задача (1) имеет хотя бы одно решение.

2. Для любого решения u задачи (1) справедлива оценка

$$\|u, \Omega_t\|_{2, p} \leq C_1(\|u_0\|_V) e^{-\alpha t} + C_2(|g|_a),$$

$\alpha > 0$ и C_2 не зависят от u_0 .

3. Задача (1) обладает в пространстве $\Theta^+ = [H_{2,p}^{\text{loc},w}(\Omega_+)]^k$ равномерным траекторным аттрактором $\mathcal{A}$ (см. [1]).

Траекторный аттрактор $\mathcal{A}$ является глобальным аттрактором полугруппы сдвигов $\{T(h)\}_{h \geq 0}$, действующей на решениях u задачи (1): $T(h)u(t) = u(t+h)$.

Изложенные в докладе результаты получены совместно с М.И. Вишиком.

[1] Cheryzhov V. V., Vishik M. I. // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 1995. V. 321. P. 1309–1314.

10. Гришина Г. В. “Об оценках максимума решений полулинейных сингулярных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях”

Во внешности компакта $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($0 \in \Omega$) изучаются решения $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ равномерно эллиптического уравнения

$$(1) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i} = f(x, u),$$

где коэффициенты и правая часть являются локально ограниченными и измеримыми функциями, причем $f(x, 0) = 0$ и

$$f(x, u) \operatorname{sign} u \geq a|x|^{-s}|u|^\sigma, \quad \sigma < 0, \quad s \in \mathbb{R}, \quad a = \text{const} > 0.$$

ТЕОРЕМА. Не существует знакоопределенных решений уравнения (1) таких, что при $|x| \rightarrow \infty$ $u = o(|x|^{\frac{2-s}{1-\sigma}})$, если $a_i(x) = O(1/|x|)$, $s \neq 2$, и $u = o(\ln^{\frac{1}{1-\sigma}} |x|)$, если $a_i(x) = o(1/|x|)$, $s = 2$.

СЛЕДСТВИЕ. Для каждого знакоопределенного решения уравнения (1) найдется такая постоянная $C > 0$, что при достаточно больших $|x|$ имеет место оценка $\max |u(x)| \geq C|x|^{\frac{2-s}{1-\sigma}}$, если $a_i(x) = O(1/|x|)$, $s \neq 2$, и $\max |u(x)| \geq C \ln^{\frac{1}{1-\sigma}} |x|$, если $a_i(x) = o(1/|x|)$, $s = 2$.

Аналогичные теоремы доказаны для уравнений типа (1) в полуцилиндре, конусе и слое, и для параболического уравнения в полуцилиндре, если на некомпактной части границы заданы однородные условия Неймана.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00504).

Вечернее заседание 26 апреля 1996 г., секция 1.

1. Жиков В. В. (Владимир), Козлов С. М. (Франция, Марсель) “Многомасштабные усреднения”

Рассматривается последовательность дифференциальных операторов $\operatorname{div}(A_N \nabla u)$ с коэффициентом A_N , имеющим структуру

$$A_N(x) = a_N\left(\frac{x}{\xi_1}\right) a_N\left(\frac{x}{\xi_2}\right) \dots a_N\left(\frac{x}{\xi_N}\right),$$

где функция $a_N(y)$, $0 \leq a_N(y) \leq \infty$, считается периодической с периодом 1 по каждому аргументу $y_1, y_2, \dots, y_d$, так что $A_N(x)$ есть квазипериодическая функция. Нас интересует предел усредненной матрицы $(A_N E)_{\text{hom}}$ при $N \rightarrow \infty$. Предполагаем, что

i) положительные множители $\xi_1, \dots, \xi_N$ рационально независимы и

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\xi_{k+1}}{\xi_k} \right)^2 < \infty;$$

ii) для любой постоянной симметрической матрицы $C > 0$

$$(A_N C)_{\text{hom}} = C + \frac{M(C)}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right);$$

причем эта асимптотика равномерна по матрицам C , $\nu E \leq C \leq \nu^{-1} E \exists \nu > 0$;
iii) задача Коши (в пространстве симметрических матриц)

$$\frac{dC(t)}{dt} = M(C), \quad C(0) = E,$$

имеет единственное решение.

ТЕОРЕМА. $\lim_{N \rightarrow \infty} (A_N E)_{\text{hom}} = C(1)$.

ПРИМЕР 1 (пористая среда). Здесь

$$a_N(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \frac{1}{\sqrt{N}} B, \\ 1, & \text{если } x \in \square \setminus \frac{1}{\sqrt{N}} B, \end{cases}$$

$\square = \{x_i \leq \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots, d\}$ – ячейка периодичности, $B = \{|x| \leq 1\}$ – шар. Тогда

$$M(E) = -\frac{|B|d}{d-1}E, \quad C(1) = E \exp\left(-|B|\frac{d}{d-1}\right).$$

Концентрация пор в среде равна

$$c = 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} \langle a_N \rangle^N = 1 - e^{-|B|},$$

где символ $\langle \cdot \rangle$ означает среднее по ячейке периодичности. Поэтому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (A_N E)_{\text{hom}} = C(1) = (1 - c)^{\frac{d}{d-1}} E \quad (\text{закон Браггемана (Braggemann)}).$$

ПРИМЕР 2. Пусть $a_N(x) = e^{f(x)/\sqrt{N}}$, $f(x)$ – периодическая функция, удовлетворяющая условию кубической симметрии. Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (A_N E)_{\text{hom}} = E \exp\left(\langle f^2 \rangle \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{d}\right)\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle A_N^{\frac{d-2}{d}} \rangle^{\frac{d}{d-2}} E \quad (\text{формула Ландау}).$$

2. Перес М. Э. (Pérez M. E.) (Испания, Сантандер) “О спектральной сходимости в одной жесткой задаче”

Рассматривается жесткая задача, которая описывает колебания тела, состоящего из двух материалов, причем один из них значительно жестче другого. Изучается асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций соответствующей спектральной задачи при стремлении к нулю жесткости ε одного из материалов.

Пусть тело занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) с гладкой границей, разбитую на две части Ω_0 и Ω_1 гиперповерхностью Σ : $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Sigma$, $\partial\Omega_0 = \partial_0\Omega \cup \Sigma$, $\partial\Omega_1 = \partial_1\Omega \cup \Sigma$. Задача на собственные значения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} -\Delta u_0^\varepsilon &= \lambda^\varepsilon u_0^\varepsilon \quad \text{в } \Omega_0, & -\varepsilon \Delta u_1^\varepsilon &= \lambda^\varepsilon u_1^\varepsilon \quad \text{в } \Omega_1; \\ u_0^\varepsilon &= 0 \quad \text{на } \partial_0\Omega, & u_1^\varepsilon &= 0 \quad \text{на } \partial_1\Omega; & u_0^\varepsilon &= u_1^\varepsilon, \\ \frac{\partial u_0^\varepsilon}{\partial \nu} &= \varepsilon \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial \nu} \quad \text{на } \Sigma \quad (\nu - \text{нормаль к } \Sigma). \end{aligned}$$

Соответствующий оператор A^ε имеет дискретный спектр $\{\lambda_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty$. Рассмотрение низких частот $\lambda^\varepsilon = O(\varepsilon)$ приводит к задаче на собственные значения с условиями Дирихле в менее жесткой части Ω_1 . Эти частоты уже исследовались ранее: по-видимому, они создают в Ω_0 колебания, которыми можно пренебречь (см. [1], где описаны связанные с данным вопросом исследования и приведены дальнейшие ссылки).

Содержание доклада касается асимптотического поведения высоких частот $\lambda^\varepsilon = O(1)$ и соответствующих собственных функций: мы усиливаем результаты работы [1] по этой проблеме. Удастся доказать, что спектр оператора A^ε является асимптотически плотным на $[0, +\infty)$: высокие частоты накапливаются на $(0, +\infty)$, а низкие – вблизи точки 0. Дается также информация о структуре собственных функций, соответствующих высоким частотам: асимптотически ненулевую компоненту в $L^2(\Omega_0)$ имеют только те собственные функции, которым отвечают собственные значения, стремящиеся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к собственным значениям краевой задачи, поставленной в Ω_0 . Кроме того, все собственные функции быстро осциллируют в Ω_1 .

[1] Lobo M., Sanchez-Palencia E. Low and high frequency vibration in stiff problems // De Giorgi 60th Birthday. Partial Differential Equations and the Calculus of Variations. V. 2. Basel: Birkhäuser, 1990. P. 729–742.

3. Шапошникова Т. А. “О краевых задачах для эллиптических уравнений высокого порядка в частично перфорированных областях”

Пусть Ω – ограниченная гладкая область в $\mathbb{R}^n$; M_{n-s} – гладкое многообразие в $\overline{\Omega}$ размерности $n-s$ и $s \geq 2$. Пусть точка $P_{n-s}^j \in M_{n-s}$, $j = 1, \dots, N(\varepsilon)$, и $N(\varepsilon) \leq d_0 \varepsilon^{s-n}$, $d_0 = \text{const} > 0$, где ε – малый параметр. Обозначим через T_τ^j шар радиуса τ с центром в точке P_{n-s}^j . Предположим, что $T_{a_{\varepsilon,s}}^j \cap T_{a_{\varepsilon,s}}^i = \emptyset$ при $i \neq j$, $a_{\varepsilon,s} < C_0 \varepsilon$, $C_0 = \text{const} > 0$. Будем предполагать, что точки P_{n-s}^j расположены так, что шары $T_{C_0 \varepsilon}^j$ образуют конечно-кратное покрытие многообразия M_{n-s} , причем его кратность ограничена постоянной, не зависящей от ε .

Пусть $G_\varepsilon^{n-s} = \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} T_{a_{\varepsilon,s}}^j$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \sum_s \overline{G_\varepsilon^{(n-s)}}$.

Изучим поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ в области Ω_ε решения следующей краевой задачи:

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta^m u_\varepsilon = f, & m \geq 2, \\ u_\varepsilon = Du_\varepsilon = \dots = D^{(m-1)} u_\varepsilon = 0 & \text{на } \partial\Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

где $D^j u = \nabla^j u$. Положим $\tilde{u}_\varepsilon = u_\varepsilon$ при $x \in \Omega_\varepsilon$ и $\tilde{u}_\varepsilon = 0$ при $x \in \Omega \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$. Приведем некоторые из доказанных теорем в случае $m = 3$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть u_ε – обобщенное решение задачи (1), $m = 3$, $n > 6$ и область Ω содержит многообразие M_{n-2} . Предположим, что $a_{\varepsilon,2}$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{\varepsilon,2}^{6-n} \varepsilon^{n-2} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{\varepsilon,2}^{4-n} \varepsilon^{n-2} = \infty.$$

Тогда $\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ слабо в $H_3(\Omega)$, где u_0 – решение задачи

$$\begin{cases} \Delta^3 u_0 = f & \text{при } x \in \Omega \setminus M_{n-2}, \\ u_0 = 0 & \text{на } M_{n-2}, \quad u_0 = Du_0 = D^2 u_0 = 0 & \text{на } \partial\Omega \setminus M_{n-2}, \quad u_0 \in H_4(\Omega). \end{cases}$$

Следующая теорема справедлива при некоторых дополнительных предположениях относительно расположения точек $P_{n-s}^j, j = 1, \dots, N(\varepsilon)$, на многообразии M_{n-s} .

ТЕОРЕМА 2. Пусть u_ε – обобщенное решение задачи (1), $m = 3, n > 6$, область Ω содержит многообразие M_{n-2} и $a_{\varepsilon,2}$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{\varepsilon,2}^{6-n} \varepsilon^{n-2} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{\varepsilon,2}^{4-n} \varepsilon^{n-2} = A_0,$$

где $A_0 = \text{const} > 0$. Тогда $\tilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u$ слабо в $H_3(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, u – решение задачи: найти функцию $u \in H_3(\Omega)$, $u = 0$ на M_{n-2} , $u = Du = D^2 u = 0$ на $\partial\Omega \setminus M_{n-2}$, такую, что интегральное тождество

$$\sum_{|\alpha|=3} \int_{\Omega \setminus M_{n-2}} D^\alpha u D^\alpha \psi \, dx + B_0 \int_{M_{n-2}} (\nabla u, \nabla \psi) \, ds = - \int_{\Omega} f \psi \, dx,$$

где $B_0 = B_0(A_0, n) = \text{const} > 0$, справедливо для любой функции $\psi \in H_3(\Omega)$, $\psi = 0$ на M_{n-2} , $\psi = D\psi = D^2\psi = 0$ на $\partial\Omega \setminus M_{n-2}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00165).

4. Пятницкий А. Л., Чечкин Г. А. “О задаче Неймана в областях с быстрым нарастанием осцилляции границы”

Рассматривается задача усреднения в области Ω_ε с локально периодической быстроосциллирующей границей в случае, когда $(n-1)$ -мерный объем границы является большим параметром. Для простоты изложения будем предполагать, что осциллирующая часть границы Γ_1^ε лежит вблизи гиперплоскости $\{x_n = 0\}$ и задается уравнением

$$x_n = \varepsilon F\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon^\alpha}\right),$$

где ε – малый положительный параметр, $\alpha > 1$, $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ и $F(\hat{x}, \hat{\xi})$ – гладкая периодическая по $\hat{\xi}$ функция, а соответствующая часть границы Γ_1 предельной области Ω принадлежит гиперплоскости $\{x_n = 0\}$. При этом на осциллирующей части границы Γ_1^ε задано неоднородное условие Неймана, а на гладкой ее части Γ_2 – условие Дирихле:

$$(1) \quad -\Delta u_\varepsilon = f(x) \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad u_\varepsilon|_{\Gamma_2} = 0, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_\varepsilon} \Big|_{\Gamma_1^\varepsilon} = \varepsilon^\beta g\left(\hat{x}, \frac{\hat{x}}{\varepsilon^\alpha}\right);$$

здесь ν_ε – единичная нормаль к Γ_1^ε , $f(x) \in L_2(\Omega)$, $g(\hat{x}, \hat{\xi})$ – гладкая периодическая по $\hat{\xi}$ функция.

В зависимости от соотношения между β и α асимптотическое поведение обобщенного решения u_ε описывается одним из приводимых ниже утверждений.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\beta > \alpha - 1$. Тогда u_ε сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению следующей задачи:

$$(2) \quad -\Delta u_0 = f(x) \quad \text{в } \Omega, \quad u_0|_{\Gamma_2} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x_n} \Big|_{\Gamma_1} = 0,$$

и выполнена оценка

$$(3) \quad \|u_0 - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq K(\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon^{\beta-\alpha+1}).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\beta = \alpha - 1$. Тогда u_ε сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению следующей задачи:

$$(4) \quad -\Delta u_0 = f(x) \quad \text{в } \Omega, \quad u_0|_{\Gamma_2} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x_n} \Big|_{\Gamma_1} = G(\hat{x}),$$

где

$$(5) \quad G(\hat{x}) = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 |\nabla_{\hat{\xi}} F(\hat{x}, \hat{\xi})| g(\hat{x}, \hat{\xi}) d\hat{\xi},$$

и выполнена оценка

$$(6) \quad \|u_0 - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq M(\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon^{\alpha-1}).$$

Аналогичные результаты справедливы также для общих эллиптических операторов второго порядка с условием Неймана на осциллирующей части границы.

5. Гадлышин Р. Р. (Уфа) "О краевых задачах для оператора Лапласа с быстроосциллирующими граничными условиями"

Основные результаты доклада публикуются в [1].

[1] Gadyl'shin R. R. Asymptotics of the minimum eigenvalue for a circle with fast oscillating boundary conditions // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1996 (to appear).

6. Клепцына М. Л. "Усреднение несамосопряженных операторов со случайными коэффициентами"

Изучается асимптотическое поведение решений следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t} u^\varepsilon = a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{\frac{t}{\varepsilon^\alpha}} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} b_i \left(\frac{x}{\varepsilon}, \xi_{\frac{t}{\varepsilon^\alpha}} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} u^\varepsilon, \quad u^\varepsilon|_{t=0} = u_0(x),$$

при $\varepsilon \downarrow 0$, где $a_{ij}(z, y)$ и $b_i(z, y)$ — гладкие ограниченные по z функции, матрица a_{ij} равномерно эллиптическая, ξ_s — диффузионный процесс в $\mathbb{R}^d$, $\alpha > 0$. Предполагается, что ξ_t имеет инвариантную меру в $\mathbb{R}^d$ и, более того, что плотность инвариантной меры экспоненциально убывает. При $\alpha < 2$ предполагается, что при каждом $y \in \mathbb{R}^d$ среднее от $b(\cdot, y)$ с плотностью инвариантной меры процесса η_s с инфинитезимальным оператором $A = a_{ij}(z, y) \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_j} + b_i(z, y) \frac{\partial}{\partial z_i}$ равно 0.

При $\alpha = 2$ среднее от $b(z, y)$, связанное с совместным распределением ξ_s и процесса η_s , равно 0.

Поведение u^ε существенно зависит от значения параметра α . При $0 < \alpha \leq 1$ и $\alpha \geq 3$ имеет место классический принцип усреднения: решения u^ε по вероятности на соответствующем функциональном пространстве сходятся к решению параболического уравнения с детерминированными постоянными коэффициентами.

В случае $\alpha \in (1, 2) \cup (2, 3)$ справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Существуют такие постоянные $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$, $k = [1/|2-\alpha|]$ ($[\cdot]$ означает целую часть), что в движущихся координатах $z_j = x_j - t \sum_{m=1}^k \frac{\lambda_j^m}{\varepsilon^{1-m\delta}}$, $\delta = |2-\alpha|$, функции $v^\varepsilon(x, t) = u^\varepsilon(z, t)$ сходятся по вероятности к решению параболического уравнения с детерминированными постоянными коэффициентами.

Таким образом, в этом случае u^ε представляет собой решение типа бегущей волны, движущейся со скоростью порядка $(1/\varepsilon^{1-\delta})$.

В случае же $\alpha = 2$ справедлива только слабая сходимост мер Q^ε , порожденных распределением решений u^ε на пространстве $L_w^2((0, T); H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C([0, T]; L_w^2(\mathbb{R}^n))$, где символ w означает топологию слабой сходимости.

ТЕОРЕМА 2. Семейство мер Q^ε слабо компактно.

Эти результаты получены совместно с А. Л. Пятницким.

7. Мельник Т. А. (Украина, Киев). “Асимптотика спектра задачи Дирихле в области типа густого гребешка”

Область типа густого гребешка $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ образована объединением области $\Omega_0 = \{0 < x_1 < \alpha, 0 < x_2 < \gamma(x_1)\}$ и большого количества тонких “зубцов” $G_j(\varepsilon) = \{|x_1 - \varepsilon(j + 1/2)| < \varepsilon h/2, -1 < x_2 \leq 0\}$, $j = 0, \dots, N-1$, где $\gamma \in C^1([0, 1])$, $h \in (0, 1)$, N – большое натуральное число, поэтому $\varepsilon = \alpha N^{-1}$ – малый параметр.

Изучено асимптотическое поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ собственных значений (СЗ) $\{\lambda_n(\varepsilon) : n \in \mathbb{N}\}$ и собственных функций (СФ) $\{u_n(\varepsilon, \cdot)\}$ спектральной задачи Дирихле

$$(1) \quad -\Delta u(\varepsilon, \cdot) = \lambda(\varepsilon) \rho(\varepsilon, \cdot) u(\varepsilon, \cdot) \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad u(\varepsilon, \cdot) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_\varepsilon,$$

где $\rho(\varepsilon, x) = 1$ при $x_2 > 0$ и $\rho(\varepsilon, x) = 1 + \varepsilon^{-m}$ при $x_2 < 0$.

Исследованы три качественно различных случая: $m < 2$, $m > 2$ и $m = 2$. В частности, при $m < 2$ доказано, что СЗ $\lambda_n(\varepsilon)$ задачи (1) стремится к n -му СЗ задачи Дирихле для уравнения Лапласа в Ω_0 . Получены также асимптотические оценки для разности СФ исходной и предельной задач. Задача (1) рассмотрена и в случае, когда на части $\partial\Omega_\varepsilon \cap \{x_2 = 0\}$ границы области Ω_ε заданы условия Неймана.

8. Левенштам В. Б. (Ростов-на-Дону). “Асимптотика периодических решений параболических уравнений с быстро осциллирующими по времени коэффициентами”

1. Квазилинейные параболические уравнения. Пусть k и m – натуральные числа и $T > 0$. Рассмотрена задача о $T\omega^{-1}$ -периодических по t решениях равномерно параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x, u, \dots, \mathcal{D}^{2k-1}u, \omega t) \mathcal{D}_x^\alpha u + f(x, u, \dots, \mathcal{D}^{2k-1}u, \omega t), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Функции $a_\alpha(x, \bar{u}, \tau)$, $f(x, \bar{u}, \tau)$ и любые их производные равномерно ограничены и l -периодичны по τ . Предполагается, что усредненное (по времени) уравнение имеет стационарное решение $\bar{v}$ и спектр $G(L)$ линеаризованной на $\bar{v}$ усредненной стационарной задачи L не содержит нуля. Асимптотическое приближение к решению u_ω , которое при $\omega \gg 1$ существует и единственно в некоторой окрестности $\bar{v}$, имеет вид

$$v_\omega = \bar{v} + \sum_{i=0}^n \omega^{-i} [u_i(x) + w_i(x, \omega t)].$$

Функции u_i однозначно находятся из уравнения $Lu_i(x) = f_i(x)$, а $w_i(x, \omega t)$, имеющие нулевое среднее по τ , – из уравнений $\frac{\partial w_i}{\partial \tau} = \varphi_i(x, \tau)$ с параметром x . Здесь f_i и φ_i – известные на каждом шаге функции, причем средние $\varphi_i(x, \tau)$ по τ равны нулю.

ТЕОРЕМА. Для любых $r, s \geq 0$ и натуральных n при $\omega \gg 1$ выполняются оценки $\|u_\omega - v_\omega\|_{C_{x,t}^{r,s}} \leq c_{n,r,s} \omega^{-(n+1)+s}$, $c_{n,r,s} = \text{const}$.

2. Задача о движении твердого тела в вязкой несжимаемой осциллирующей с частотой $\omega \gg 1$ жидкости, заполняющей полупространство. Построена асимптотика по степеням $\omega^{-1/2}$ для действующей на тело силы, что сводится к решению задач Неймана для уравнения Пуассона и Дирихле для стационарной системы Стокса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01417).

Вечернее заседание 26 апреля 1996 г., секция 2.

1. Глуцюз А. А. “Трехмерный контрпример к проблеме Маркуса–Ямабе о глобальной устойчивости”

Дается отрицательное решение проблемы Маркуса–Ямабе о глобальной устойчивости. А именно, доказывається следующая

ТЕОРЕМА. *Существует векторное поле в $\mathbb{R}^3$ с особой точкой, обладающее следующими свойствами:*

- 1) *все собственные значения его матрицы Якоби имеют отрицательные вещественные части;*
- 2) *особая точка поля не является глобально притягивающей.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема не верна в $\mathbb{R}^2$ и верна в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 4$.

Проблема глобальной устойчивости особой точки векторного поля в $\mathbb{R}^n$ при условии 1) теоремы была поставлена Маркусом и Ямабе в 1960 г. Ранее эта проблема при некоторых дополнительных ограничениях на векторное поле была исследована Ч. Олехом, Г. Мейстерсом, Ф. Хартманом и другими. В 1988 г. Н. Е. Барабанов сделал попытку доказать теорему в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 4$. Недавно в его статье были найдены ошибки. Используя идеи, представленные в ней, Х. Бернат и Х. Ёйбре [1] доказали этот вариант теоремы. Положительное решение двумерной проблемы Маркуса–Ямабе было получено К. Гутьересом и, независимо, Р. Фесслером в 1993 г. Чуть позднее, в том же году решение было независимо получено докладчиком (см. [2], [3], а также библиографию в [1], [3]). Таким образом, проблема Маркуса–Ямабе теперь решена полностью.

Решение трехмерной проблемы Маркуса–Ямабе было получено докладчиком в 1995 г. и анонсировано на конференции по динамическим системам в Триесте (май 1995). Чуть позднее, в конце того же года, полиномиальный контрпример к трехмерной проблеме был независимо получен в совместной работе А. Ван дер Эссена, Э. Хабберса, А. Симы, А. Гасуллы, Ф. Маньосаса.

[1] Bernat J., Llibre J. Counterexamples to Markus–Yamabe conjecture // Preprint.

[2] Глуцюз А. А. // УМН. 1994. Т. 49. № 3. С. 179–180.

[3] Глуцюз А. А. // Функци. анализ и его прил. 1995. Т. 29. № 4. С. 17–30.

2. Белых В. Н. (Новгород). “Цепочка связанных дифференциальных уравнений: синхронизация и хаос”

Рассматривается $m(n+1)$ -мерная диффузионно связанная система дифференциальных уравнений вида

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{y}_k + F(x_k, y_k) = \gamma + c^* u_k + d(y_{k-1} + 2y_k + y_{k+1}), \\ \dot{x}_k = y_k, \\ \dot{u}_k = Au_k + by_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{cases}$$

с граничными условиями $y_0 = y_1, y_m = y_{m+1}$, где переменные $x_k, y_k \in \mathbb{R}^1, u_k \in \mathbb{R}^n$, функция $F(x_k, y_k) \in C^1$; гурвицева матрица A , векторы b, c и скаляры d, γ – постоянные параметры системы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F_{y_k} > 0$. Тогда существует такое значение d_0 , что при $d > d_0$ интегральное многообразие системы $D = \{x_k = x_{k+1}, y_k = y_{k+1}, u_k = u_{k+1}, k = 1, 2, \dots, m\}$ глобально асимптотически устойчиво.

ТЕОРЕМА 2. Пусть система уравнений на плоскости

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} + F(x, y) = \gamma$$

при $\gamma = \gamma_0$ имеет петлю сепаратрисы седла. Тогда существует множество параметров, для которых система (1) имеет гомоклинические траектории.

Первая теорема устанавливает достаточные условия взаимной синхронизации подсистем системы (1), а вторая указывает на множество параметров, которое может соответствовать хаотическому поведению системы (1).

3. Бланк М. Л. (Москва) “Одна задача Улама и малые случайные возмущения динамических систем”

Пусть f – несингулярное отображение компактного пространства Лебега (X, m) (например, $X = [0, 1]$, $dm = dx$) в себя. Мы изучаем хаотические отображения f , имеющие богатый запас инвариантных мер, важную роль среди которых играет мера Синая–Боуэна–Рюэлля (СБР) μ_f , являющаяся общим пределом последовательностей итераций (под действием отображения f) произвольных абсолютно непрерывных вероятностных мер. Получить аналитическое представление для этой меры удастся лишь в небольшом числе модельных примеров. Поэтому актуальной является задача построения численных схем для этого. В 1960 году S. Ulam предложил (в простейшем одномерном случае) следующую конструкцию. Пусть $\{\Delta_i\}_{i=1}^N$ – конечное разбиение фазового пространства X на связные области. Рассмотрим цепь Маркова с N состояниями и переходными вероятностями $p_{ij} := |\Delta_i \cap f^{-1}\Delta_j|/|\Delta_i|$. Гипотеза Улама состоит в том, что для достаточно “хорошего” отображения f инвариантные меры этих цепей сходятся в слабой топологии к мере СБР μ_f , когда диаметр разбиения стремится к нулю.

ТЕОРЕМА. Пусть $X = [0, 1]$ и отображение f – кусочно растягивающее. Тогда при условии, что отношения длин элементов Δ_i равномерно ограничены, гипотеза Улама верна.

Доказательство этого утверждения основано на анализе устойчивости хаотических отображений относительно малых случайных возмущений. Мы рассматриваем также обобщение этого результата на многомерный случай.

4. Верещагин В. В. (Иркутск) “Асимптотики для глобального решения четвертого уравнения Пенлеве”

5. Ильяшенко Ю. С., Городецкий А. С. “Классификация минимальных аттракторов динамических систем”

Рассмотрим диффеоморфизм f замкнутого риманова многообразия M . Обозначим лебегову меру на M через μ . В соответствии с теоремой Крылова–Боголюбова, мера μ приводит к инвариантной мере с помощью следующей конструкции. Для каждого n определим

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f^k \mu,$$

где $f^k \mu$ определяется как $f^k \mu(U) = \mu f^{-k} U$ для любого открытого множества U . Назовем меру μ_∞ хорошей, если она является предельной точкой множества $\{\mu_n\}$ в слабой топологии. По определению минимальный аттрактор $A_{\min}$ диффеоморфизма f есть замыкание объединения носителей всех хороших мер.

ТЕОРЕМА. Пусть диффеоморфизм f имеет только гиперболические периодические точки. Тогда выполнено в точности одно из трех утверждений.

- 1) $\# A_{\min} < \infty$.
- 2) Существует эргодическая инвариантная мера с бесконечным носителем, лежащим в $A_{\min}$.
- 3) Для любой инвариантной меры с носителем в $A_{\min}$ найдется счетное подмножество $A_{\min}$ полной меры, состоящее из замкнутых траекторий. При этом диффеоморфизм f может быть C^1 -аппроксимирован диффеоморфизмом, имеющим гомоклиническую орбиту периодической точки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

6. Севрюк М. Б. “Возбуждение нормальных мод инвариантных торов в гамильтоновых системах”

Пусть гамильтонова система с N степенями свободы имеет $2n$ -мерное инвариантное многообразие M , гладко расслоенное на n -мерные инвариантные изотропные торы T_y , движение по которым условно-периодично (через y обозначен n -мерный параметр, нумерующий торы). Предполагается, что уравнение в вариациях вдоль каждого тора T_y имеет постоянные коэффициенты, причем среди собственных чисел матрицы коэффициентов есть m пар ($1 \leq m \leq N - n$) чисто мнимых чисел $\pm i\theta_j(y)$, $1 \leq j \leq m$.

ТЕОРЕМА. Если исходная гамильтонова система удовлетворяет некоторым условиям невырожденности и нерезонансности, то для всех целых k из интервала $0 \leq k \leq m$ эта система и любое ее достаточно малое гамильтоново возмущение имеют вблизи M инвариантные изотропные $(n+k)$ -мерные торы, движение по которым условно-периодично. При этом $2(n+k)$ -мерная мера Хаусдорфа объединения $(n+k)$ -мерных торов положительна. Частоты движения на $(n+k)$ -мерном торе, лежащем в малой окрестности T_y , близки к $\omega_1(y), \dots, \omega_n(y), \theta_{j_1}(y), \dots, \theta_{j_k}(y)$, где $\omega(y)$ – вектор частот невозмущенного n -мерного тора T_y .

Условия невырожденности и нерезонансности в этой теореме имеют точно такой же вид, как и соответствующие условия в аналогичной теореме для обратимых систем [1].

[1] Sevryuk M. B. // Chaos. 1995. V. 5. №3. P. 552–565.

7. Тураев Д. В., Шильников Л. П. (Нижний Новгород) “Пример дикого странного аттрактора”

Пусть $X - C^r$ -гладкий поток ($r \geq 4$) в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 4$), имеющий состояние равновесия O типа седло-фокус с характеристическими показателями $\pm \lambda \pm i\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-3}, \gamma$, где $\lambda < 0, \omega \neq 0, \operatorname{Re} \alpha_i < 0, \gamma > 0, \operatorname{Re} \alpha_i < \lambda, -2\lambda < \gamma$.

ТЕОРЕМА. В пространстве таких систем с C^r -топологией существует открытое множество U , системы из которого обладают диким странным аттрактором.

Эти аттракторы:

- 1) содержат седло-фокус O и W^u ,
- 2) не содержат устойчивых периодических орбит,
- 3) содержат грубые периодические орбиты только седлового типа, причем они могут быть двух типов ($\dim W^u = 2$ и $\dim W^u = 3$),
- 4) содержат дикое гиперболическое множество в смысле Ньюхауса.

В U плотны системы, аттракторы которых имеют:

- 1) гомоклинические касания любого порядка вырождения,
- 2) периодические орбиты любого порядка вырождения.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01135).

8. Филиппов А. Ф. “Использование аксиоматического метода для изучения дифференциальных уравнений с неограниченной правой частью”

9. Филиппов В. В. “Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений: вместо метода Лере–Шаудера”

Вечернее заседание 26 апреля 1996 г., секция 3.

1. Белов В. В., Кондратьева М. Ф. “Гамильтоновы системы уравнений для квантовых средних и квазиклассическое приближение”

Одной из задач квантовой механики является вычисление квантовых средних $\overline{A}_\Psi = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$ для произвольной наблюдаемой $\hat{A}$ в состоянии Ψ .

Пусть $\Psi = \Psi(t)$ – решение уравнения Шрёдингера $i\hbar\partial_t\Psi = \hat{H}\Psi$, $\hat{H}$ – гамильтониан с C^∞ -гладким матричнозначным вейлевским символом $H: \mathbb{R}_z^{2n} \times \mathbb{R}_t^1 \rightarrow \text{Mat}_k(\mathbb{C})$, $z = (p, q)$, $k \in \mathbb{N}$; $\hat{\eta}$ – базис в $A_H \otimes \text{Mat}_k(\mathbb{C})$, A_H – универсальная обертывающая алгебра алгебры Гейзенберга–Вейля с образующими $(\hat{z} - \bar{z}_\Psi(t)) \cdot I$, $I = ((\delta_{ij}))_{n \times n}$, $(\hat{z} = (-i\hbar\partial/\partial q), q \in \mathbb{R}^n)$.

ТЕОРЕМА 1. Вектор квантовых средних $\overline{\eta}_\Psi(t)$:

- 1) удовлетворяет счетномерной системе о.д.у.;
- 2) эта система – гамильтонова;
- 3) соответствующая (вырожденная) нелинейная скобка Пуассона – обобщенная скобка Дирака.

Пусть $H = \lambda_0(z, t) \cdot I + \hbar \sum_{j=1}^{k^2-1} \alpha_j \lambda_j(z, t)$, $\lambda_j \in C^\infty$, $\{\alpha_j\}$ – базис произвольной матричной алгебры Ли $\mathfrak{g}$; пусть $\Psi_h(t)$ – квазиклассически сосредоточенные [1] асимптотические $(\text{mod } h^{(M+1)/2}, h \rightarrow 0, M \in \mathbb{N})$ решения соответствующего уравнения Шрёдингера.

ТЕОРЕМА 2 [2]. Вектор $\overline{\eta}_{\Psi_h}(t) \pmod{h^{(M+1)/h}}$ удовлетворяет конечномерной замкнутой M -системе о.д.у. $\forall M \in \mathbb{N}$; 2-система – гамильтонова относительно скобки Ли–Пуассона – суммы стандартной скобки на R_z^{2N} и скобок на коалгебрах $\text{sp}^*(2N, R)$ и $\mathfrak{g}^*$.

ПРИМЕР. Для $\mathfrak{g} = \text{SU}(2)$ с базисом $\alpha_j = \sigma_j$ (σ_j – матрицы Паули) в случае операторов Паули в электромагнитном и Шрёдингера в $\text{SU}(2)$ -калибровочном полях 2-системы приводят к известным классическим уравнениям Френкеля и Вонга, соответственно, [2].

[1] Bagrov V. G., Belov V. V., Trifonov A. Yu. // Ann. Phys. 1996. V. 246. P. 231–271.

[2] Белов В. В., Кондратьева М. Ф. // Матем. заметки. 1995. Т. 58. №6. С. 803–817.

2. Васильев В. А. “(He)алгебраичность электростатических потенциалов”

3. Веселов А. П., Чалых О. А. “Лакуны и алгебраическая геометрия”

4. Диксма А. (Dijkma A.) (Нидерланды, Гронинген) “Гамильтоновы системы, коэффициенты Титчмарша–Вейля и модели”

Результаты доклада опубликованы в [1] и [2].

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L^2(\Delta(t) dt)$ изучается задача на собственные значения

$$(1) \quad \begin{cases} Jf'(t) - H(t)f(t) = \lambda\Delta(t)f(t) + \Delta(t)g(t), & t \in [0, +\infty), \\ \alpha(\lambda)f_1(0) + \beta(\lambda)f_2(0) = 0, & \alpha(\lambda) = \alpha_0 - \alpha_1\lambda, \quad \beta(\lambda) = \beta_0 - \beta_1\lambda. \end{cases}$$

Предполагается, что рассматриваемая система состоит из двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями, является гамильтоновой, формально симметричной, регулярной в нуле, причем $\Delta \geq 0$ почти всюду, и имеет место случай предельной точки в бесконечности. В граничном условии $f(t) = (f_1(t), f_2(t))^T$, числа $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ вещественны и $d = \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 \neq 0$. Обозначим через $m(\lambda)$ коэффициент Титчмарша–Вейля, связанный с задачей (1), в которой граничное условие заменено равенством $f_1(0) = 0$, и положим $\rho(\lambda) = (\alpha(\lambda) + \beta(\lambda)m(\lambda))^{-1}$. Задача (1) соответствует задаче на собственные значения для самосопряженного выражения (линеаризации) A_{lin} в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ снабжено внутренним произведением $(\varphi, \psi) = \overline{\psi}d^{-1}\varphi$. Если $d < 0$ ($d > 0$), то $\mathcal{H}$ является

понтрягинским (соответственно, гильбертовым) пространством. Обозначим через $R(\lambda)$ сужение резольвенты A_{lin} ; тогда решения (1) даются формулой $f = R(\lambda)g$. В интегральных представлениях $R(\lambda)$ возникают члены, не являющиеся целыми функциями и имеющие вид

$$\Omega(\lambda) = -\rho(\lambda) \begin{pmatrix} \beta(\lambda) & -\alpha(\lambda) \\ -\alpha(\lambda) & -\alpha(\lambda)m(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \omega(\lambda) = d^{-1}\rho(\lambda)(\alpha_1 + \beta_1 m(\lambda)).$$

Эти члены называются коэффициентами Титчмарша–Вейля, соответствующими (1). Они представляют собою функции Неванлинны, если $d > 0$; если же $d < 0$, то Ω является обобщенной функцией Неванлинны с одним отрицательным квадратом, а ω – функцией Неванлинны или обобщенной функцией Неванлинны с одним отрицательным квадратом, зависящей от чисел $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$. Самосопряженное выражение, связанное с $\Omega(\omega)$, обозначим через $A(\Omega)$ (соответственно, через $A(\omega)$).

ТЕОРЕМА. *Конечный непрерывный и точечный спектры у A_{lin} , $A(\Omega)$ и $A(\omega)$ являются общими, а их корневые пространства, соответствующие не вещественным собственным значениям, совпадают.*

[1] Dijksma A., Langer H., de Snoo H. S. V. // Oper. Theory Adv. Appl. 1988. V. 35. P. 37–83.

[2] Dijksma A., Langer H., de Snoo H. S. V. // Math. Nachr. 1993. V. 161. P. 107–154.

5. Карасев М. В. “Представление точных решений и операторных алгебр (а также глобальное квазиклассическое приближение) через геометрические когерентные состояния над лагранжевыми и изотропными подмногообразиями”

Дана конструкция минимального гомоморфизма из группоида лагранжевых подмногообразий в группоид гильбертовых пространств, а также расширений этого гомоморфизма, известных как “квантование”. Отсюда извлекаются представления через геометрические когерентные состояния (к.с.) для решений ряда уравнений математической физики. При этом к.с. однозначно связаны с симплектической, комплексной и римановой структурами фазового многообразия. Например, показано, как с помощью “бесселевых” к.с. можно получить глобальную асимптотику решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера над $\mathbb{R}^3$ с гамильтонианом, имеющим кулоновскую особенность (эта особенность, согласно Фоку, Мозеру и Сурьо, превращает фазовое многообразие в $T^*\mathbb{S}^3$). Предложено также представление точных и квазиклассических решений через “трансформированные” к.с.: $\psi = \int_{\Lambda} F(\alpha, A_{\alpha}^*) \chi_{\alpha} d\alpha$. Здесь χ_{α} – обычные к.с. над изотропным подмногообразием $\Lambda \ni \alpha$ в симплектическом-кэлеровом многообразии, A_{α} – набор коммутирующих операторов “уничтожения” (для которых χ_{α} является совместным собственным вектором), а $F(\alpha, \bar{z})$ – “трансформирующий” символ, подчиняющийся некоторому новому квантовому уравнению в комплексном расслоении над Λ . Пример применения такого представления в случае “гипергеометрических” к.с. χ_{α} , отвечающих алгебре с квадратичными коммутационными соотношениями, будет опубликован в работе М. В. Карасева и Е. М. Новиковой (ТМФ, 1996).

6. Стернин В. Ю., Шаталов В. Е. “Метод комплексных лучей в задачах дифракции”

7. Фокин М. В. (Новосибирск) “Гамильтоновы системы с непрерывным спектром и турбулентность”

Результаты доклада опубликованы в [1].

[1] Фокин М. В. Гамильтоновы системы и малые колебания вращающейся идеальной жидкости. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1995. Препринт № 20.

8. Шавгулидзе Е. Т. “Решение уравнения Шрёдингера с помощью фейнмановских интегралов и самосопряженные расширения дифференциальных операторов Шрёдингера”

9. Шафаревич А. И. “Квазимоды, соответствующие замкнутым траекториям и двумерным инвариантным торам гамильтоновых систем в резонансном случае”

В докладе излагаются совместные результаты автора с С. Ю. Доброхотовым и Виктором Мартинесом Оливе.

Пусть $H(x, p)$ — гладкая функция в $\mathbb{R}^{2n}$, такая, что сужение гамильтоновой системы с гамильтонианом H на инвариантное подпространство $\Omega : \{x_j = p_j = 0, j \geq 3\}$ допускает два интеграла F_1, F_2 , причем $F_1, F_2, H_0 = H|_{\Omega}$ функционально независимы. Рассмотрим область в Ω , расслоенную замкнутыми траекториями Γ гамильтониана H_0 , которые можно многими способами объединить в лиувилевы слоеины на двумерные торы Λ . Мы изучаем условия существования соответствующих квазимод проквантованного по Вейлю оператора, т.е. таких наборов функций ψ и чисел E , что

$$H\left(x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = E\psi + O(h^N), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sup \psi = \pi\Lambda(\pi\Gamma); \quad \lim_{h \rightarrow 0} E = H|_{\Lambda}(H|_{\Gamma}); \quad \pi(x, p) = x.$$

ТЕОРЕМА. Пусть оператор $H(x, -ih\partial/\partial x)$ существенно самосопряжен в L^2 и имеет дискретный спектр. 1) Квазимоды $\text{mod } O(h^{3/2})$, соответствующие лиувилеву слоеину на торы Λ , существуют, если исходная гамильтонова система, линеаризованная на траекториях этого тора, устойчива в направлениях, косортогональных к Ω , и, кроме того, на Λ постоянно одна из функций вида $G = \beta_1(m_1 + \frac{1}{2}) + \dots + \beta_{n-2}(m_{n-2} + \frac{1}{2})$, $m_j \in \mathbb{Z}$, где β_j — показатели Флоке указанной линейной системы. 2) Квазимода $\text{mod } O(h^{5/2})$, соответствующая замкнутой траектории Γ , существует, если упомянутая линейная система устойчива и Γ — невырожденная критическая окружность минимаксного типа для слоеины, определенного в п. 1); в частности, $dG|_{\Gamma} = dH_0|_{\Gamma}$.

10. Смолянов О. Г. “Представление функциональными интегралами решений одного стохастического уравнения Шрёдингера”

Утреннее заседание 27 апреля 1996 г., секция 1.

1. Прилепко А. И., Садовничий В. А. “Спектральные методы решения задач с финальным переопределением”

В односвязной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) с границей $\partial\Omega \in C^2$ ищется пара функций $f(x), \hat{U}(x, \lambda)$ (если все другие заданы) из условий

$$(1) \quad \lambda \hat{U}(x, \lambda) = L\hat{U}(x, \lambda) + \hat{\Phi}(x, \lambda)f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$(2) \quad B\hat{U}(x, \lambda) = \hat{b}(x, \lambda), \quad x \in \partial\Omega, \quad \text{Re } \lambda \geq 0,$$

$$(3) \quad l \left[\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \exp(\lambda t \hat{U}(x, \lambda)) d\lambda \right] = 2\pi i \Psi(x), \quad x \in \Omega, \quad a \geq 0.$$

В (1), (2), (3) $\hat{U}(x, \lambda), \hat{h}(\lambda)$ суть изображения Лапласа соответствующих оригиналов $U(x, t), h(t)$, L — равномерно эллиптический оператор, а B — граничный оператор. Считаем, что существует ортонормированный базис $e_k(x)_{k=1}^{\infty}$ из собственных функций $-Le_k(x) = \lambda e_k(x)$, $x \in \Omega$, $Be_k(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$; собственные числа $\lambda_k > 0$, $\lambda_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$, l — линейный положительный функционал, действующий на функции времени $h(t)$: $l[h] = \int_0^T h(t) d\mu(t)$, $l[h] \neq h(0)$.

Обозначим $\mu_k(x) = l \left[\int_0^T \exp(-\lambda_k(t-s)\Phi(x, s)) ds \right]$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\Phi \in W_2^1([0, t], L_2(\Omega))$, $|\Phi| \geq \delta_0 > 0$, $L\Phi \in L_2(\Omega)$, $\Phi f, \frac{\partial \Phi}{\partial t} f \in L_2(Q_T)$. Решение обратной задачи (1), (2), (3) из классов $f \in L_2(\Omega)$, $U \in W_2^{2,1}(Q_T)$ существует и единственно тогда и только тогда, когда система $\mu_k(x)e_k(x)_{k=1}^{\infty}$ тотальна в $L_2(\Omega)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-00289).

2. Агранович М. С., Амосов Б. А. “Оценки s -чисел и спектральные асимптотики для интегральных операторов типа потенциала на негладких поверхностях”

Пусть S – замкнутая липшицева $(n-1)$ -мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что в $\mathbb{R}^n$ задан полиоднородный или классический ПДО порядка $m-1$, где $m < 0$. Известно, что такой оператор является интегральным и его ядро $K(x, y)$ – бесконечно гладкая при $x \neq y$ функция. Сужая эту функцию на $S \times S$, введем интегральный оператор

$$Au(x) = \int_S \varphi(x) K(x, y) \psi(y) u(y) dS_y \quad (x \in S),$$

где φ и ψ – некоторые измеримые функции на S .

Получена следующая оценка для s -чисел оператора A :

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} s_j(A) j^{-m/(n-1)} \leq Cd(\varphi, \psi).$$

Величина $d(\varphi, \psi)$ выражается через $(n-1)$ -мерные меры Лебега $m(\text{supp } \varphi)$ и $m(\text{supp } \psi)$ на S и мала, если мала хотя бы одна из этих мер.

В случае, когда липшицева поверхность S “почти гладкая” (т.е. имеет структуру открытого бесконечно гладкого многообразия вне некоторого замкнутого множества S_0 с нулевой мерой Лебега на S) и A – самосопряженный оператор в $L^2(S)$, справедлива асимптотическая формула

$$\lambda_j^\pm(A) = b_\pm j^{m/(n-1)} + o(j^{m/(n-1)}) \quad (j \rightarrow \infty),$$

где $\lambda_j^\pm(A)$ – положительные и отрицательные собственные значения оператора A , занумерованные с учетом кратностей в порядке невозрастания модулей; постоянные $b_\pm$ обычным образом вычисляются через главный символ ПДО A на $S \setminus S_0$.

Подробное изложение публикуется в [1].

[1] Агранович М. С., Амосов Б. А. // Функци. анализ и его прилож. 1996. Т. 30. № 2. С. 1–18.

3. Братусь А. С. “Экстремальные характеристики собственных значений некоторых не-самосопряженных задач”

Рассматривается задача о потере устойчивости неконсервативной системы, поведение которой зависит как от величины вещественного параметра, так и от выбора функции из заданного множества H ограниченных измеримых неотрицательных функций, удовлетворяющих изопериметрическому условию. Проблема сводится к краевой несамосопряженной задаче на собственное значение. Изучается случай, когда при некотором критическом значении вещественного параметра и фиксированной функции из указанного множества возникают нулевые собственные значения. Доказано, что в этом случае имеет место свойство симметрии собственных значений относительно мнимой оси, поэтому нулевое собственное значение, по крайней мере, является двукратным. Ставится задача о стабилизации системы при критическом значении вещественного параметра за счет подходящего выбора функции из множества H . Найдены условия, при которых эта задача имеет решение при различных вариантах реализации двукратных нулевых собственных значений: унимодальный случай – двукратное собственное значение и единственная собственная функция (жорданова клетка) и бимодальный случай – двукратное собственное значение и две линейно независимые собственные функции. В качестве примера изучается задача об устойчивости трубы, по которой протекает жидкость. Роль вещественного параметра играет скорость течения жидкости, в качестве функций из множества H рассмотрены распределения толщин трубы.

4. Горин Е. А. “О спектре некоторых дифференциальных операторов 2-го порядка в пространстве целых функций”

Пусть E – пространство всех целых функций комплексной переменной z , наделенное поточечными операциями и топологией равномерной сходимости на компактах. Y. Stein (IMRN, 1994, № 2) показал, что в E существуют непрерывные операторы с пустым спектром и что спектр дифференциального оператора 1-го порядка не пуст. Однако уже по поводу оператора $D = z^2 d^2/dz^2 + d/dz + z$ автор пишет, что “he was not able to find a theoretical proof that the spectrum of D is nonempty”, хотя численные эксперименты убеждали в непустоте.

При каждом комплексном λ уравнение $Du = \lambda u$ имеет единственное решение в классе формальных степенных рядов от z со свободным членом 1. Последующие коэффициенты связаны соотношением $\lambda u_k = k(k-1)u_k + (k+1)u_{k+1} + u_{k-1}$. Поэтому $\{u_k\}$ – система ортогональных полиномов. При $k \geq 2$ определим полиномы v_k равенством $(k-2)!v_k = (-1)^k k u_k$.

ТЕОРЕМА 1. *Последовательность $\{v_k\}$ сходится в E к целой трансцендентной функции порядка $1/2$, нули которой являются простыми собственными числами оператора D и исчерпывают его спектр. Все эти числа, кроме одного отрицательного, положительны.*

ТЕОРЕМА 2. *Если коэффициенты оператора 2-го порядка суть полиномы степени не выше 2, то его спектр не пуст.*

5. Денк Р. (Denk R.) (Германия, Регенсбург) “Периодические дифференциальные уравнения и соответствующие определители”

Пусть $Y(x)$ – фундаментальное решение системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1) \quad y'(x) = A(x)y(x),$$

где $A(\cdot)$ – матрица размера $n \times n$, элементами которой являются функции с периодом 1. Тогда свойства устойчивости системы (1) характеризуются ее показателями Флоке ν , определяемыми из уравнения $\det(Y(1) - e^\nu I_n) = 0$.

Чтобы получить другое описание, введем бесконечную блочную матрицу $B(\nu)$ с помощью равенства

$$I + B(\nu) = \{[(2\pi il + \nu)\delta_{kl}I_n - \hat{A}(k-l)]/(2\pi il + \delta_{0l})\}_{k,l=1}^\infty.$$

Здесь через $\hat{A}(k)$ обозначен k -й коэффициент Фурье для A . Матрица $B(\nu)$ задает оператор Гильберта–Шмидта в пространстве $[l^2(\mathbb{Z})]^n$; поэтому определен регуляризованный определитель $\Delta_2(1 + B(\nu))$. Вычислив предел $\text{Det}(\nu)$ усеченных определителей

$$\text{Det}_N(\nu) := \det(\delta_{kl}I_n + B_{kl}(\nu))_{k,l=-N}^N,$$

получим определитель бесконечной матрицы. Следующая теорема устанавливает связь между определителями различных типов.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого комплексного числа ν справедливы равенства*

$$\text{Det}(\nu) = \{\exp[n(1-\nu) - \text{tr} \hat{A}(0)]\} \Delta_2(1 + B(\nu)) = \{\exp[-(1/2)(n\nu + \text{tr} \hat{A}(0))]\} \det(Y(1) - e^\nu I_n).$$

В частности, $\text{Det}(\nu)$ имеет полиномиальную структуру, и поэтому вопрос об устойчивости (1) сводится к вычислению $\text{Det}(\nu)$ для n различных значений ν . Формулируемая ниже теорема описывает асимптотическое поведение последовательности $\{\text{Det}_N(\nu)\}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\widehat{A}(k) = 0$ при $|k| > b$. Положим

$$\gamma_N := 1 + (2\pi N)^{-2} \operatorname{tr}(\nu - \widehat{A}(0))^2 + 2 \sum_{p=1}^b (2\pi)^{-2} N^{-1} (N-p)^{-1} \operatorname{tr}(\widehat{A}(p) \widehat{A}(-p)).$$

Тогда $\operatorname{Det}_N(\nu) - \gamma_N \operatorname{Det}_{N-1}(\nu) = O(N^{-4})$ при $N \rightarrow \infty$.

Эта теорема и аналогичные формулы более высоких порядков точности для частных случаев (1) позволяют увеличить скорость сходимости последовательности усеченных определителей. Установлено, что возникающие процессы вычисления показателей Флоке сходятся значительно быстрее, чем тот, который основан на решении начальной задачи для системы $Y'(x) = A(x)Y(x)$. Поэтому изложенные здесь результаты не только позволяют описать структуру бесконечных определителей $\operatorname{Det}(\nu)$ и $\Delta_2(1 + B(\nu))$, но также могут быть положены в основу численных расчетов.

6. Дубровский В. В. (Магнитогорск) “Глобальное строение резольвенты несамосопряженного оператора”

Пусть T – самосопряженный оператор с компактной резольвентой; λ_n – собственные числа оператора T , занумерованные в порядке возрастания величин с учетом кратности, P – несамосопряженный ограниченный оператор. Предположим, что $\lambda_n \sim Cn^\alpha$, $C > 0$, $\alpha > 0$. Справедлива

ТЕОРЕМА. Если $\alpha > 1$, то ядро резольвенты оператора $T + P$ представимо в виде сходящейся в L_2 суммы простейших дробей, которые выражаются через канонические системы надлежащим образом нормированных собственных и присоединенных векторов операторов $T + P$ и $T + P^*$.

7. Печенцов А. С. “Регуляризованные следы обыкновенных дифференциальных операторов”

Рассмотрим краевую задачу на отрезке

$$\sum_{k=0}^n P_k(x, \lambda) y^{(n-k)} = 0, \quad U_i(y, \lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} [a_{ij}(\lambda) y^{(j)}(0) + b_{ij}(\lambda) y^{(j)}(1)] = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

λ – спектральный параметр, причем $P_k(x, \lambda) = \sum_{l=0}^k P_{kl}(x) \lambda^l$, $P_0 \equiv 1$, $P_{kl}(x) \in C^\infty[0, 1]$, $a_{ij}(\lambda)$, $b_{ij}(\lambda)$ – произвольные многочлены по λ . В общем случае кратных корней полинома $\Pi(\omega) = \omega^n + P_{11}(x)\omega^{n+1} + \dots + P_{nn}(x)$ В. Тржитзинским и Х. Территином построены формальные решения $z_i(x, \lambda) = \exp\left(\int_0^x \sum_{j=0}^{k_i-1} \Omega_{ij}(t) \lambda^{\frac{k_i-j}{k_i}} dt\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_{i\nu}(x) \lambda^{-\frac{\nu}{k_i}}$ и дан алгоритм нахождения $k_i \in N$, $\Omega_{ij}(t)$, $\sigma_{i\nu}(x)$. Пусть $\Omega_{ij}(t)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, k_i-1}$, – постоянные.

ТЕОРЕМА. Во внешности круга $|\lambda| \leq R$ найдется конечное число простых гладких кривых $\Phi_m(\varphi) = r_m(\varphi) \exp(i\varphi)$, $m = 1, \dots, M$, разбивающих внешность этого круга на M областей S_m , в каждой из которых Φ .С.Р. уравнения имеет асимптотику: $\lambda \in S_m$, $\lambda \rightarrow \infty$, $y_i(x, \lambda) \sim \exp\left(x \sum_{j=0}^{k_i-1} \Omega_{ij} \lambda^{\frac{k_i-j}{k_i}}\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_{i\nu}(x) \lambda^{-\frac{\nu}{k_i}}$. Всякая Φ_m имеет предельное направление $\arg(\lambda) = \varphi_m$ и $\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_m} r_m(\varphi) = +\infty$.

Пусть $q = \text{Н.О.К.}(k_1, \dots, k_n)$, тогда характеристический определитель имеет асимптотику при $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\Delta(\lambda) \sim \sum_{s=1}^N \exp\left(\sum_{l=1}^q \xi_{sl} \lambda^{\frac{l}{q}}\right) \lambda^{\frac{n_s}{q}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu^{(s)} \lambda^{-\frac{\nu}{q}},$$

$n_s \in \mathbb{Z}$, $\xi_{sl}, \beta_\nu^{(s)} \in C$ – параметры асимптотики $\Delta(\lambda)$. Мы показываем, что метод В. Б. Лидского и В. А. Садовниченко [1] введения дзета-функции, ассоциированной с классом K , распространяется и на целые функции $\Delta(\lambda)$. Поэтому для рассматриваемой краевой задачи можно вычислить регуляризованные следы вне зависимости от кратности корней $\Pi(\omega)$, т.е. найти суммы вида: $\sum_k [\lambda_k^r - A_r(k)] = S_r$, где λ_k – с.з. задачи, $A_r(k)$ – вполне определенные числа, обеспечивающие сходимость рядов.

[1] Лидский В. Б., Садовнический В. А. // Функциональный анализ и его приложения. 1967. Т. 1. № 2. С. 52–59.

8. Подольский В. Е., Бобров А. Н. “О сходимости регуляризованных сумм степеней собственных чисел оператора Лапласа–Бельтрами с нечетным потенциалом на сфере”

Доказано, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (\mu_k^p - \lambda_k^p)$, где μ_k и λ_k – собственные числа возмущенного и невозмущенного оператора, сходятся при $p < \frac{3}{2}$ на сфере S^2 , причем при $p < 1$ ряд сходится абсолютно, а при $1 \leq p < \frac{3}{2}$ условно. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\mu_k^p - \lambda_k^p - \frac{c}{\lambda_k^{2-p}} \right)$ сходится при $p < 1$ на сфере S^3 . Эти ряды нельзя регуляризовать степенями λ_k так, чтобы они сходились при больших p .

9. Типенко Г. С. “Асимптотическое разложение спектральной функции и регуляризованные следы оператора Хилла”

В докладе предложен метод регуляризации ζ -функции положительно определенного оператора Хилла с гладким 2π -периодическим потенциалом $p(x)$. Обозначим через $\omega(k)$ блховский закон дисперсии оператора Хилла. Справедливо следующее тождество (формула регуляризованного следа):

$$\int_0^\infty \left(\omega(k) - k^2 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi p(x) dx \right) dk = 0.$$

Аналогичным образом осуществляется регуляризация интегралов от более высоких степеней блховского закона дисперсии.

Получено полное асимптотическое разложение спектральной функции оператора Хилла $e(x, y, \lambda)$ как функции квази-импульса с равномерной оценкой остатка на плоскости (x, y) . С помощью этого разложения вычислены регуляризованные интегралы для ядра натуральных степеней оператора Хилла. В частности, след нулевого порядка имеет вид

$$\int_0^\infty \left[e(x, y, \omega(k)) - \frac{\sin k(y-x)}{\pi(y-x)} \right] dk = 0.$$

Утреннее заседание 27 апреля 1996 г., секция 2.

1. Резникова Ж. В. “О характере эволюции решений вырождающихся параболических уравнений с градиентными нелинейностями изменяющейся формы”

Рассматривается первая краевая задача для уравнения

$$u_t = (|u_x|^{k(x)} \operatorname{sgn} u_x)_x - g(x, t) |u|^{r(x)} \operatorname{sgn} u$$

в четверти плоскости $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ с начальным условием $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \geq 0$, и граничным условием $u(0, t) = u_1(t)$, $t \geq 0$. Здесь $u_0(x)$, $u_1(t)$ – непрерывные неотрицательные ограниченные функции, $u_0(0) = u_1(0)$, $u_0(x) = 0$ при $x \geq 1$, $g \geq 0$. Через $u(x, t)$ обозначается неотрицательное ограниченное непрерывное обобщенное решение этой задачи.

ТЕОРЕМА 1 (о глобальном сохранении фронта). Пусть $g \equiv 0$; $k(x) > 1$, $\beta(x) := 1 - [k(x)]^{-1} \in C^1(\bar{\mathbf{R}}_+)$, $\beta'(x) \leq 0$, $\sup\{x|\beta'(x)|[\beta(x)]^{-1} \mid x \geq 0\} < +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\beta(x) = +\infty$. Тогда для любого $t_0 > 0$ найдется такое $x_0 = x_0(t_0)$, что $u(x, t_0) = 0 \quad \forall x \geq x_0$.

ТЕОРЕМА 2 (о локализации возмущений). Пусть $g \in C(\overline{\mathbf{R}}_+)$, $k \in C^1(\overline{\mathbf{R}}_+)$, $r \in C(\overline{\mathbf{R}}_+)$, $0 < r(x) < k(x)$; $g(x)$ и $k(x)$ – невозрастающие функции, $r(x)$ – неубывающая функция;

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(k(x) - r(x))]^{1+k(x)} g(x) = +\infty.$$

Тогда найдется такое $l > 0$, что $u(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in [l, +\infty) \times [0, +\infty)$.

Условие (1) является точным.

2. Гладков А. Л. (Белоруссия, Витебск) “Уравнение диффузии-конвекции: растущие решения”

Рассматривается уравнение фильтрации пористой среды с конвективным переносом

$$(1) \quad u_t = (u^m)_{xx} + c(u^n)_x,$$

где $1 < m < n$, $c > 0$. Для уравнения (1) в полуплоскости $\mathbb{R}_+^2$ изучается задача Коши с начальным условием

$$(2) \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

где неотрицательная непрерывная функция $u_0(x)$, вообще говоря, является неограниченной. В силу вырождения задача (1), (2) может не иметь классического решения. Пусть $u(x, t)$ – ее минимальное непрерывное обобщенное решение, $S_T = \mathbb{R} \times [0, T]$, $T > 0$.

ТЕОРЕМА. Предположим, что $u_0(x)$ при $x \geq 0$ удовлетворяет неравенству

$$u_0(x) \leq M(\alpha + x)^p,$$

где $M > 0$, $\alpha \geq 0$ и $p \geq 0$. Тогда если $p < 1/(n-1)$, то $u(x, t)$ существует в $\mathbb{R}_+^2$. При $p = 1/(n-1)$ $u(x, t)$ существует в некоторой полосе S_T . Если дополнительно

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) \leq a \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) = a \right), \quad a \geq 0,$$

то $\limsup_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) \leq a \quad \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = a \right)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Показана определенная точность теоремы. В частности, если $\liminf_{x \rightarrow +\infty} u_0(x)/x^{1/(n-1)} = b$, то при $0 < b < +\infty$ $u(x, t)$ может существовать лишь локально, а при $b = +\infty$ $u(x, t)$ не существует ни в какой полосе. Как видно из условий теоремы, для существования обобщенного решения не требуется никаких ограничений на рост начальной функции при $x \rightarrow -\infty$. В классе существования установлена теорема единственности обобщенного решения. Аналогичные результаты получены для уравнений более общего вида.

3. Канель Я. И. “О решениях типа бегущей волны для системы конкуренции-диффузии”

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} (1) \quad & u_t - d_1 u_{xx} = u(a_1 - b_1 u - c_1 v), \\ (2) \quad & v_t - d_2 v_{xx} = v(a_2 - b_2 u - c_2 v), \end{aligned}$$

где $d_1, \dots, c_2$ – положительные константы, причем

$$(3) \quad \frac{b_1}{b_2} < \frac{a_1}{a_2} < \frac{c_1}{c_2}.$$

Из (3) следует, что существует стационарная точка $u_0 > 0, v_0 > 0$ системы (1), (2). Ищется решение типа бегущей волны системы (1), (2)

$$\begin{aligned} (4) \quad & u = u(\xi), \quad v = v(\xi), \quad \xi = x + ct, \quad c = \text{const} > 0, \\ (5) \quad & u(-\infty) = u_0, \quad v(-\infty) = v_0, \quad u(+\infty) = a_1/b_1, \quad v(+\infty) = 0, \\ (6) \quad & u'(\xi) > 0, \quad v'(\xi) < 0, \quad -\infty < \xi < \infty. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} a &= \frac{a_2}{a_1}, \quad b = \frac{b_2}{b_1}, \quad r = \frac{c_1 a_2}{c_2 a_1}, \quad \beta = b - a, \quad d = \frac{d_1}{d_2}, \\ k_1 &= \frac{c}{2} - \left(\frac{c^2}{4} + \beta \right)^{1/2}, \quad k_2 = \frac{c}{2d} - \left(\frac{c^2}{4d^2} + \frac{1}{d} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < d \leq 1, c \geq c_0 = 2(\beta d)^{1/2}$ и выполняются условия (3),

$$(7) \quad \frac{k_2}{k_1} \neq 1, 2, \dots, n, \dots$$

Тогда существует решение (4), удовлетворяющее условиям (5), (6).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $d \geq 1, c \geq c_1 = 2[(rb - a)d/b]^{1/2}$ и выполняются условия (3), (7). Тогда существует решение (4), удовлетворяющее условиям (5), (6).

4. Шишков А. Е. (Украина, Донецк) “Мертвые зоны” и мгновенная компактификация носителей энергетических решений квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка”

Изучается задача Коши для широкого класса квазилинейных уравнений, модельным представителем которой является, например, задача

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} (|u|^{q-1} u) + (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha (|\nabla_x^m u|^{p-1} D_x^\alpha u) + b_0 |u|^{\lambda-1} u = 0, \quad b_0 > 0, \quad m \geq 1,$$

$$(2) \quad u(0, x) = u_0(x) \in L_{q+1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad n \geq 1, \quad 0 < \lambda < q, \quad p > 0.$$

Определим семейство подобластей $\Omega(s) = \{|x| < s\}$, $G(s, T) = \Omega(s) \times (0, T)$, $s > 0, T > 0$, и введем следующие функции, связанные с произвольным энергетическим обобщенным решением $u(t, x)$ задачи (1), (2):

$$\begin{aligned} H(s, T) &\equiv \left(\int_{G(s, T)} |u|^{p+1} dx dt \right)^{1+\nu} + \left(\int_{G(s, T)} |u|^{q+1} dx dt \right)^{1+\mu}; \\ f(y, s) &= \int_{|x-y| < s} |u_0(x)|^{q+1} dx, \\ \nu &= m(p+1)(q-\lambda)[n(p-\lambda) + m(p+1)(q+1)]^{-1}, \quad \mu = \nu(p-\lambda)(q-\lambda)^{-1}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены соотношения

$$(3) \quad 0 < \lambda < q \leq p,$$

или

$$(4) \quad 0 < \lambda < p < q, \quad p > (q(n-m) - m)[n + m(q+1)]^{-1}.$$

Тогда если для некоторых значений $s_1 > 0$, $T_1 > 0$ энергетическая функция $H(s, T)$ удовлетворяет условию малости

$$H(s_1, T_1) \leq L(s_1, T_1),$$

где $L(s, T) > 0$ – некоторая конкретная определяемая лишь параметрами λ , p , q функция, то $u(T_1, x) \equiv 0 \quad \forall x: |x| < \delta$, $\delta = \delta(s_1) > 0$; т.е. у решения к моменту $t = T_1$ обязательно возникает “мертвая зона”.

На основе этой теоремы устанавливается мгновенная компактификация носителя решения задачи (1), (2), если только $f(y, s) \rightarrow 0$ при $|y| \rightarrow \infty \quad \forall s = \text{const} < \infty$, а также получена точная оценка носителя.

5. Бонне А. (Bonnet A.) (Франция, Париж), Камин С. (Kamin S.) (Израиль, Тель-Авив) “Об одном классе стационарных течений в полосе”

Доклад посвящен задаче о стационарном течении пресных и соленых вод в горизонтальном водоносном слое. Ее изучение ведется с середины тридцатых годов (см. книгу П. Я. Полубариновой-Кочиной [1], где можно найти дальнейшие ссылки). Недавно Г. В. Альт и К. Я. ван Дейн [2] предложили определение слабого решения этой задачи в терминах функции тока. В [2] рассмотрен случай, когда водоносный слой изображается полосой $\Omega = \mathbb{R} \times (0, 1)$ на плоскости (x, y) и имеется линия Γ , разделяющая пресные и соленые воды. Как показано в [2], функция тока $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$(1) \quad \Delta u + \lambda \partial \gamma_u / \partial x = 0, \quad \gamma_u \in H(u),$$

где λ – положительная постоянная, $H(u)$ – функция Хевисайда. Область $u < 0$ соответствует пресным водам, область $u > 0$ – соленым. Положительность λ отражает тот факт, что слева в канал поступают только соленые воды. Для рассмотренной в [2] задачи граничные условия можно записать в терминах функции тока u , а именно: $u(x, 0) = Q_s$ и

$$(2) \quad u(x, 1) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ -xQ_f/a & \text{при } 0 \leq x \leq a, \\ -Q_f & \text{при } x > a. \end{cases}$$

Здесь через Q_s и Q_f обозначены втекающие количества соленых и пресных вод, соответственно. В [2] доказано существование слабого решения задачи (1), (2) и исследовано поведение линии раздела (свободной границы).

Цель нашей работы состоит в изучении слабых решений уравнения (1) с граничными условиями из более широкого класса, чем (2). Рассматривается краевая задача для (1) в Ω с условием $u = f$ на $\partial\Omega$, где $f(x, y)$ – заданная функция, подчиненная некоторым ограничениям на ее поведение при $x \rightarrow +\infty$. Доказываются существование и единственность решения.

[1] Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.

[2] Alt H. W., van Duijn C. J. // Nonlinear Anal. 1990. V. 14. № 8. P. 625–656.

6. Тезеи А. (Tesei A.) (Италия, Рим) “Об одном классе параболических уравнений с переменной плотностью”

7. Гилдинг Б. (Gilding B.) (Нидерланды, Энсхеде) “Критерий наличия конечной скорости распространения возмущений”

Говорят, что эволюционное уравнение обладает конечной скоростью распространения возмущений, если неотрицательное решение, финитное по пространственной переменной в начальный момент, сохраняет это свойство для более поздних значений времени. В настоящем докладе, основанном на результатах совместной работы с Р. Кершнером (R. Kersner), приводится критерий наличия указанного эффекта для уравнений вида

$$\partial u / \partial t = (\partial / \partial x) a(u, \partial \varphi(u) / \partial x) + b(u, \partial \varphi(u) / \partial x),$$

где u – искомое решение, t – время, а x – пространственная переменная. Такие уравнения называют двукратно нелинейными, поскольку они содержат функции, нелинейные относительно u и $\partial \varphi(u) / \partial x$. Если производные $\varphi'(u)$ и $a_v(u, v)$ существуют и положительны, то рассматриваемое уравнение имеет второй порядок и параболический тип; однако оно вырождается, если какая-либо из этих производных обращается в нуль.

Будем считать, что выполняются следующие предположения:

- 1) $\varphi \in C([0, +\infty)) \cap C^1((-\infty, +\infty))$, $\varphi'(u) > 0$ при любых $u > 0$, $\varphi(0) = 0$;
- 2) $a \in C([0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)) \cap C^{0,1}([0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)) \cap C^{0,1}((-\infty, 0] \times (-\infty, +\infty)) \cap C^{1,0}((0, +\infty) \times \{0\})$, $a_v(u, v) > 0$ при любых $u \geq 0$ и $v \neq 0$, $a(0, 0) = 0$;
- 3) $b \in C((0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)) \cap C^{0,1}((0, +\infty) \times [0, +\infty)) \cap C^{0,1}((0, +\infty) \times (-\infty, 0])$, $b\varphi' \in L^1(0, u; L_{\text{loc}}^\infty((-\infty, +\infty)))$ и $b_v\varphi' \in L^1(0, u; L_{\text{loc}}^\infty((-\infty, +\infty)))$ при любых $u > 0$;
- 4) $\max\{0, b\} \in L^\infty(0, u; L_{\text{loc}}^\infty((-\infty, +\infty)))$ либо $\max\{0, -b\} \in L^\infty(0, u; L_{\text{loc}}^\infty((-\infty, +\infty)))$ при любых $u > 0$;
- 5) $b(0, 0) = 0$.

Основным результатом является

ТЕОРЕМА. *Рассматриваемое уравнение обладает конечной скоростью распространения возмущений по отношению к верхней грани носителя решения тогда и только тогда, когда существует такое вещественное λ , что уравнение*

$$a(s, -\theta(s)) + \lambda s = \int_0^s b(r, -\theta(r)) \varphi'(r) [\theta(r)]^{-1} dr$$

на некотором полуинтервале $[0, \delta)$ имеет неотрицательное непрерывное решение $\theta(s)$, удовлетворяющее условию

$$\int_0^\delta \varphi'(s) [\theta(s)]^{-1} ds < +\infty.$$

Подробное доказательство этой теоремы, ее применения, а также обзор имеющейся литературы по данному вопросу будут опубликованы в [1].

[1] Gilding B. H., Kersner R. A necessary and sufficient condition for finite speed of propagation in the theory of doubly nonlinear degenerate parabolic equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser. A (to appear).

8. Кершнер Р. (Kersner R.) (Венгрия, Будапешт) “О вырожденных уравнениях типа Колмогорова–Петровского–Пискунова”

В докладе излагались некоторые частные случаи результатов работы [1].

Пусть функции $a(u)$ и $c(u)$ положительны и непрерывны на $(0, 1)$, $a'(u) \geq 0$ для $u \geq 0$ и $a(0) = c(0) = c(1) = 0$. Рассмотрим уравнение

$$(1) \quad u_t = [a(u)]_{xx} + c(u), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$$

Решение (1), имеющее вид $u(x, t) = f(x - \sigma t) \equiv f(\xi)$, назовем *бегающей волной от 0 до 1 со скоростью σ* (кратко: БВ-решением со скоростью σ), если $f(-\infty) = 1$, $f(+\infty) = 0$ и $0 \leq f \leq 1$. Функция f удовлетворяет (вообще говоря, в слабом смысле) уравнению

$$(2) \quad [a(f)]'' + c(f) + \sigma f' = 0.$$

Вместо f введем новую функцию $\theta(f)$ по формуле

$$\int a'(f)[\theta(f)]^{-1} df = -\xi.$$

Для θ получаем уравнение

$$(3) \quad \theta(s) = \sigma s - \int_0^s a'(\tau)c(\tau)[\theta(\tau)]^{-1} d\tau.$$

ТЕОРЕМА 1. Уравнение (1) обладает БВ-решением со скоростью σ тогда и только тогда, когда (3) имеет такое неотрицательное непрерывное решение $\theta(s)$, что $\theta(1) = 0$ и $a'(s)/\theta(s) \in L^1((0, 1))$.

Введем обозначения:

$$\lambda = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s^{-1} \int_0^s r^{-1} c(r) a'(r) dr \right]^{1/2}, \quad \Lambda = \sup_{0 < s < 1} s^{-1} \int_0^s r^{-1} c(r) a'(r) dr.$$

ТЕОРЕМА 2. А) Если $\lambda = +\infty$, то уравнение (1) не имеет БВ-решений.

Б) Если $\lambda < +\infty$, то существует такое σ^* , что для любого $\sigma \geq \sigma^*$ уравнение (1) имеет БВ-решение со скоростью σ , а при $\sigma < \sigma^*$ БВ-решения со скоростью σ отсутствуют.

В) Если $\lambda < +\infty$ и $\Lambda > \lambda$, то $(2\Lambda)^{1/2} < \sigma^* < 2\lambda^{1/2}$.

ПРИМЕР. Рассмотрим уравнение $u_t = (u^{m-1}u_x)_x + u(1-u)$. Из теорем 1, 2 вытекает, что это уравнение имеет БВ-решения со скоростью σ тогда и только тогда, когда $m \geq 1$ и $\sigma \geq \sigma^*$, где $\sigma^* = \sigma^*(m)$ – убывающая функция со следующими свойствами:

- 1) $\sigma^*(1) = 2$;
- 2) $\sigma^*(m) > m^{-1/2}$ для $1 < m < 2$;
- 3) $\sigma^*(2) = 2^{-1/2}$;
- 4) $\sigma^*(m) < m^{-1/2}$ для $2 < m \leq 3$;
- 5) $\sigma^*(m) \leq \{2/[m(m-1)]\}^{1/2}$ для $m > 3$.

Легко видеть, что $\Lambda = (m^2 - 1)^{m-1} m^{-2m}$.

[1] Gilding B. H., Kersner R. Travelling waves in nonlinear diffusion-advection-reaction // Preprint. University of Twente, 1995.

9. Данилов В. Г. “Новое определение слабого решения полулинейных уравнений с малым параметром при производных”

Хорошо известно, что с полулинейными уравнениями связан важный класс решений – бегущие волны (кинкоподобные решения). В пределе при стремлении малого параметра ε к нулю эти решения переходят в функцию Хевисайда. Здесь возникает геометрическая задача об описании эволюции носителя сингулярности предельного решения или, что то же самое, об описании эволюции фронта бегущей волны. С точки зрения асимптотической теории геометрическая задача возникает как следствие условий разрешимости (условий ортогональности) для линеаризованного уравнения, которые являются билинейными (без учета нелинейности в уравнении) относительно решения. Геометрическая задача не может быть получена предельным переходом с помощью стандартного определения обобщенного решения в $\mathcal{D}'$ в силу того, что это определение (без учета нелинейности в уравнении) приводит к линейному функционалу относительно неизвестной функции. Более того, используя стандартное $\mathcal{D}'$ -определение, для полулинейного уравнения в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ мы получаем $w\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(u) = 0$, где $F(u)$ – нелинейность уравнения. Полученное соотношение не содержит информации об эволюции фронта. Можно также показать, что учет следующих членов асимптотики слабого решения приводит не к геометрической задаче, а к недоопределенной системе уравнений (аналогу цепочки условий Гюгонио), см. [1]. В докладе приведена общая конструкция определения слабого решения, на основе которого осуществляется слабый предельный переход к геометрической задаче. Частные случаи этой конструкции содержатся в [1], [2].

Работа выполнена совместно с Г. А. Омеляновым и Е. В. Радкевичем.

[1] Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V. // FBR News. 1995. № 9. P. 27–28.

[2] Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V. // European J. Appl. Math. (to appear).

10. Калашников А. С. “О влиянии дискретизации на нелинейные явления в моделях математической физики”

Что происходит с нелинейным эффектом в эволюционной краевой задаче при замене производной по времени разностным отношением? В докладе было показано, что возможны различные случаи:

- а) эффект сохраняется при прежних предположениях;
- б) эффект сохраняется при измененных предположениях;
- в) эффект исчезает;
- г) эффект принимает новую форму.

Ниже приводятся примеры.

Рассмотрим краевую задачу:

$$D_t \Phi(u) = D_x^2 u, \quad (x, t) \in (\mathbb{R}_+)^2; \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{\mathbb{R}}_+; \quad u(0, t) = g(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Здесь $\Phi \in C(\overline{\mathbb{R}}_+) \cap C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(s) > 0 \quad \forall s > 0$; $g \in C(\overline{\mathbb{R}}_+)$, $g(0) = 0$, $g(t) > 0 \quad \forall t > 0$. Известно, что в этой задаче возмущения распространяются с конечной скоростью, если и только если $\int_0^1 [\Phi(s)]^{-1} ds < +\infty$. Обозначим $\delta_\tau y(x, t) \equiv \tau^{-1} [y(x, t) - y(x, t - \tau)] \quad (\tau > 0)$.

При переходе к системе $\delta_\tau \Phi(v(x, k\tau)) = D_x^2 v(x, k\tau) \quad (k \in \mathbb{N})$ критерий наличия конечной скорости распространения возмущений становится иным, а именно:

$$\int_0^1 \left[\int_0^s \Phi(\sigma) d\sigma \right]^{-1/2} ds < +\infty.$$

Рассмотрим теперь задачу:

$$D_t u = \mathcal{A}u \equiv D_x^2 u - |u|^{1/2} \operatorname{sgn} u, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \quad u(x, 0) = f(x) \equiv (1 + x^2)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Известно, что носитель решения этой задачи мгновенно компактифицируется. При переходе к системе $\delta_\tau v(x, k\tau) = \mathcal{A}v(x, k\tau)$ данный эффект исчезает. Однако для решения $w(x, k\tau)$ системы

$\delta_\tau w(x, k\tau) = \mathcal{A}w(x, (k-1)\tau)$ он принимает новую форму: $w(x, \tau)$ оказывается знакопеременной.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00165).

Утреннее заседание 27 апреля 1996 г., секция 3.

1. Астахова И. В. “Окачественных свойствах решений уравнений типа Эмдена-Фаулера”
Рассматривается дифференциальное уравнение

$$(1) \quad y^{(n)} + p(x)|y|^{k-1}y = 0,$$

где $n \geq 1$, $k > 1$, а $p(x)$ – непрерывная не обращающаяся в нуль функция.

Приводятся некоторые качественные свойства решений этого уравнения, ср. [1], [2].

ТЕОРЕМА 1. Для любого $p_0 \geq 0$ найдется такое $A > 0$, что любое положительное определенное на интервале $(-1, 1)$ решение $y(x)$ уравнения (1), где $|p(x)| \geq p_0$, удовлетворяет неравенству

$$y(x) \leq A, \quad x \in [-1/2, 1/2].$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $y(x)$ – положительное решение дифференциального уравнения (1), определенное на интервале (a, b) , $-\infty < a < b < \infty$. Тогда

$$y(x) \leq C_{nk} \inf\{|p(x)| : x \in (a, b)\}^{-1/(k-1)} (\min(x-a, b-x))^{-n/(k-1)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\inf\{|p(x)| : x \in (-\infty, \infty)\} > 0$. Тогда не существует нетривиальных знакопостоянных решений уравнения (1), определенных для всех $x \in (-\infty, \infty)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $y(x)$ – положительное решение дифференциального уравнения (1), определенное для всех $x \in (0, \infty)$. Тогда

$$y(x) \leq C_{nk} \inf\{|p(x)| : x \in (a, b)\}^{-1/(k-1)} x^{-n/(k-1)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть функция $p(x)$ удовлетворяет неравенству $|p(x)| \geq p_0 x^{-r}$, где $r > 0$, $p_0 = \text{const} > 0$. Тогда любое положительное решение $y(x)$, определенное на $(0, \infty)$, удовлетворяет неравенству

$$y(x) \leq C_{nk} p_0^{-1/(k-1)} x^{-(n-r)/(k-1)}.$$

В частности, если $r < n$, то $y(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если n – четное и $(-1)^{n/2} p(x) > 0$, то все сформулированные выше утверждения выполняются не только для положительных, но и для знакопеременных решений. При этом оценки будут справедливы для $|y(x)|$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00504).

[1] Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотическое поведение решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.

[2] Кондратьев В. А. О качественных свойствах решений полулинейных эллиптических уравнений // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1992. № 16. С. 186–190.

2. Брюно А. Д. “Алгоритмы нелинейного анализа”

Покажем, как степенное преобразование позволяет упрощать первые приближения алгебраических и дифференциальных уравнений [1]. Пусть U, V, W – векторы размерностей k, l, m , соответственно ($k + l + m = n$). Дифференциальный моном $a(U, V, W)$ – это произведение степеней координат U, V, W и производных $\partial^L u_j / \partial V^L$, где $L \in \mathbb{Z}_+^l$. Моному $a(U, V, W)$ ставится в соответствие точка $Q \in \mathbb{R}^n$: произведению $\text{const } U^R V^S W^T$ соответствует $Q = (R, S, T)$, производной $\partial^L u_j / \partial V^L$ соответствует $Q = (E_j, -L, 0)$, а при умножении мономов их векторы Q складываются [1]. Дифференциальному полиному $f(U, V, W)$, т.е. сумме мономов, соответствует в $\mathbb{R}^n$ множество $D(f)$ точек Q . Пусть d – размерность выпуклой оболочки множества $D(f)$. Пусть степенное преобразование

$$\log U = A_{11} \log X + A_{12} \log Y + A_{13} \log Z, \quad \log V = A_{22} \log Y + A_{23} \log Z, \quad \log W = A_{33} \log Z$$

переводит $f(U, V, W)$ в $g(X, Y, Z)$. Здесь $\log U = (\log u_1, \dots, \log u_k)^*$, A_{ii} – неособые квадратные матрицы, A_{ij} – прямоугольные ($A_{21} = 0, A_{31} = 0, A_{32} = 0$), $A = (A_{ij})$, звездочка – знак транспонирования.

ТЕОРЕМА 1. $D(g)$ получается из $D(f)$ линейным преобразованием $Q' = A^*Q$.

ТЕОРЕМА 2. Если $d < n$, то существует такая матрица A , что значения $n - d$ координат постоянны для всех $Q' = (R', S', T') \in D(g)$. Если $r'_j = \text{const}$ (или $s'_j = \text{const}$), то в $x_j^{-r'_j} g$ (или $y_j^{-s'_j} g$) координата x_j (или y_j) входит только в виде логарифма $\log x_j$ (или $\log y_j$). Если же $t'_j = \text{const}$, то в $z_j^{-t'_j} g$ координата z_j отсутствует.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01411).

[1] Брюно А. Д. // ДАН. 1994. Т. 335. № 4. С. 413–416.

3. Быков В. В. “Некоторые свойства минорант показателей Ляпунова”

Пусть M_n – множество всех уравнений вида $\dot{x} = A(t)x$, где отображение $A: \mathbb{R}^+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$ ограничено и непрерывно, наделенное топологией компактной сходимости отображений A .

Обозначим через $\underline{\lambda}_k$ максимальную полунепрерывную снизу в топологии равномерной сходимости миноранту k -го показателя Ляпунова.

ТЕОРЕМА 1. Функционал $\underline{\lambda}_k: M_n \rightarrow \mathbb{R}$ для любого $k = 1, \dots, n$ принадлежит третьему классу Бэра.

При $n \leq 3$ этот результат доказан И. Н. Сергеевым. А. Н. Ветохин доказал, что для любого $n > 1$ и любого $k = 1, \dots, n$ функционал $\underline{\lambda}_k: M_n \rightarrow \mathbb{R}$ не принадлежит второму классу Бэра.

ТЕОРЕМА 2. Для любого набора функций $\rho_j: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, j \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_j(t) = 0$, любого $n > 1$ и любого $k = 1, \dots, n$ существует уравнение с оператор-функцией A такое, что

$$\underline{\lambda}_k(A) < \inf_{j \in \mathbb{N}} \inf_{\|B(t) - A(t)\| \leq \rho_j(t)} \lambda_k(B).$$

4. Ветохин А. Н. “О дескриптивном типе некоторых множеств линейных систем”

5. Гичев Т. Р. (Болгария, София) “Быстропротекающие процессы”

Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + [B + B_1(t)]y + f(t), \quad \dot{y} = A_2 x + [C + C_1(t)]y + g(t); \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m; \quad t_0 \leq t < T; \quad A_1, A_2, B, C = \text{const}. \end{aligned}$$

Если полуинтервал $[t_0, T)$ имеет малую (но конечную) длину, то решение $x_T(t)$, $y_T(t)$, $t_0 \leq t < T$, с начальным условием $x(t_0) = u$, $y(t_0) = v$ будем называть *быстропротекающим процессом*. При $T \rightarrow t_0$ быстропротекающий процесс определяет мгновенный процесс.

ТЕОРЕМА. Пусть для всех собственных значений $\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)$, $t \in [t_0, T)$, матрицы $H(t) \equiv [C_1(t) + C_1^*(t)]/2$ и для всех $\tau \in [t_0, T)$

$$\lim_{t \rightarrow T} \int_{\tau}^t \max_{1 \leq p \leq m} \lambda_p(s) ds = -\infty.$$

Пусть, далее, матрица $C_1(t)$ обратима и матрица $D \equiv B_1(t)C_1^{-1}(t)$ постоянна при всех $t \in [t_0, T)$. Тогда

$$x(t_0^+) \equiv \lim_{T \rightarrow t_0} \lim_{t \rightarrow T} x_T(t) = u - Dv, \quad y(t_0^+) \equiv \lim_{T \rightarrow t_0} \lim_{t \rightarrow T} y_T(t) = 0.$$

Пусть, наконец, существует матрица $F(t)$ такая, что матрица $D_0 \equiv F(t)C_1^{-1}(t)$ на полуинтервале $[t_0, T)$ является постоянной симметричной и положительно (или отрицательно) определенной. Тогда

$$\begin{aligned} P &\equiv \lim_{T \rightarrow t_0} \lim_{t \rightarrow T} \int_{t_0}^t F(s)y_T(s) ds = -D_0v, \\ w &\equiv \lim_{T \rightarrow t_0} \lim_{t \rightarrow T} \int_{t_0}^t y_T^*(s)F(s)y_T(s) ds = -\frac{1}{2}v^*D_0v, \end{aligned}$$

а числа $\|x(t_0^+) - u\| + \|v\|$, $\|P\|$, w одновременно равняются нулю тогда и только тогда, когда $\|v\| = 0$.

6. Изобов Н. А. (Белоруссия, Минск) “Неулучшаемые условия отсутствия неограниченных неколеблущихся решений у уравнения Эмдена–Фаулера”

Рассматриваем уравнение Эмдена–Фаулера

$$(1) \quad u^{(n)} = p(t)|u|^\lambda \operatorname{sgn} u, \quad n \geq 2, \quad \lambda > 1, \quad t \geq 0,$$

с кусочно-непрерывной функцией $p: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для функций $p(t)$ и $p_\mu(t, n) \equiv t^{-1}[p(t)t^{(n-1)\lambda+1}]^\mu$ выполнено условие

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^{-\varepsilon} p_\mu(t, n) \exp \alpha \int_{t_0}^t p_\mu(\tau, n) \left(\int_{t_0}^{\theta_\tau} p(\xi) \xi^{(n-1)\lambda} d\xi \right)^{\mu(\lambda-1)} d\tau dt = +\infty$$

при некоторых $\varepsilon > 0$, $\alpha \geq 0$, $\mu \in (0, 1/n)$ и $\theta \in (0, 1)$. Тогда уравнение (1) не имеет неограниченных неколеблущихся решений.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для некоторых чисел $\varepsilon > 0$, $\alpha \geq 0$, $\mu \in (0, 1/n)$ и $0 < \omega < \Omega < 1$ выполнено условие

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^{-\varepsilon} p_\mu(t, n) \exp \alpha \left\{ \int_{t_0}^t p_\mu(\xi, n) d\xi \cdot \prod_{l \in L(t)} \left(\int_{t_0}^{t^{\omega(l)}} p_1(\xi, n) d\xi \right)^{\mu(\lambda-1)\lambda^{l-1}} \right\} dt = +\infty,$$

в котором $\omega(l) \equiv \omega^l$ и $L(t) = \{1, \dots, 1 + [\ln \omega|^{-1} \ln(\ln t / \ln t_0)]\}$, $t_0 \geq e$. Тогда уравнение (1) не имеет неограниченных неколеблущихся решений.

Теорема 2 является точной: функция $p(t) \geq \text{const} \cdot t^{-(n-1)\lambda-1} \ln^\gamma t$, $t \geq t_0$, с числом $\gamma \geq -1$ удовлетворяет ее условию, в то время как уравнение (1) с неотрицательной функцией $p(t) \leq \text{const} \cdot t^{-(n-1)\lambda-1} \ln^\gamma t$, $t \geq t_0$, при $\gamma < -1$ уже имеет, согласно известному признаку И. Т. Кигурадзе, $(n-1)$ -параметрическое семейство неограниченных решений.

7. Клоков Ю. А. (Латвия, Рига) “О некоторых краевых задачах для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка”

Для нелинейного уравнения 4-го порядка вида

$$(1) \quad x^{(iv)} = -\varphi(t, x) - \psi(t, x, x', x'', x'''),$$

где $t \in I = [0, \tau]$, $x \in \mathbb{R}$, рассматриваются две краевые задачи с краевыми условиями

$$(2) \quad x'(0) = x'(\tau) = 0, \quad x'''(0) = b_0, \quad x'''(\tau) = b_1;$$

$$(3) \quad x(0) = x(\tau) = 0, \quad x''(0) = b_0, \quad x''(\tau) = b_1.$$

ТЕОРЕМА. Пусть $\varphi, \psi \in C(I \times \mathbb{R}^4)$ и $\varphi(t, x) \rightarrow \pm\infty$ при $x \rightarrow \pm\infty$ равномерно относительно $t \in I$. Пусть, далее, существует число $M > 0$ такое, что

$$\psi \geq -M \quad \text{при} \quad x \geq 0 \quad \text{и} \quad \psi \leq M \quad \text{при} \quad x \leq 0$$

для всех $(t, x', x'', x''') \in I \times \mathbb{R}^3$. Пусть, наконец, существует функция $c \geq 0$, $c(x, x') \in C(\mathbb{R}^2)$, такая, что

$$\forall (t, x, x', x'', x''') \in I \times \mathbb{R}^4 : |\psi| \leq c(x, x') [1 + |x''|^5 + |x'''|^{5/3}].$$

Тогда решения задач (1), (2) и (1), (3) существуют для любых пар $(b_0, b_1) \in \mathbb{R}^2$.

[1] Клоков Ю. А. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. №4. С. 611–618.

8. Покорный Ю. В., Боровский А. В. (оба – Воронеж) “Некоторые вопросы теории Штурма–Лиувилля на графах”

9. Сергеев И. Н. “О классах Бэра показателей Ляпунова линейных систем с топологией сходимости в среднем”

Обозначим через M_n^J линейное пространство систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

с непрерывными ограниченными коэффициентами, наделенное топологией сходимости в среднем, т.е. топологией, базой которой служат множества

$$U_\varepsilon(0) = \left\{ A \mid \overline{\lim}_{t-s \rightarrow \infty} \frac{1}{t-s} \int_s^t \|A(\tau)\| d\tau < \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

ТЕОРЕМА. Рассматриваемые как функционалы на топологическом пространстве M_n^J при $n > 1$ верхний Ω и нижний ω центральные показатели принадлежат первому классу Бэра, а показатели Ляпунова λ_i , $i = 1, \dots, n$, не принадлежат никакому классу Бэра.

Утреннее заседание 27 апреля 1996 г., секция 4.

1. Окендон Х. (Ockendon H.) (Великобритания, Оксфорд) “Мультимодальный резонанс”

В [1] были описаны вынужденные одномерные колебания акустического резонатора под действием внешней силы, имеющей малую амплитуду и частоту, близкую к основной резонансной частоте. Было показано, что вблизи резонансной частоты существует расстраивающий режим, при котором вынужденные колебания разрывны. С помощью анализа изменений площади поперечного сечения резонатора в [2] было установлено, что для появления разрывных решений нужна соизмеримость всех нормальных частот резонатора, а если имеется лишь конечное число соизмеримых частот, то возникают колебания “типа Дуффинга”.

Обратимся теперь к общему двумерному случаю и покажем, что малой деформацией стенок можно изменить направление околорезонансного воздействия на перпендикулярное. Поскольку на члены первого порядка влияют только соизмеримые частоты, рассмотрим сосуд с сечением, близким к квадратному. Тогда потенциал скоростей φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} - \varphi_{tt} = \varepsilon^{1/2} \lambda \varphi_{tt} + Q(\varphi)$$

и граничным условиям: $\varphi_x = 0$ при $x = 0$, $\varphi_x = \varepsilon \sin t$ при $x = \pi - \varepsilon \sin t$, $\varphi_y = 0$ при $y = 0$, $\varphi_y = \varepsilon^{1/2} a'(x) \varphi_x$ при $y = \pi + \varepsilon^{1/2} a(x)$. Здесь ε – малый параметр, соответствующий амплитуде внешней силы, λ характеризует величину разрывов, а Q – квадратичная функция от производных φ .

Пусть $\varphi = \varepsilon^{1/2} \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots$. Тогда для φ_0 получаем представление вида

$$\varphi_0 = \sum f_{mn} ((m^2 + n^2)^{1/2} t \pm mx \pm ny),$$

где суммирование производится по всем таким взаимно простым m и n , для которых соответствующие числа $(m^2 + n^2)^{1/2}$ являются целыми. Функции f_{mn} определяются из условия интегрируемости для φ_1 , что приводит к следующей связанной системе дифференциальных уравнений относительно $f_{mn}(t)$:

$$\begin{aligned} & \lambda f''_{mn}(t) + \gamma H f'_{mn}(t) f''_{mn}(t) + \pi^{-1} \delta_{m1} \delta_{n0} \sin t \\ &= \pi^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [a'(x) \varphi_{0x} - a(x) \varphi_{0yy}]|_{y=\pi, t=\tau} \cdot \cos knx \cos k(m^2 + n^2)^{1/2} (t - \tau) dx d\tau. \end{aligned}$$

Численное решение показывает, что, вообще говоря, участвуют все моды, а разрывы возможны в любом направлении $(\pm m, \pm n)$ для определенных значений λ , причем величина $a(x)$, характеризующая изменение формы сосуда, имеет порядок $O(1)$. Однако при возрастании $|a(x)|$ множество значений λ , для которых возможны разрывы, уменьшается, и вновь возникают колебания “типа Дуффинга” [3].

[1] Chester W. // J. Fluid Mech. 1964. V. 18. P. 44–65.

[2] Ockendon H., Ockendon J. R., Chester W., Peake M. R. // J. Fluid Mech. 1993. V. 237. P. 201–217.

[3] Ockendon H., Ockendon J. R., Waterhouse D. D. // J. Fluid Mech. 1996. V. 315. P. 317–344.

2. Окендон Дж. Р. (Ockendon J. R.) (Великобритания, Оксфорд) “Моделирование вихрей с помощью дифференциальных уравнений”

Математическое моделирование вихрей в жидкости с малой вязкостью приводит к ряду интересных дифференциальных уравнений и дает подход к изучению сверхпроводящих вихрей и других типов “линейных” особенностей – таких, например, как дислокации в упругих кристаллах. Отправным пунктом служит определение изолированного вихря как безвихревого течения с особенностями, которым соответствуют бесконечные скорости, на линии $\Gamma(t)$, задающей положение вихря. Такое течение всегда можно разложить на интеграл “типа Био–Савара” и регулярную составляющую, порожденную граничными данными и известным внешним потоком u_0 . Для того чтобы при этом иметь возможность описать эволюцию $\Gamma(t)$, нужно ввести определенную структуру в “сердцевине” вихря, характерную длину которой обозначим через δ . Это можно осуществить путем задания объемного распределения завихренности при выполнении закона Гельмгольца для движения границы или посредством задания реакции на действие вязких сил, причем в последнем случае требуется знать локальное решение уравнений Навье–Стокса [1].

В любом случае, найдя два члена “внутреннего” разложения вблизи сердцевинки и согласовав их с “внешним” течением без вязкости, получим из интеграла Био–Савара, что скорость движения $\Gamma(t)$ равна

$$(1) \quad v = -(4\pi)^{-1} k \beta \log \delta + u_0$$

с точностью до младших членов относительно δ . Здесь мощность вихря считается равной единице, k – кривизна линии $\Gamma(t)$, а β – единичный вектор ее бинормали. Это построение, известное под названием “приближения локальной индукции”, позволяет изучить как самоиндуцированное движение, так и различные виды взаимодействий между вихрями. В частности, удается исследовать возможность “соединения” вихря с его проекцией на неподвижную плоскость. Очевидно, что только при условии $|u_0| > k \log \delta^{-1}$ скорость u_0 проекции сравнима с самоиндуцированной скоростью. Это означает, что наименьшее расстояние h от вихря до рассматриваемой плоскости (пусть она задается уравнением $z = 0$) должно удовлетворять соотношению $h \log \delta^{-1} = O(1)$. Следовательно, вихрь может быть представлен в виде $r = (x, \varepsilon Y(x, t), \varepsilon Z(x, t))$, где ε – малый параметр. В свою очередь, это позволяет вывести для Y и Z уравнения Захарова [2]. Предполагая, что задача автомодельна и соединение происходит при нулевом значении времени, приходим к формуле $Z = (-t)^{1/2} f(\eta)$, где $\eta = x/(-t)^{1/2}$, а f удовлетворяет уравнению

$$(2) \quad 4(f''' + f'/f^2) + \eta^2 f' - \eta f = 0$$

с условиями $f(0) = a$, $f'(0) = 0$, $f(\eta) \sim b\eta$ при $\eta \rightarrow \infty$; здесь a и b – отрицательные постоянные, подлежащие определению [3].

Другой вид вихревого взаимодействия относится к сплетению вихрей, расстояние d между которыми таково, что

$$(3) \quad kd \log \delta^{-1} \ll 1.$$

Тогда второй член в (1) является главным. Предположим, что рассматриваемая система вихрей допускает усреднение с плотностью завихренности ω . В силу сохранения вихрей получаем

$$\partial \omega / \partial t + \nabla \times (\omega \times v) = 0.$$

Но из предположений о рассматриваемой модели вытекает, что $\omega = \text{rot } u$, где u – скорость жидкости. Далее, из (1) и (3) следует, что $v = u$ с точностью до младших членов. Таким образом, мы вывели уравнения Эйлера без какого-либо обращения к ньютоновой механике, кроме использования формулы (1).

В точности те же идеи применимы к исследованию вихрей в сверхпроводниках второго рода. Если использовать модель Лондона, описывающую вихри посредством сингулярных решений уравнения $\Delta H - H = 0$, где H – магнитное поле (это означает, что кривизна вихря имеет одинаковый порядок с глубиной проникания, а параметр Гинзбурга–Ландау велик), то вместо (1) получим

$$v = -(4\pi)^{-1} k n \log \delta + j_0 \times \tau.$$

Здесь и ниже через $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ обозначаются (соответственно) единичные векторы главной нормали и касательной к $\Gamma(t)$, а $\mathbf{j}_0$ – внешний поток. В задаче о возможности соединения уравнение (2) принимает вид

$$f'' - \eta f'/2 + f/2 - 1/f = 0;$$

граничные условия остаются прежними. Можно показать, что теперь единственным решением является $f = 2^{1/2}$; поэтому неосциллирующее соединение представляется маловероятным. Наконец, если рассматриваются сплетения вихрей при предположении (3), то из равенств $\mathbf{v} = \mathbf{j}_0 \times \boldsymbol{\tau} = (\nabla \times \mathbf{H}) \times \boldsymbol{\omega}/|\boldsymbol{\omega}|$, справедливых с точностью до младших членов, следует, что усредненная плотность завихренности удовлетворяет уравнению

$$\partial \boldsymbol{\omega} / \partial t + \nabla \times \{ \boldsymbol{\omega} \times [(\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}] \} = 0.$$

[1] Ting L., Klein R. Viscous Vortical Flows. New York: Springer-Verlag, 1991.

[2] Захаров В. Е. // УФН. 1988. Т. 155. С. 529–538.

[3] Chapman S. J., Hulton B. J., Ockendon J. R. // Quart. Appl. Math. 1996.

[4] Chapman S. J. // SIAM J. Appl. Math. 1995. V. 55. P. 1259.

3. Толанд Дж. (Toland J.) (Великобритания, Бат) “Подкова Смейла в классической задаче об установившихся волнах на воде”

4. Каметака И. (Kametaka Y.) (Япония, Осака) “Об уравнении, описывающем движение сферической частицы в жидкости”

Рассматривается следующая задача:

$$(1) \quad u'(t) + p \int_0^t [\pi(t - \tau)]^{-1/2} u'(\tau) d\tau + qu(t) = b(\pi t)^{-1/2} + f(t) \quad (t > 0),$$

$$(2) \quad u(0) = a.$$

В случае, когда $p = 3^{1/2}$ и $q = 1$, функция $u(t)$ представляет собой относительную скорость движущейся в жидкости сферической частицы, которая имеет ту же плотность, что и жидкость.

Пусть p – вещественное число, а $q > 0$. При любых заданных a , b и $f(t)$ существует единственное решение задачи (1), (2), имеющее вид

$$u(t) = aA(t) + bB(t) + (C * f)(t),$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ – фундаментальные решения, которые выражаются через функцию Миттаг-Леффлера. Справедливы следующие утверждения.

1°. Если $p > -2^{1/2}$ и $q = 1$, то $A(t) \sim p(\pi t)^{-1/2}$ ($t \rightarrow +\infty$).

2° (Резонанс). Если $p = -2^{1/2}$, $q = 1$, $a = b = 0$ и $f(t) = \cos t$, то $u(t) = t(\cos t + \sin t) + O(t^{1/2})$ ($t \rightarrow +\infty$).

3°. Если $2^{1/2} < p < 2$ и $q = 1$, то $A(t) > 0$ и $A'(t) = -qC(t) < 0$ ($t > 0$).

Последнее утверждение вытекает из равенства

$$A(t) = pq\beta^{-1} \int_0^{+\infty} [\pi(t + \tau)]^{-1/2} \exp(-\alpha\tau) \sin \beta\tau d\tau,$$

выполняющегося при определенном выборе α и β . Действительно, функция $A(t)$ должна быть решением задачи:

$$A''(t) + (2q - p^2)A'(t) + q^2 A(t) = pq(\pi t)^{-1/2} \quad (t > 0),$$

$$A(0) = 1, \quad A'(0) = -q.$$

Решив ее, получим написанное выше интегральное представление для $A(t)$.

Для приближенного построения фундаментальных решений предлагается несколько методов.

I. Метод “стрельбы”. Он оказывается малоэффективным.

II. Использование непустого пересечения областей сходимости ряда Тейлора и асимптотического ряда для $A(t)$. Это простейший подход.

III. Можно вычислить $A(t_1)$ для малого $t_1 > 0$ с помощью ряда Тейлора, а также $A(t_2)$ для большого $t_2 > t_1$ с помощью асимптотического ряда. Затем можно численно решить краевую задачу для (1) с заданными граничными значениями $A(t_1)$ и $A(t_2)$.

5. Самохин В. Н. “Классическая операторная схема и разрешимость уравнений магнитной гидродинамики нелинейно-вязких сред”

При $m = 2$ и $m = 3$ рассматривается система уравнений

$$(1) \quad \partial_t u_k - \nu \sum_{i=1}^m \partial_i \{ \varphi(I(u)) (\partial_i u_k + \partial_k u_i) \} + \sum_{i=1}^m u_i \partial_i u_k \\ - (\mu \mu_0 / \rho) \sum_{i=1}^m H_i \partial_i H_k = f_k - \partial_k (p_* / \rho - \mu \mu_0 H^2 / (2\rho)), \quad k = 1, \dots, m, \\ (2) \quad \operatorname{div} u = 0, \quad \operatorname{rot} E = -\mu \mu_0 \partial_t H, \quad \operatorname{rot} H = \sigma(E + \mu \mu_0 [u, H]) + j_0, \quad \operatorname{div}(\mu \mu_0 H) = 0,$$

где $I(u) = \sum_{i,j=1}^m (\partial_j u_i + \partial_i u_j)^2$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, $\partial\Omega \in C^2$, $0 < t < T$, $f(x, t)\{f_k\}$, $j_0(x, t)\{j_{0k}\}$ – заданные функции, а неизвестными являются $u(x, t)\{u_k\}$, $H(x, t)\{H_k\}$, $E(x, t)\{E_k\}$, $p_*(x, t)$;

$$(3) \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad H_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad E_\tau|_{\partial\Omega} = 0;$$

$$(4) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad H(x, 0) = H_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Вводятся пространства

$$V(\Omega) = \{u : u \in (\mathring{W}_p^1(\Omega))^m, \operatorname{div} u = 0\}, \\ \mathcal{H}(\Omega) = \{h : h \in (W_2^1(\Omega))^m, \operatorname{div}(\mu \mu_0 h) = 0, h_n|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Функция $\varphi(\xi)$ предполагается такой, что задача (1)–(4) сводится к операторному уравнению вида

$$W'(t) + AW(t) + BW(t) = F(t), \quad 0 < t < T, \quad W(t) : (0, T) \rightarrow V(\Omega) \times \mathcal{H}(\Omega),$$

где операторы A и B действуют из $V \times \mathcal{H}$ в $V' \times \mathcal{H}'$, причем

$$(AW, W) \geq \operatorname{const}(\|u; \mathring{W}_p^1(\Omega)\|^p + \|H; \mathcal{H}(\Omega)\|^2)$$

и A является градиентом по Гато выпуклого функционала

$$J(\{u, H\}) = \frac{\nu}{4} \int_{\Omega} dx \int_0^{I(u)} \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2\mu\mu_0\sigma} \int_{\Omega} (\operatorname{rot} H)^2 dx.$$

Доказана разрешимость задачи (1)–(4) в пространстве

$$L_p(0, T; V) \times L_2(0, T; \mathcal{H}) \times L_2(0, T; L_2(\Omega)) \times L_2(0, T; D(\Omega))$$

при $p \geq 1 + m/2$ и соответствующей стационарной задачи при $p \geq 3m/(m+2)$.

6. Фурсиков А. В. “Точная локальная управляемость системы уравнений Навье–Стокса”

7. Кажихов А. В., Мамонтов А. Е. (оба — Новосибирск) “Пространства Орлича в вопросах существования глобальных решений уравнений сжимаемой вязкой жидкости”

Рассматривается система уравнений

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0; \quad \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = \operatorname{div} \mathbf{P} + \rho \vec{f},$$

где $\mathbf{P} = \lambda \operatorname{div} \vec{u} \cdot \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}$, а $\mathbf{D}$ — тензор скоростей деформаций. Для системы (1) формулируется задача о течении в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей (число n произвольно):

$$(2) \quad \vec{u}|_{\partial\Omega} = 0; \quad (\rho, \rho \vec{u})|_{t=0} = (\rho_0, \vec{v}_0); \quad \rho_0 \geq 0.$$

Обобщенным решением задачи (1), (2) назовем пару $(\rho, \vec{u})$, удовлетворяющую (1) в смысле распределений и имеющую регулярные производные на порядок меньше, чем старшие в (1). Введем пространство Y , состоящее из функций $\vec{v}$ таких, что $\mathbf{D}(\vec{v}) \in L_{\Phi}^*(\Omega)$, а $\Psi(r) = \int_0^r \mu(s) ds$,

и обозначим $\Phi(v) = v \ln^k v$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\mu(|\mathbf{D}|) = \exp(|\mathbf{D}|^\beta)$, $\beta \geq 1$, и $\lambda = \lambda(|\operatorname{div} \vec{u}|)$ — неубывающая непрерывная функция такая, что $\lambda(s) \leq \mu(s)$. Пусть также $\rho_0 \in L_{\Phi}^*(\Omega)$, $k \geq 4$, $\vec{u}_0 \equiv \vec{v}_0/\rho_0 \in Y$, $\vec{f} \in L_{\infty}(\Omega \times (0, T))$. Тогда на любом промежутке $(0, T)$ существует обобщенное решение задачи (1), (2), причем $\rho \in L_{\infty}(0, T, L_{\Phi}^*(\Omega))$, $\vec{u} \in L_{\infty}(0, T, Y \cap C(\overline{\Omega}))$. При этом уравнения (1) выполнены как равенства в $L_{\infty}(0, T, W^{-1}L_{\Phi}(\Omega))$, (2)₂ — по непрерывности в норме пространства $W^{-1}L_{\Phi}(\Omega)$, и п. в. на $(0, T)$ решение удовлетворяет энергетическому равенству

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |\vec{u}|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0 |\vec{u}_0|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{P} : \mathbf{D} dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{f} dx d\tau.$$

8. Вайгант В. А. (Барнаул) “Теоремы существования глобальных решений для двумерных уравнений Навье–Стокса сжимаемой вязкой жидкости”

9. Хадкевич В. Л. (Воронеж) “Об исчезающей вязкости в начально-краевой задаче для уравнений Навье–Стокса”

Пусть Ω — двумерная ограниченная область с гладкой границей S , $T > 0$ фиксировано. В $\Omega \times (0, T)$ рассматривается система уравнений Навье–Стокса

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + u_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = f(x, t) - \nabla p, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{S \times [0, T]} = 0, \quad u|_{t=0} = a(x).$$

Замыкание множества гладких финитных соленоидальных функций по норме $\|\cdot\|$ пространства $L_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ обозначим через J , а по норме $\|\cdot\|_1$ пространства $W_2^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ — через J^1 . Будем считать, что $f \in L_2([0, T]; J)$ и $a \in J^1$.

Пусть $\{e_j\}$ — система собственных функций оператора Стокса, $J_n = \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_n\}$ и P_n — ортопроектор из J в J_n . Система Галеркина, отвечающая (1), имеет вид

$$(2) \quad \frac{\partial u^n}{\partial t} - \nu \Delta u^n + P_n \left(u_k^n \frac{\partial u^n}{\partial x_k} \right) = P_n f, \quad u^n|_{t=0} = P_n a \quad (u^n \in J_n).$$

ТЕОРЕМА. Для произвольного фиксированного n решения $u^{n, \nu}$ задачи (2) сходятся при $\nu \rightarrow 0$ к решению v^n галеркинской системы, отвечающей уравнению Эйлера

$$\frac{\partial v^n}{\partial t} + P_n \left(v_k^n \frac{\partial v^n}{\partial x_k} \right) = P_n f, \quad v^n|_{t=0} = P_n a \quad (v^n \in J^n),$$

и справедливы оценки

$$\max_{t \in [0, T]} \|u^{n, \nu}(t) - v^n(t)\| \leq \nu c_1(n), \quad \int_0^T \|u^{n, \nu}(t) - v^n(t)\|_1^2 dt \leq \nu c_2(n),$$

где постоянные c_1, c_2 не зависят от $\nu > 0$.

Вечернее заседание 27 апреля 1996 г., секция 1.

1. Орочко Ю. Б. “Примеры симметрических дифференциальных операторов в $L^2(\mathbb{R}^m)$ с бесконечными индексами дефекта”

Возьмем неограниченный самосопряженный оператор A , действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H , и действительную функцию $a(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с единственной возможной точкой разрыва $t = 0$, удовлетворяющую условиям

$$a(t) \neq 0 \quad (t \in \mathbb{R}), \quad a(t) \in C^2((-\infty, 0]) \cap C^2([0, +\infty)).$$

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$\sigma_p[f](t) = -(|t|^p a(t) f'(t))' + q(t)f(t) + r(t)Af(t)$$

с операторным коэффициентом $r(t)A$, действующее на H -значные функции $f(t)$, в котором $q(t)$ и $r(t)$ – действительные функции класса $C(\mathbb{R})$; производные от $f(t)$ понимаются в сильном смысле. При $p > \frac{1}{2}$ дифференциальному выражению $\sigma_p[f](t)$, вырождающемуся при $t = 0$, можно сопоставить классический минимальный симметрический оператор S_p в $L^2_H(\mathbb{R})$ – гильбертовом пространстве H -значных функций $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с интегрируемым квадратом нормы.

ТЕОРЕМА. Оператор S_p имеет бесконечные индексы дефекта, если $\frac{1}{2} < p < \frac{3}{2}$. Если A – равномерно положительный оператор, $a(t) > 0$, $q(t) \geq 0$, $0 \leq r(t) \leq \text{const}$, $t \in \mathbb{R}$, то индексы дефекта оператора S_p равны нулю при $p \geq \frac{3}{2}$.

Первое утверждение теоремы позволяет достаточно просто получать примеры вырождающихся симметрических дифференциальных операторов второго порядка в $L^2(\mathbb{R}^m)$ эллиптического, гиперболического и смешанного типов с бесконечными индексами дефекта.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01438).

2. Гомилко А. М. (Украина, Киев) “Конечномерные возмущения J -самосопряженных операторов с вещественным спектром”

3. Константинов А. Ю. (Украина, Киев) “Операторы Шрёдингера с потенциалами, зависящими от спектрального параметра”

Анализ оператора Шрёдингера с потенциалом, рационально зависящим от спектрального параметра, тесно связан с изучением матричного (самосопряженного в $(L_2(\mathbb{R}^n))^2$) оператора

$$H = \begin{pmatrix} -\Delta + q & v \\ v & h \end{pmatrix}.$$

Здесь Δ – оператор Лапласа в $L_2(\mathbb{R}^n)$; q, v, h – вещественные функции на $\mathbb{R}^n$. Мы предполагаем, что $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $h \in C^3(\mathbb{R}^n)$ и для некоторых $c > 0$, $\varepsilon > 0$

$$|q(x)| + |v(x)| \leq c(1 + |x|)^{-1-\varepsilon}, \quad |h''(x)| + |h'''(x)| \leq c(1 + h^2(x) + |h'(x)|^2), \quad |f'(x)| + |f''(x)| \leq c.$$

Здесь $f = v(h + i)^{-1}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\lambda \in \tau(h)$, если для любой окрестности J точки λ $\inf\{|h'(x)| \mid h(x) \in J\} = 0$. Будем предполагать, что $\tau(h)$ не более чем счетно. Обозначим $H_0 = \text{diag}\{-\Delta, h\}$, $\tau = \tau(h) \cup \{0\}$.

ТЕОРЕМА. Существенные спектры операторов H и H_0 совпадают. Абсолютно непрерывные части H и H_0 унитарно эквивалентны (унитарная эквивалентность осуществляется волновыми операторами). Сингулярно непрерывный спектр оператора H пуст. Собственные значения H , не принадлежащие τ , имеют конечную кратность и не имеют (конечных) предельных точек вне τ .

4. Шондин Ю. Г. (Нижний Новгород) “Функция спектрального сдвига для двумерного электрона в присутствии точечных магнитных вихрей”

Функция спектрального сдвига $\xi(\lambda)$ пары операторов $H_{\pm}$ в гамильтониане Паули $H_p = \text{diag}(H_+, H_-)$ в $L_2(\mathbb{R}^2) \otimes C^2$ в случае гладкого, убывающего на бесконечности магнитного поля определяется лишь магнитным потоком ν и равна $\xi = \nu\theta(\lambda)$. Для случая точечных вихрей в рамках теории с.с. расширений мы выбираем в качестве $H_{\pm}$ крайние расширения некоторого симметрического оператора, возникающего из оператора Шрёдингера в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Связь между ними характеризуется через объекты из формулы Крейна для резольвент: Γ -поля $\Gamma(z)$ и Q -функции $Q(z)$. Пусть $\nu > 0$, $L_2 = \oplus H_l$ – парциальное разложение по угловому моменту.

ТЕОРЕМА 1 (дефинитный случай). *Объекты формулы Крейна $\Gamma(z)$, $Q(z)$ и функция $\xi(\lambda)$ – ненулевые, лишь когда ν – нецелое, и равны $\Gamma_l: C^1 \mapsto H_l$, $\Gamma_l(z)c = \{0, l \neq [\nu]; \frac{1}{2}e^{il\varphi}(-z)^{(\nu-[\nu])/2}H_{\nu-[\nu]}(\sqrt{-z}r)c, l = [\nu]\}$, $Q(z) = -(\sin \pi(\nu - [\nu]))^{-1}(-z)^{\nu-[\nu]}$, $\xi = (\nu - [\nu])\theta(\lambda)$, последнее лишь при $0 < \nu < 1$ совпадает с результатом в гладком случае.*

ТЕОРЕМА 2 (индефинитный случай). *При $\nu > 1$ функция $Q(z) = -(\sin \pi\nu)^{-1}(-z)^{\nu} \in N_q(C^1)$, $q = [(\nu + 1)/2]$, и определяет через индефинитный аналог формулы Крейна пару: самосопряженное линейное отношение H_+ и оператор H_- в пространстве Понтрягина $\Pi_q \supset L_2(\mathbb{R}^2)$, с функцией $\xi = \nu\theta(\lambda)$ как в гладком случае.*

В многовихревом случае установлена связь указанных объектов теории расширений с их аналогами из исследования Сато М. и др. по задаче монодромии для уравнения Дирака.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00716).

5. Парновский Л. (Parnovskii L.) (Великобритания, Брайтон) “Ловушечные моды в волноводах”

6. Попов И. Ю. (Санкт-Петербург) “Задача Орра–Зоммерфельда и оператор Шрёдингера”

7. Шкаликов А. А. “Формула индекса неустойчивости для уравнений с диссипацией”

Рассмотрим уравнение

$$(1) \quad A\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) := F\frac{d^2u}{dt^2} + (D + iG)\frac{du}{dt} + Tu = 0$$

и соответствующий ему пучок операторов

$$A(\lambda) = F\lambda^2 + (D + iG)\lambda + T.$$

Здесь F, D, G, T – операторы в гильбертовом пространстве H , для которых выполнены следующие условия: $F = F^*$ – ограничен и ограниченно обратим, $T = T^*$ – ограниченно обратим, D и G – симметрические, T -ограниченные операторы, причем $D \geq 0$.

Если H_{θ} , $\theta \in \mathbb{R}$, – шкала гильбертовых пространств, порожденная оператором $|T|^{1/2}$, то можно показать, что $A(\lambda)$ ограничен как оператор из H_1 в H_{-1} при любом $\lambda \in \mathbb{C}$. Множество $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $A(\lambda)$ не имеет ограниченного обратного в H_{-1} , назовем *обобщенным спектром пучка* $A(\lambda)$. Чисто мнимое число $\mu_k \in i\mathbb{R}$ назовем собственным значением *положительного (смешанного)* типа, если

$$i\mu_k(A'(\mu_k)y, y) > 0 \quad (= 0)$$

для всех $0 \neq y \in \text{Ker } A(\mu_k) \neq \{0\}$ (при некотором $0 \neq y \in \text{Ker } A(\mu_k) \neq \{0\}$). Размерность проектора на отрицательную часть спектра оператора T обозначим через $\nu(T)$.

ТЕОРЕМА 1. Если $\nu(F)$ и $\nu(T)$ конечны, то обобщенный спектр пучка $A(\lambda)$ в правой полуплоскости состоит из конечного числа собственных значений суммарной алгебраической кратности $\varkappa(A)$, причем

$$\varkappa(A) \leq \nu(F) + \nu(T) - \varepsilon^+(A),$$

где $\varepsilon^+(A)$ – число собственных значений $A(\lambda)$ положительного типа. Это неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда нет собственных значений смешанного типа.

ТЕОРЕМА 2. Если $\nu(F)$ и $\nu(T)$ конечны и пучок $A(\lambda)$ имеет $\nu(F) + \nu(T)$ собственных значений положительного типа, то

1) для всех обобщенных решений уравнения (1) при $t > 0$ выполнена оценка

$$\|u'(t)\|_0 + \|u(t)\|_1 \leq C(\|u'(0)\|_0 + \|u(0)\|_1),$$

где $C = \text{const}$ и $\|\cdot\|_\theta$ – норма в H_θ ;

2) существует линеаризация $\mathbf{A}$ пучка $A(\lambda)$ в пространстве $\mathbf{H} = H \times H_1$ такая, что $-\mathbf{A}$ подобен максимально аккретивному оператору в $\mathbf{H}$.

Если выполнено одно из условий:

- (i) спектр $A(\lambda)$ на мнимой оси дискретен;
- (ii) на мнимой оси нет собственных значений смешанного типа,

то индекс неустойчивости (число линейно независимых растущих при $t \rightarrow \infty$ решений) для уравнения (1) не превышает $\nu(F) + \nu(T)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01292).

8. Юркин М. Ю. “О конечномерности задачи о малых колебаниях волчка с полостью, наполненной идеальной жидкостью”

Рассматривается задача о малых колебаниях тяжелого симметричного вращающегося волчка с полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью. В невозмущенном состоянии жидкость имеет распределение скоростей твердого тела, вращающегося вместе с волчком. Оболочка закреплена в точке на оси вращения.

Линейная задача сводится к изучению некоторого пучка ограниченных линейных операторов $L(\lambda) = \lambda J - M$ в гильбертовом пространстве H . В случае осесимметричной полости Ω имеет место разложение $H = \bigoplus_{-\infty}^{+\infty} H_i$, $L(\lambda)H_i \subset H_i$, $i \in \mathbb{Z}$. С.Л. Соболев показал, что для описания движения волчка достаточно исследовать $L(\lambda)|_{H_1}$. Оказывается, что оболочка принимает участие не во всех движениях из H_1 . Указывается минимальное пространство $L \subset H_1$, соответствующее в точности тем движениям системы, в которых принимает участие оболочка. Изучаются случаи, когда L конечномерно.

ТЕОРЕМА. Пусть Ω связна, имеет точки на оси симметрии и $\dim L < \infty$. Тогда Ω – слой между двумя концентрическими подобными эллипсоидами вращения.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Ω гомеоморфна шару и $\dim L < \infty$. Тогда Ω – эллипсоид вращения.

В задаче о малых колебаниях жидкости в неподвижном сосуде относительно состояния равномерного вращения условие $\dim L < \infty$ означает, что только собственные колебания жидкости (т.е. соответствующие точечному спектру задачи) обладают отличным от нуля моментом гидродинамического воздействия на оболочку и таковых конечное число.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00333).

9. Якубов В. Я. “Оценки решения задачи Коши по параметру λ ”

Рассматривается следующая задача Коши для уравнения Штурма–Лиувилля:

$$\begin{aligned} (1) \quad & y'' + \lambda p(x)y = 0 \quad (x > 0), \\ (2) \quad & y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \end{aligned}$$

где λ – числовой параметр, а $p(x)$ – заданная суммируемая при $x > 0$ функция, удовлетворяющая условиям $0 < p_0 \leq p(x) \leq p_1$.

Под решением задачи (1), (2) понимаем функцию $y = y(x, \lambda, p)$, непрерывную вместе со своей первой производной при $x > 0$, удовлетворяющую условиям (2) и почти всюду уравнению (1).

Доказаны четыре теоремы, в последней из которых содержится основной результат.

ТЕОРЕМА 1. При $x \in [0, l]$ и любом λ имеет место оценка

$$|y(x, \lambda, p)| \leq l \exp \left(|\lambda| \int_0^x \int_0^s p(\tau) d\tau ds \right).$$

ТЕОРЕМА 2. Если коэффициент $p(x)$ удовлетворяет также условию

$$\int_0^l |p'(x)| dx = c(p) < +\infty,$$

то при $\lambda > 0$ для решения задачи (1), (2) имеет место оценка

$$(3) \quad |y(x, \lambda, p)| < p_0^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} c(p)} \lambda^{-\frac{1}{2}}.$$

ТЕОРЕМА 3. Оценка (3) при $\lambda > 0$ имеет место и при условии

$$\frac{1}{h} \int_0^l |p(x+h) - p(x)| dx < +\infty$$

для любого достаточно малого $h > 0$.

ТЕОРЕМА 4. Для любого числа m существуют функция $p(x)$ и последовательность чисел $\lambda_n \rightarrow +\infty$ такие, что для соответствующего решения задачи Коши (1), (2) имеют место оценки

$$\sup_x |y(x, \lambda_n, p)| > c(p) \lambda_n^m, \quad n = 1, 2, \dots$$

Вечернее заседание 27 апреля 1996 г., секция 2.

1. Тарасов В. Ф. (Брянск) “Модифицированное уравнение Шрёдингера с двумя “вспомогательными” параметрами”

2. Дымарский Я. М. (Украина, Киев) “О нормированных собственных функциях квазилинейной периодической задачи”

3. Мочидзуки К. (Mochizuki K.) (Япония, Токио) “Временной интервал существования разрушающихся решений одной полулинейной параболической системы”

Рассматривается задача Коши:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta u + v^p, & \partial_t v &= \Delta v + u^q, \\ u(x, 0) &= \lambda^{1/(q+1)} \varphi(x), & v(x, 0) &= \lambda^{1/(p+1)} \psi(x), \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^N$, $q \geq p \geq 1$, $\lambda > 0$, $\varphi(x) \not\equiv 0$ и $\psi(x) \not\equiv 0$ — неотрицательные ограниченные непрерывные функции. Временной интервал существования решения определяется следующим образом:

$$T_\lambda^* = \sup\{T > 0 \mid u(x, t), v(x, t) \text{ ограничены в } \mathbb{R}^N \times [0, T)\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $pq > 1$. Тогда существует такое $\lambda_0 \geq 0$, что $T_\lambda^* < +\infty$ для $\lambda > \lambda_0$ и $T_\lambda^* \sim \lambda^{-1/\gamma}$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, где $\gamma = (p+1)(q+1)/(pq-1)$.

Далее предполагается, что при некотором $a \geq 0$ выполняются соотношения

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{a/(q+1)} \varphi(x) = A > 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{a/(p+1)} \psi(x) = B > 0.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $pq \geq 1 + 2(q+1)/N$ и $0 \leq a < 2\gamma$. Тогда $T_\lambda^* < +\infty$ для любого $\lambda > 0$ и $T_\lambda^* \sim \lambda^{-1/(\gamma-a/2)}$ при $\lambda \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $pq > 1 + 2(q+1)/N$ и $2\gamma < a < N(p+1)$. Тогда существует такое $\lambda_1 > 0$, что $T_\lambda^* = +\infty$ для $\lambda < \lambda_1$ и

$$\|u(\cdot, t)\|_\infty = O(t^{-a/[2(q+1)]}), \quad \|v(\cdot, t)\|_\infty = O(t^{-a/[2(p+1)]}) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Кроме того, если $a > 2(p+1)/(p-1)$, то $t^{a/[2(q+1)]} |u(x, t) - w(x, t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ равномерно на множестве $\{(x, t) \mid |x| < Rt^{1/2}\}$ ($R > 0$), где $w(x, t)$ — решение задачи

$$\partial_t w = \Delta w, \quad w(x, 0) = A(\lambda |x|^{-a})^{1/(q+1)}.$$

Сформулированные результаты получены совместно с К. Хваном (Q. Huang) и К. Мукаи (K. Mukai).

4. Иванов А. В. (Санкт-Петербург) “Оценки градиентов решений параболических уравнений с двойной нелинейностью”

5. Бокало Н. М. (Украина, Львов) “Корректность краевых задач для вырождающихся квазилинейных параболических систем в неограниченных областях без условий на бесконечности”

6. Карсатос А. Г. (Kartsatos A. G.) (США, Тампа) “К теории возмущений максимальных монотонных и m -аккретивных операторов в банаховых пространствах”

7. Максимова Н. О. “Теоремы несуществования для уравнений эллиптического и параболического типов в неограниченных областях”

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ дифференциальное неравенство

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n [a_i(x)u_{x_i}]_{x_i} + F(x, u(x)) \leq 0,$$

где $a_i, a_{ix_i} \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $a_i(x) \geq 0$ почти всюду (кратко: п.в.) в $\mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, n$). Пусть $\Omega_p = \{x : |x| \leq p\}$, $p > 0$. Предположим, что для некоторого $r_0 > 0$ п.в. в Ω_{r_0} выполняются неравенства

$$a_i(x) \geq b_0|x|^l \quad (i = 1, \dots, n), \quad \sum_{i=1}^n a_i(x) \leq b_1|x|^l, \quad \sum_{i=1}^n x_i a_{ix_i}(x) \leq b_2|x|^l,$$

где $b_0, b_1, b_2 = \text{const} > 0$, $l = \text{const} \geq 0$ (для простоты далее $r_0 = 1$); существуют такие $\alpha \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Omega_1)$ и $A \in C(\overline{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_1})$, что $A(x) > 0$, $\alpha(x) \geq 0$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 a_i(x) \geq A(x)\alpha(x)$ п.в. в $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_1$. Кроме того, если $u \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u(x) \geq 0$ п.в. в $\mathbb{R}^n$ и $F(x, u(x)) \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$, то найдутся такие $d_0 = \text{const} > 0$ и $F_1 \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \Omega_1)$, что $F(x, u(x)) \geq [d_0 + 32(b_1 + b_2)^2 b_0^{-1}]|x|^l$ п.в. в Ω_1 , $F(x, u(x)) \geq -\alpha(x)F_1(x)$ п.в. в $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_1$, причем из равенства $\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_1} \alpha(x)u(x) dx = 0$ следует, что $u(x) = 0$ п.в. в $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_1$.

Обобщенное решение (1) в $\mathbb{R}^n$ определяется обычным образом с помощью соответствующего интегрального неравенства, содержащего пробную функцию.

ТЕОРЕМА. Неотрицательное обобщенное решение неравенства (1) в $\mathbb{R}^n$ равно нулю п.в. в $\mathbb{R}^n$.

ПРИМЕР. $a_i(x) \equiv 1$ ($i = 1, \dots, n$), $F(x, u) = c(x)$, где $c \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^n)$, причем $c(x) \geq 32n^2$ п.в. в Ω_{r_0} для некоторого $r_0 > 0$.

Аналогичная теорема справедлива для обобщенных решений неравенств

$$-u_t \geq \sum_{i=1}^n [a_i(x, t)u\varphi(x, t, u)]_{x_i x_i}, \quad u_t \geq \sum_{i=1}^n [a_i(x, t)u\varphi(x, t, u)]_{x_i x_i}$$

в слое $D_T = \mathbb{R}^n \times [0, T]$ ($T > 0$), если $u(x, 0) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^n$; здесь для простоты $a_i \in C(\mathbb{R}^n)$, $a_i(x, t) \geq 0$ в $\mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, n$), $\varphi \in C(D_T \times \mathbb{R}_+)$, $\varphi(x, t, u) \geq 0$ в $D_T \times \mathbb{R}_+$.

8. Галактионов В. А., Посашков С. А. “Точные решения и знаковые инварианты первого порядка квазилинейных уравнений теплопроводности”

Рассматриваются квазилинейное параболическое уравнение

$$(1) \quad v_t = \varphi(v)v_{xx} + m(v)(v_x)^2 + F(v), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

с достаточно гладким нелинейным коэффициентом $\varphi(v) \geq 0$ и квадратичный оператор первого порядка типа Гамильтона–Якоби

$$(2) \quad H(v) \equiv v_t - [m(v)(v_x)^2 + s(v)v_x + M(v)].$$

Предполагается, что множество $\{v(x, t)\}$ гладких, локальных по времени решений уравнения (1) не пусто. Требуется найти условия на коэффициенты (1) и (2), при которых оператор (2) сохраняет свой знак (знаковый инвариант) на решениях уравнения (1): если $H(v) \geq 0$ (≤ 0), $x \in \mathbb{R}$, $t = 0$, то $H(v) \geq 0$ (≤ 0), $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Пусть $g(v) \equiv -s/\varphi$, $G(v) \equiv (F - M)/\varphi$ и $P(v) \equiv \frac{1}{2}av^2 + bv + c$, где a, b, c — произвольные постоянные.

ТЕОРЕМА. Оператор (2) является знаковым инвариантом уравнения (1), если $2Pg'' + 3P'g' - 8P''g = 0$, $2PG'' + 3P'G' - 3P''G = \frac{2}{3}(Pg^2)'$ и $m = P'$, $S' = \frac{2}{3}(P'g + Pg')$, $M = 2PG$.

Данный результат применяется для построения точных решений (в алгебраическом виде или в квадратурах) уравнения (1).

ПРИМЕР. Уравнение $v_t = (v^\sigma v_x)_x + \frac{\sigma+2}{2\sqrt{\sigma}}v^{1-\sigma/2}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, где $\sigma > 0$, имеет точное обобщенное автомодельное решение $v(x, t) \geq 0$:

$$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\sigma}} \frac{v^{\sigma/2}}{t} \right)^{3/2} - \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\sigma}} \frac{v^{\sigma/2}}{t} \right)^{1/2} = -\frac{|x|}{t^{3/2}},$$

которое описывает процесс распространения теплового возмущения по нулевому фону температуры с конечной скоростью.

9. Солтанов К. Н. (Азербайджан, Баку) “Об одном классе эллиптико-параболических уравнений”

Основные результаты опубликованы в [1], [2].

[1] Солтанов К. Н. // Труды ИММ АН Азерб. 1995. Т. 3 (11). С. 31–38.

[2] Солтанов К. Н. // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 4. С. 646–661.

Вечернее заседание 27 апреля 1996 г., секция 3.

1. Браще Й. Ф. (ФРГ, Билефельд), Кошманенко В. Д. (Украина, Киев) “О решении уравнения Липмана–Швингера в теории сингулярных возмущений”

Обозначим через A самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и пусть $\{\mathcal{H}_- \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_+\}$ – его оснащение, ассоциированное с A , т.е. $\mathcal{H}_+ = D(A)$ в норме графика A , а $\mathcal{H}_-$ сопряжено к $\mathcal{H}_+$. Сингулярно возмущенный оператор $\tilde{A}$ формально задан как $\tilde{A} = A + T$, где сингулярный оператор T действует из $\mathcal{H}_+$ в $\mathcal{H}_-$ и имеет свойство: $\text{Ker } T$ плотно в $\mathcal{H}$ (типичными примерами являются операторы Шрёдингера с обобщенными потенциалами, порожденными сингулярными мерами [1]). Точное определение $\tilde{A}$ использует формулу Крейна для резольвент $\tilde{R}_z = (\tilde{A} - z)^{-1} := R_z + \tilde{B}_z^{-1}$, где операторная функция $\tilde{B}_z^{-1}$ однозначно определяется по T (см. [2]).

Предложен стационарный подход к задаче о разложении по обобщенным собственным векторам оператора $\tilde{A}$, которые удовлетворяют уравнению Липмана–Швингера, имеющему вид:

$$\psi_\lambda^\pm = \varphi_\lambda + \lambda A R_\lambda^\pm B^{-1} \psi_\lambda^\pm, \quad B \equiv B_0.$$

Явные решения этого уравнения дает формула

$$\psi_\lambda^\pm = \varphi_\lambda + \lambda A R_\lambda^\pm (B - \lambda A R_\lambda^\pm)^{-1} \varphi_\lambda.$$

Пусть B соответствует сингулярному возмущению вида $T_\varphi = \sum_{k=0}^\infty b_k \langle \varphi, \omega_k \rangle \omega_k$, $\varphi \in \mathcal{H}_+$, $b_k \in \mathbb{R}^1$, где все $\omega_k \in \mathcal{H}_- \setminus \mathcal{H}$ линейно независимы относительно $\mathcal{H}$, $\|\omega_k\|_- = 1$, $\omega_k \perp \omega_j$, $k \neq j$. Пусть коэффициенты b_k таковы, что абсолютно непрерывные спектры операторов A и $\tilde{A}$ совпадают. Тогда обобщенные собственные векторы оператора $\tilde{A}$ имеют вид

$$\psi_\lambda^\pm = \varphi_\lambda + \lambda \sum_{l,k=0}^\infty [b_l - \lambda(\nu_{\lambda,l}^\pm, \eta_k)]^{-1} \langle \varphi_\lambda, \eta_k \rangle \nu_{\lambda,k}^\pm,$$

где $\eta_k = A^{-1} \omega_k$ и $\nu_{\lambda,k}^\pm := R_\lambda^\pm \omega_k$ определены почти для всех λ .

[1] Brasche J. F. Perturbations of self-adjoint operators supported by null sets. Doctor Dissertation. Bielefeld Univ., 1988.

[2] Кошманенко В. Д. Сингулярные билинейные формы и теория возмущений самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1993.

2. Булатов В. В., Владимиров Ю. В., Доброхотов С. Ю. “Траектории точечных особенностей решений квазилинейных уравнений и гипотеза В. П. Маслова о движении “глаза” тайфуна”

Для описания движения мезомасштабных вихрей в атмосфере часто используются уравнения “мелкой воды” с учетом силы Кориолиса: $\eta_t + \nabla(\eta v) = 0$, $v_t + (v \nabla)v - 2\omega T v + \nabla \eta = 0$, где $x \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, $\omega = \text{const}$, T есть (2×2) -матрица поворота на угол $\pi/2$. В. П. Маслов предложил в качестве решений, описывающих уединенные вихри, функции вида

$$\eta = \rho(x, t) + R(x, t)\sqrt{S(x, t)}, \quad v = u(x, t) + U(x, t)\sqrt{S(x, t)},$$

где $S \geq 0$, ρ , R , $u = (u_1, u_2)$, $U = (U_1, U_2)$ – гладкие функции, причем при каждом t $S = 0$ только в одной точке траектории $x = X(t)$, и форма $(y, \text{Hess } S(X(t), t)y)$ положительна и не пропорциональна $y_1^2 + y_2^2$, $y_j = x_j - X_j(t)$.

ТЕОРЕМА. 1) (В. П. Маслов, В. Г. Данилов, В. Н. Жихарев) Если указанное вихревое решение существует, то 1а) оно “заморожено” в поле v , т.е. $\dot{X} = v(X(t), t)$; 1б) на траектории $X(t)$ для комплексной скорости $v_1 + iv_2$ выполнено условие Коши–Римана по переменной $z = x_1 + ix_2$. 2) Построение приближенного решения (v, η) , удовлетворяющего исходной системе с точностью $O(|y|^3)$, и соответствующей траектории X сводится с помощью явных формул к отысканию решений семейства уравнений Хилла

$$z_{\Phi\Phi} + (\Omega^2 + \text{Re}(\alpha_0 \alpha_1 e^{2i\Phi} + 2\overline{\alpha_0 \alpha_1} e^{-2i\Phi} + 2\alpha_1 \alpha_2 e^{i\Phi} - \overline{\alpha_0 \alpha_2} e^{-i\Phi}))z = 0,$$

зависящих от параметров $\Omega \in \mathbb{R}$ и $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^3$. Из этих формул следует, что физически разумное решение, удовлетворяющее неравенствам $0 < c_1 < \eta(X(t), t) < c_2 < \infty$ и устойчивое к возмущениям Ω , α , существует при таких Ω , α , что а) уравнение Хилла устойчиво, б) $\omega \neq 0$.

Соответствующие дифференциальные уравнения для определения $X(t)$ (цепочки типа условий Гюгонио) и библиография приведены в [1].

Изложенные в докладе результаты получены совместно с В. Г. Даниловым.

[1] Булатов В. В., Владимиров Ю. В., Данилов В. Г., Доброхотов С. Ю. // ДАН. 1994. Т. 338. № 1. С. 102–105.

3. Розанова О. С. (Белгород) “О балансе энергии в двумерной модельной системе уравнений динамики бароклинической атмосферы”

Рассматривается задача о вкладе потенциальной и кинетической энергий ($E_{\text{п}}$ и $E_{\text{к}}$) в полную энергию E системы уравнений динамики бароклинической атмосферы при условии постоянства параметра Кориолиса l [1]. Показано, что на гладких финитных решениях при $l \neq 0$ потенциальная энергия допускает следующую оценку

$$0 < E_- \leq E_{\text{п}}(t) \leq E_+ \leq E = \text{const},$$

где E_- и E_+ – зависящие лишь от начальных данных константы. Эта оценка говорит о наличии “недоступной” потенциальной (это согласуется с физическими представлениями), а в некоторых случаях и “недоступной” кинетической энергии. Если $l = 0$, то $E_{\text{п}} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Проанализированы изменения баланса энергии при введении в систему потенциала центробежной силы и “рэлеевского” трения. Показано, что трение увеличивает долю “недоступной” потенциальной энергии, а центробежная сила существенно меняет свойства решений: в частности, при $l^2 < 2\omega^2 \kappa$ (ω – угловая скорость вращения Земли, $\kappa = (2\gamma - 1)/\gamma$, γ – показатель адиабаты) даже в присутствии трения существует “недоступная” кинетическая энергия.

[1] Алишаев Д. М. // Изв. АН СССР. Физ. атмосф. и океана. 1980. Т. 16. № 4. С. 99–107.

4. Чоранеску Д. (Cioranescu D.) (Франция, Париж) “Обобщенные и классические решения для жидкостей второго рода”

5. Рылов А. И. (Новосибирск) “Построение однородных систем уравнений для компонент вектора ускорения и использование их при анализе качественных свойств течений жидкости и газа”

Построено преобразование

$$(1) \quad \alpha = z_\varphi / (\theta_\varphi^2 + k z_\varphi^2), \quad \beta = \theta_\varphi / (\theta_\varphi^2 + k z_\varphi^2),$$

переводящее систему уравнений плоских потенциальных течений газа

$$(2) \quad z_\psi - \theta_\varphi = 0, \quad k z_\varphi + \theta_\psi = 0$$

в следующую однородную систему уравнений газовой динамики, в которой функции α и β с точностью до положительных сомножителей совпадают с компонентами вектора ускорения:

$$(3) \quad \alpha_\varphi - \beta_\psi = 0, \quad \alpha_\psi + k\beta_\varphi = 0.$$

Здесь $z = \int \rho d(\ln q)$, $k = (1 - M^2)/\rho$; q , θ – модуль и угол наклона вектора скорости, ρ – плотность, M – число Маха, φ – потенциал, ψ – функция тока.

Алгоритм преобразования [1] основан на использовании двухпараметрического семейства решений уравнения Чаплыгина и системы (2), которому на плоскости течения отвечает спиральное течение.

В дозвуковых течениях решения системы (3) обладают свойством монотонности, согласно которому каждая из двух функций монотонна вдоль линии уровня другой функции [1].

Отметим, что для несжимаемых течений система Коши–Римана (3) строится и при более простом преобразовании $\alpha = (\ln q)_\varphi$, $\beta = \theta_\varphi$.

Полученные результаты использованы при решении ряда задач механики жидкости и газа.

[1] Рылов А. И. // ПММ. 1995. Т. 59. № 5. С. 758–766.

6. Сейранян А. П. “О границах областей устойчивости, флаттера и дивергенции циркуляционных систем”

Основные результаты доклада опубликованы в [1].

[1] Сейранян А. П. О границах областей устойчивости, флаттера и дивергенции // Препринт № 11–95. Институт механики МГУ, 1995.

7. Хруслев Е. Я. (Украина, Харьков) “О распаде решений уравнений Кадомцева–Петвиашвили на криволинейные солитоны”

Методом Захарова–Шабата строятся специальные решения $u(x, y, t)$ уравнений КП-1 и КП-2:

$$\left(u_t + \frac{3}{2} u u_x + \frac{1}{4} u_{xxx} \right)_x = \alpha \frac{3}{4} u_{yy}$$

($\alpha = 1$ для КП-1, $\alpha = -1$ для КП-2), зависящие от двух функциональных параметров $C(s)$ и $g(s)$ ($s \in \mathbb{R}$). Изучается асимптотическое поведение этих решений при $t \rightarrow \infty$ в окрестности переднего фронта.

Предположим, что $C(s)$ и $g(s)$ – достаточно гладкие положительные функции, где $C'(s) \neq 0$, $C(s) > s^2/3$ и $g(s) \leq A$. Обозначим через $\mu(s) = C'(s)/2$ и $\nu(s) = \sqrt{C(s) + \frac{3}{4}(C'(s))^2 - sC'(s)}$ координаты точек касания семейства гипербол $\nu^2 - 3\mu^2 + 2\mu s = C(s)$ с огибающей $\nu = h(\mu)$. Окрестностями переднего фронта решения называются области

$$G_n(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ x > C(Y) - \frac{1}{2\nu(Y)} \ln t^n, \ |y| < \infty \right\}, \quad \text{где } Y = y/t, \ t > 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

ТЕОРЕМА. Существует решение $u(x, y, t)$ ($(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$) уравнения КП-1, которое в областях $G_n(t)$ описывается асимптотической формулой

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^n 2\nu^2(Y) \operatorname{ch}^{-2} \left[\nu(Y) \left(x - C(Y)t + \frac{1}{2\nu(Y)} \ln \frac{t^{k-1/2}}{g(Y)\varphi_k(Y)} \right) \right] + O(t^{-1/2+\varepsilon}),$$

где $Y = y/t$, $\varepsilon > 0$, а функции $\varphi_k(Y) > 0$ явно выражаются через $\mu(Y)$, $\nu(Y)$, $h(\mu(Y))$.

Аналогичный результат справедлив и для уравнения КП-2.

Утреннее заседание 28 апреля 1996 г., секция 1.

1. Космодемьянский А. А. “О положении точки максимума решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона”

Пусть $u(x, y)$ – решение задачи Дирихле для уравнения $\Delta u = -1$ в плоской выпуклой области D , равное нулю на ее границе Γ .

В работе [1] доказано, что функция u имеет в области D ровно один максимум, а ее линии уровня суть выпуклые кривые. Положение точки этого единственного максимума внутри области важно для приложений (теория упругости, гидродинамика). Получены оценки расстояния от точки M максимума функции u до границы Γ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть d – расстояние от точки M до какой-нибудь опорной прямой области D , а R – радиус наибольшего круга, который можно вписать в область D . Тогда

$$(1) \quad d \geq \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

С помощью метода отражений [2] получена

ТЕОРЕМА 2. Пусть граница Γ области D принадлежит классу $C^{2,\alpha}$ и K_M – наибольшая кривизна кривой Γ . Тогда

$$(2) \quad \rho \geq \frac{1}{K_M},$$

где ρ – расстояние от точки M до границы Γ .

Неравенство (2) превращается в равенство, если область D – круг.

[1] Макара-Лиманов Л. Г. // Матем. заметки. 1971. Т. 9. № 1. С. 89–92.

[2] Gidas B., Ni L. M., Nirenberg L. // Comm. Math. Phys. 1979. V. 68. P. 209–243.

2. Верон Л. (Véron L.) (Франция, Тур) “Граничные следы решений некоторых нелинейных эллиптических уравнений”

Согласно классической теореме Фату любая положительная гармоническая функция u , определенная в единичном шаре B пространства $\mathbb{R}^n$, обладает пределами по некасательным направлениям почти всюду на ∂B . Кроме того, она имеет своим пределом на ∂B некоторую неотрицательную меру Радона. Этот результат был распространен Дубом (Doob) на неотрицательные супергармонические функции. Настоящий доклад посвящен граничным следам положительных решений уравнения

$$(1) \quad -\Delta u + u^q = 0 \quad \text{в } B,$$

где $q > 1$.

ТЕОРЕМА 1. Если $\omega \in \partial B$, то имеет место следующая альтернатива: либо (а) для любой относительной окрестности U точки ω на ∂B справедливо соотношение

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_U u(r, \sigma) d\sigma = +\infty,$$

либо (б) существует такая относительная окрестность U точки ω на ∂B , что для всякой функции $\zeta \in C_0^\infty(U)$ выполняется равенство

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_U u(r, \sigma) \zeta(\sigma) d\sigma = l(\zeta),$$

где l – некоторый положительный линейный функционал на $C_0^\infty(U)$.

Этот результат позволяет определить сингулярную часть граничного следа u на ∂B как замыкание множества S точек ω , удовлетворяющих (а), и регулярную часть с помощью меры μ , которая локально задается на $\partial B \setminus S$ функционалом l . Пара (S, μ) называется граничным следом u .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < q < (n+1)/(n-1)$, S – замкнутое подмножество ∂B , μ – неотрицательная мера Радона на $\partial B \setminus S$. Тогда существует единственное положительное решение u уравнения (1) в B с граничным следом (S, μ) .

В случае $q \geq (n+1)/(n-1)$ результаты о существовании положительного решения u уравнения (1) с граничным следом (S, μ) получены при предположении, что S и μ удовлетворяют некоторым условиям допустимости и совместности.

Рассмотрена также проблема начальных следов для положительных решений нелинейного параболического уравнения

$$\partial u / \partial t - \Delta u + u^q = 0$$

в цилиндре вида $\Omega \times (0, T)$, где $q > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

3. Похожаев С. И. “Метод расслоения в нелинейных вариационных задачах”

Пусть X и Y – банаховы пространства и A – оператор (в общем случае нелинейный), действующий из X в Y . Рассматривается уравнение $A(x) = y$.

Метод расслоения, предложенный автором [1], [2], основан на двух идеях. Первая – это расширение $\tilde{A} \supset A$ исходного нелинейного оператора, связанное с расширениями $\tilde{X} \supset X$, $\tilde{Y} \supset Y$ исходных пространств. Вторая – это оснащение нового, более широкого пространства $\tilde{Y}$ “нелинейной” структурой, ассоциированной с исходным нелинейным оператором $A = \tilde{A}|_X$. В итоге мы исследуем новое расширенное нелинейное уравнение $\tilde{A}(\tilde{x}) = \tilde{y}$ в новом пространстве $\tilde{X}$, наделенном “нелинейной” структурой, порожденной исходным оператором A .

В докладе рассказано об использовании этого подхода при изучении ряда суперлинейных антикоэрцитивных краевых задач. В частности, на основе совместной работы автора и П. Драбека [3] изложено применение этого метода к следующей задаче:

$$\Delta_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u + f(x)|u|^{\gamma-2}u \quad \text{в } \Omega \subset \mathbb{R}^N,$$

$u = 0$ на $\partial\Omega$, где $\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p > 1$. При определенных (естественных) предположениях о данных задачи получено обобщение известного результата С. Алама и Г. Тарантелло, установленного в 1993 г. для случая $p = 2$.

[1] Похожаев С. И. // ДАН СССР. 1979. Т. 247. № 6. С. 1327–1331.

[2] Похожаев С. И. // Труды МИАН. 1990. Т. 192. С. 146–163.

[3] Drabek P., Pokhozhaev S. Positive solutions for the p -Laplacian: application of the fibering method // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1996 (to appear).

4. Гущин А. К., Михайлов В. П. “Оценки решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”

Исследуется поведение вблизи границы ∂Q , Q – ограниченная область $\mathbb{R}_n$, дифференциальных характеристик решения u задачи Дирихле с граничной функцией $u_0 = u|_{\partial Q}$ из $L_2(\partial Q)$ для однородного линейного уравнения второго порядка с измеримыми и ограниченными коэффициентами. Мы ограничиваемся рассмотрением уравнения в самосопряженной форме без младших членов и предполагаем выполненными условия гладкости границы и коэффициентов на ней, гарантирующие принадлежность решения пространству $(n-1)$ -мерно непрерывных функций (см. [1]).

Вводится семейство сужающихся при возрастании параметра $\alpha > 0$ пространств $C_{n-1}^\alpha(\overline{Q})$, отражающих как внутреннюю гладкость решений (порядок гладкости характеризуется индексом α), так и поведение вблизи границы самого решения (например, принятие им граничного значения) и его дифференциальных характеристик. В частности, при достаточно малых значениях α решение рассматриваемой задачи удовлетворяет оценке

$$\frac{1}{\|\varphi'\| + \|\varphi''\|} \iint_{Q \times \overline{Q}} r^{2\alpha}(x, y) \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{2\alpha}} d\varphi(x, y) \leq \operatorname{const} \|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2,$$

где $r(x, y) = \text{dist}[(x, y), \partial(Q \times Q)]$, а φ – мера в $\mathbb{R}_{2n}$ с носителем в $\overline{Q} \times \overline{Q}$, проекции которой на пространство первых n переменных (x -ов) и на пространство последних n переменных (y -ов) являются мерами Карлесона (см. [2]), $\|\varphi'\|$ и $\|\varphi''\|$ – их нормы.

[1] Гушин А. К. // Матем. сб. 1988. Т. 137 (179). № 1. С. 19–64.

[2] Гушин А. К., Михайлов В. П. // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 1. С. 121–160.

5. Ибрагимов А. И., Ландис Е. М. “О задаче Зарембы”

Рассматривается задача Зарембы в области $G \subset \mathbb{R}^n$ для эллиптического уравнения второго порядка в дивергентной форме с гладкими коэффициентами. На части Γ_1 границы области G задано значение $f(x)$ решения $u(x)$, а на части $\Gamma_2 = \partial G \setminus \Gamma_1$ выполнено однородное условие Неймана. Мы будем исследовать поведение решения вблизи граничной точки x^0 , являющейся точкой “стыка” Γ_1 и Γ_2 , и на бесконечности в неограниченных областях в предположении, что Γ_2 – локально гладкая поверхность.

1°. Пусть G – ограниченная область и $0 \in \Gamma_1 \cap \overline{\Gamma_2}$. Под решением задачи Зарембы будем понимать классическое решение типа Винера. Скажем, что ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет изопериметрическому неравенству, если существует положительная постоянная L такая, что для любой собственной подобласти $A \subset \Omega$ с измеримой границей выполняется условие $\mu_{n-1}(\partial A \cap \Omega) \geq L \min\{\mu_n A, \mu_n(\Omega \setminus A)\}^{(n-1)/n}$. Пусть $\tau_j \downarrow 0$. Обозначим $G_j = G \cap B_j$, $B_j = \{\tau_{j+1} < |x| < \tau_j\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G_j удовлетворяет изопериметрическому неравенству с общей для всех j постоянной L . Тогда для того чтобы точка 0 была регулярной для задачи Зарембы, необходимо и достаточно, чтобы $\sum \text{cap}(\Gamma_1 \cap \overline{B_j}) / \text{cap } \overline{G_j} = \infty$.

2°. Пусть G – неограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что область G связна и $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = f_0 = \text{const}$. Пусть G_j удовлетворяет изопериметрическому неравенству с постоянной, не зависящей от j .

ТЕОРЕМА 2. Если ряд $\sum \text{cap}(\Gamma_1 \cap \overline{B_j}) / \text{cap}(\overline{G_j})$ расходится, то существует единственное ограниченное решение $u_0(x)$ задачи Зарембы и $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_0(x) = f_0$. Если же этот ряд сходится, то ограниченное решение задачи Зарембы, вообще говоря, неединственно, хотя вышеуказанный предел может существовать.

6. Скрышник И. В. (Украина, Донецк) “Поточечные оценки потенциалов для емкости высокого порядка”

Пусть Ω и E – открытое и замкнутое множества в $\mathbb{R}^n$ такие, что с некоторыми положительными числами d, R справедливы включения $E \subset B(d) \subset B(1) \subset B(2) \subset \Omega \subset B(R)$, где $B(r)$ – шар радиуса r с центром в нуле. Определим при $p, q > 1$ и целом числе $m \geq 2$ емкость $C_{p,q}^{m,1}(E, \Omega)$ множества E относительно Ω равенством

$$C_{p,q}^{m,1}(E, \Omega) = \inf_{\varphi \in \Phi} F(\varphi), \quad F(\varphi) = \int_{\Omega} \{|D^m \varphi(x)|^p + |D^1 \varphi(x)|^q\} dx,$$

где Φ – множество функций $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, равных единице на E . Пусть $\overline{\Phi}$ – замыкание множества Φ в норме $W_p^m(\Omega) \cap W_q^1(\Omega)$.

ТЕОРЕМА. Пусть $n > q > tp$ и $u(x)$ – функция, минимизирующая функционал F на множестве $\overline{\Phi}$. Существуют положительные постоянные C, δ , зависящие лишь от n, m, p, q, R , такие, что при $|x| \geq 2d$ справедлива оценка

$$(1) \quad |u(x)| \leq C \left\{ [C_{p,q}^{m,1}(E)] |x|^{q-n} \right\}^{\frac{1}{q-1}} + |x|^\delta.$$

Оценка вида (1) доказана также для принадлежащего $\overline{\Phi}$ решения уравнения

$$\sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, u(x), \dots, D^m u(x)) = 0, \quad x \in \Omega \setminus E,$$

при условии

$$\sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} A_\alpha(x, \xi) \xi_\alpha \geq \nu \left\{ \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^p + \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q \right\}$$

и соответствующих условиях роста (см. [1]).

Доказанные поточечные оценки являются ключевыми при изучении локального поведения сингулярных решений, регулярности граничных точек, асимптотического поведения решений в перфорированных областях.

[1] Скрыпник И. В. // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 6. С. 1104–1119.

7. Кузин И. А. “О квазилинейных эллиптических уравнениях с суперкритическим показателем нелинейности”

8. Райтум У. Е. (Латвия, Рига) “К замыканию графиков семейства эллиптических операторов”

9. Бондаренко Н. П. “О самосопряженности минимального оператора, порожденного дифференциально-операторным выражением типа Штурма–Лиувилля с вырождением”

Рассмотрим дифференциально-операторное выражение вида

$$(1) \quad l[y](t) = \rho^{-1}(t)[-y''(t) + A^2 y(t)],$$

где A – самосопряженный полуограниченный снизу оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H , $\rho(t)$ – непрерывная, положительная на $(0, b)$ функция. Выражение (1) на множестве D'_0 элементов вида

$$y_m(t) = \sum_{k=1}^m \varphi_k(t) f_k \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

где $f_k \in D(A^2)$ ($D(\cdot)$ – область определения оператора), $\varphi_k(t) \in C_0^\infty(0, b)$ ($C_0^\infty(0, b)$ – множество финитных бесконечно дифференцируемых на $(0, b)$ функций) определяет оператор L'_0 : $L'_0 y = l[y](t)$. Множество D'_0 плотно в $L_2(H, (0, b), \rho(t))$ – гильбертовом пространстве вектор-функций $y(t) \in H$, $t \in (0, b)$, таких, что

$$\int_0^b \|y(t)\|^2 \rho(t) dt < \infty.$$

Оператор L'_0 эрмитов в пространстве $L_2(H, (0, b), \rho(t))$. Замыкание L_0 оператора L'_0 в пространстве $L_2(H, (0, b), \rho(t))$ называется минимальным оператором, порожденным выражением (1).

ТЕОРЕМА. Если $\int_0^\varepsilon \rho(t) dt = \infty$ и $\int_{b-\varepsilon}^b \rho(t) dt = \infty$ ($0 < \varepsilon < b/2$), то минимальный оператор L_0 самосопряжен.

Утреннее заседание 28 апреля 1996 г., секция 2.

1. Амосов А. А., Злотник А. А. “Обоснование квазиусредненных уравнений движения вязких сжимаемых сред с быстроосциллирующими свойствами”

Содержание доклада опубликовано в работах [1]–[6].

[1] Амосов А. А., Злотник А. А. // Вестник МЭИ. 1994. № 4. С. 7–24.

[2] Амосов А. А., Злотник А. А. // Дифф. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1123–1131.

[3] Амосов А. А., Злотник А. А. // ДАН. 1995. Т. 342. № 3. С. 295–299.

[4] Амосов А. А., Злотник А. А. // ДАН. 1996. Т. 346. № 2. С. 151–154.

[5] Амосов А. А., Злотник А. А. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 2. С. 87–110.

[6] Амосов А. А., Злотник А. А. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 10.

2. Аверьянов А. Н. “Осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости в длинном цилиндрическом канале со вдувом (отсосом) потока на боковой поверхности”

В цилиндре Q_ε единичной высоты и радиуса ε ($\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$) рассмотрим уравнения Навье–Стокса с осесимметричным условием Дирихле, записанные в цилиндрических координатах:

$$(1) \quad \begin{cases} u_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial z} + v_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} = -\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z^2} + \Delta_r u_\varepsilon \right), \\ u_\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial z} + v_\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} = -\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial z^2} + \Delta_r v_\varepsilon - r^{-2} v_\varepsilon \right), \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial z} + r^{-1} \frac{\partial(v_\varepsilon r)}{\partial r} = 0, \\ u_\varepsilon|_{z=0} = u_\varepsilon|_{z=1} = v_\varepsilon|_{z=0} = v_\varepsilon|_{z=1} = 0, \\ u_\varepsilon|_{r=\varepsilon} = 0, \quad v_\varepsilon|_{r=\varepsilon} = \varepsilon \varphi(z), \\ \varphi(z) \in C^\infty([0, 1]), \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad \int_0^1 \varphi(z) dz = 0. \end{cases}$$

Здесь r, z – радиальная и осевая координаты, соответственно,

$$\Delta_r \equiv r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \text{ – радиальный оператор Лапласа,}$$

$u_\varepsilon(r, z), v_\varepsilon(r, z)$ – осевая и радиальная компоненты скорости.

Задача (1) описывает высокотемпературное течение парового потока в цилиндрическом канале длинной тепловой трубы.

Положим

$$\begin{aligned} u_0(r, z) &= 4 \left(\left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^2 - 1 \right) \int_0^z \varphi(t) dt, \quad v_0(r, z) = \varepsilon \varphi(z) \left(2 \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) - \left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^3 \right), \\ p_0(r, z) &= 16\nu\varepsilon^{-2} \int_0^z \left(\int_0^\alpha \varphi(t) dt \right) d\alpha - 4\nu\varphi(z) \left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^2. \end{aligned}$$

Справедлива теорема об асимптотической сходимости:

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{H_1(Q_\varepsilon)} + \|v_\varepsilon - v_0\|_{H_1(Q_\varepsilon)} + \varepsilon \|p_\varepsilon - p_0\|_{L_2(Q_\varepsilon)/\mathbb{R}} = O(\varepsilon^2).$$

3. Пастухова С. Е. “Об одной задаче теории упругости для периодически перфорированного тела”

Пусть Ω, ω – гладкие области в $\mathbb{R}^3$, ω неограничена с 1-периодической структурой, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\partial\Omega = \Gamma$; если $\varepsilon \in (0, 1)$, то $\varepsilon\omega = \{x : \varepsilon^{-1}x \in \omega\}$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\omega$, $S_\varepsilon = (\partial\Omega_\varepsilon) \cap \Omega$, $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cap \varepsilon\omega$, $K = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_i < 1, i = 1, 2, 3\}$, $P = K \cap \omega$, $S = \partial\omega \cap \bar{K}$, при этом $S \cap \partial K = \emptyset$; $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – вектор единичной внешней нормали к S_ε . Далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 3, а все индексы, обозначаемые через i, j, l, m , принимают значения 1, 2, 3, векторные величины из $\mathbb{R}^3$ обозначаем жирным шрифтом. Для произвольного вектора $\mathbf{v}(x) \in \mathbb{R}^3$ и тензора $g_{ij}(x)$ имеют место разложения при $x \in S_\varepsilon$: $\mathbf{v} = v_N \mathbf{n} + \mathbf{v}_T$, $g_{ij} n_j = g_{iT} + g_{Nn_i}$, где $\mathbf{v}_T, \mathbf{g}_T \perp \mathbf{n}$ и вектор $\mathbf{g}_T$ имеет компоненты g_{iT} . Для $\mathbf{u}$ определим тензоры $e(\mathbf{u})$ и $\sigma^\varepsilon(\mathbf{u})$ с компонентами $e_{ij} = 1/2(\partial u_j / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_j)$, $\sigma_{ij}^\varepsilon = a_{ijml}^\varepsilon(x) e_{ml}$, соответственно, где $a_{ijml}^\varepsilon(x) = a_{ijml}(x/\varepsilon)$ и $a_{ijml}(y)$ – гладкие 1-периодические функции, удовлетворяющие стандартным требованиям симметричности и положительной определенности для коэффициентов упругости. Решение следующей смешанной задачи теории упругости в Ω_ε с $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega_\varepsilon)$, $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon)$ будем рассматривать в обобщенном смысле:

$$(1_d) \quad -\frac{\partial \sigma_{ij}^\varepsilon(\mathbf{u})}{\partial x_i} = F_j \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad B_d(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{на } S_\varepsilon, \quad \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon, \quad d = 1, 2,$$

где $B_d(\mathbf{u}) = 0$ означает: $\sigma_T^\varepsilon = 0$, $\sigma_N^\varepsilon + k u_N = 0$ при $d = 1$, $\sigma_T^\varepsilon = 0$, $u_N = 0$ при $d = 2$, где $k = \text{const} > 0$.

ТЕОРЕМА 1. При достаточно малых ε задача (1_d), $d = 1, 2$, имеет единственное решение $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon)$. Если $\mathbf{F} = 0$, то для любой области Ω' такой, что $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, имеет место оценка: $|\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(\Omega' \cap \Omega_\varepsilon)} \leq C_1 \exp(-\gamma/\varepsilon^{r_d}) |\mathbf{f}|_{\mathbf{H}^1(\Omega_\varepsilon)}$, где $r_d = 1/2$, если $d = 1$, и $r_d = 1$, если $d = 2$; здесь $\gamma, C_1 = \text{const} > 0$ не зависят от ε .

4. Сандраков Г. В. “Диффузия в сильно неоднородной периодической среде”

Пусть Ω – ограниченная подобласть $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей и положительное T фиксировано. В области $\Omega \times (0, T)$ рассматривается задача:

$$(1) \quad u_t' - \text{div } A(\nabla u + g) = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi,$$

зависящая от двух малых положительных параметров ε и σ следующим образом. Пусть Ω_ε^1 – связанная перфорированная область типа I с периодической структурой [1], получаемая из Ω ; $\Omega_\varepsilon^0 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon^1$. Тогда $\Omega = \Omega_\varepsilon^1 \cup S_\varepsilon \cup \Omega_\varepsilon^0$ и имеется соответствующее разбиение единичной ячейки периодичности: $Y = Y^1 \cup S \cup Y^0$. Предполагается, что матрица $A = A^1(x/\varepsilon)$ в Ω_ε^1 и $A = \sigma A^0(x/\varepsilon)$ в Ω_ε^0 . Здесь A^1 и A^0 – эллиптические ε -периодические матрицы с константами эллиптичности, не зависящими от ε и σ . Предполагается также, что g, f и φ являются гладкими и финитными в Ω функциями, не зависящими от ε и σ .

Исследуется поведение решения задачи (1) при ε и σ , стремящихся к нулю. Это решение u приближается решением осредненной задачи:

$$(2) \quad M v_t' - \text{div } \hat{A}(\nabla v + g) = M f, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{t=0} = \varphi \quad (M = \text{const}).$$

Матрица $\hat{A}$ вычисляется по матрице $A^1(x/\varepsilon)$, как и для задачи Неймана в области Ω_ε^1 (см. [1]). Наличие второго параметра σ и его порядок в сравнении с ε^2 влияет на вычисление M . Далее C – постоянные, не зависящие от ε и σ .

ТЕОРЕМА. (а) Пусть $\varepsilon^2/\sigma \rightarrow 0$ и $M = 1$ в (2). Тогда выполнено неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u - v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\varepsilon + \sigma + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \right).$$

(b) Пусть $\sigma/\varepsilon^2 \rightarrow 0$ и M в (2) равно мере Лебега области Y^1 . Тогда

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| u - \chi_1 v - \chi_0 \varphi - \chi_0 \int_0^t f \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\varepsilon + \sigma + \frac{\sqrt{\sigma}}{\varepsilon} \right).$$

Здесь χ_1, χ_0 – характеристические функции областей $\Omega_\varepsilon^1, \Omega_\varepsilon^0$, и $N_\varepsilon = N(x/\varepsilon, t)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01394).

[1] Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.

5. Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. “Эффективные вычисления характеристик композитов, армированных системой криволинейных неоднородных волокон”

6. Беляев А. Ю. “О протекании жидкости сквозь сито случайной структуры”

Пусть имеется перфорированная область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Рассматривается вариационная задача

$$J(\lambda) = \inf \left\{ \int_{\Omega} [(1 + |\nabla Z|)^{1/2} - \lambda Z] dx : Z \in C_0^\infty(\Omega) \right\},$$

в которой $\lambda > 0$ – заданная константа. Физическая интерпретация этой задачи при $d = 2$ связана с процессом инфильтрации несмачивающей жидкости в пористый материал, поры которого первоначально заполнены воздухом. Область Ω моделирует поверхность этого материала, а константа λ обозначает разницу давлений в жидкости и воздухе. Проникновению жидкости в пористую среду препятствуют силы поверхностного натяжения, и минимизант задачи $z = Z(x)$, если он существует, описывает равновесную форму границы раздела фаз.

При значениях параметра λ , превышающих некоторое критическое число $\lambda^* = \lambda^*(\Omega)$, величина $J(\lambda)$ обращается в $-\infty$. Физически это означает, что при $\lambda > \lambda^*$ сил поверхностного натяжения не хватает для удержания жидкости, и она начинает проникать внутрь пористой среды.

Представляет интерес асимптотика критического перепада давлений для перфорированных областей, являющихся объединением большого числа хаотически расположенных “дырок”. С этой целью рассматривается конкретный пример такой области – случайная шахматная доска. Эта область строится следующим образом. Пусть имеется большой квадрат размера $L \times L$, разбитый на единичные клетки. Каждая клетка независимо от остальных с вероятностью p остается на своем месте, либо с дополнительной вероятностью $1 - p$ исключается. Область $\Omega = \Omega_L \subset \mathbb{R}^2$ – это объединение всех оставленных клеток.

Для асимптотики $\lambda^*(\Omega_L)$ при $L \rightarrow \infty$ справедлив следующий результат:

$$\lambda^* \sim \lambda_d \left(\frac{\log 1/p}{d \log L} \right)^{1/d}, \quad \lambda_d \equiv d \sqrt{\pi} (\Gamma(1 + d/2))^{-1/d}.$$

Здесь символ $\sim$ обозначает эквивалентность в смысле сходимости по вероятности. Методика доказательства опирается на результаты недавних исследований спектральных свойств эллиптических операторов в случайных перфорированных областях, опубликованных в работе [1].

[1] Beliaev A. Yu., Yurinsky V. V. // Siberian Adv. Math. 1996. V. 5. P. 113–150.

7. Иосифьян Г. А. “О некоторых нелинейных задачах теории усреднения в перфорированных областях”

Пусть Ω^ε – перфорированная область вида $\Omega \cap \varepsilon\omega$, где Ω – гладкая ограниченная область; ω – гладкая бесконечная область с 1-периодической структурой. Рассматривается линейное эллиптическое уравнение второго порядка $L_\varepsilon(u^\varepsilon) = f$ в Ω^ε с ε -периодическими коэффициентами; задаются краевые условия: $u^\varepsilon = 0$ на внешней части границы, $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega \cap \partial\Omega^\varepsilon$, и $\partial u^\varepsilon / \partial \nu = -g_\varepsilon(x, \varepsilon^{-1}x, u^\varepsilon)$ на границе полостей $S^\varepsilon = \Omega \cap \partial\Omega^\varepsilon$. Строятся усредненные задачи при различных g_ε и изучается асимптотика решений при $\varepsilon \rightarrow 0$. В частности, если $g_\varepsilon(x, \xi, \eta) = g(\eta)$ и $g(\eta)$ – строго монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условию Липшица при всех η , $g(0) = 0$, то $\|u^\varepsilon\| \leq c\sqrt{\varepsilon}$. Если $g_\varepsilon = \theta(\eta)g(\eta)$, где $g(\eta)$ – как в предыдущем случае, а $\theta(\eta)$ – функция Хевисайда, то u^ε близко к решению u^0 усредненной задачи, которая имеет вид вариационного неравенства на функциях ≤ 0 и, фактически, является задачей со свободной границей. Если $g_\varepsilon = \varepsilon g(\eta)$ и $g(\eta)$ – неубывающая липшицева функция, то u^ε близко к решению усредненной задачи $\widehat{L}(u^0) - \gamma g(u^0) = f$ в Ω , $u^0 = 0$ на $\partial\Omega$, где $\gamma > 0$ – постоянная, зависящая от геометрии области ω ; $\widehat{L}$ – обычный усредненный оператор.

Аналогичные задачи изучаются для системы теории упругости. В частности, если на границе полостей S^ε напряжения имеют вид

$$\sigma_\varepsilon(u^\varepsilon) = -(B(x, \varepsilon^{-1}x) + \varepsilon C(x, \varepsilon^{-1}x))u^\varepsilon,$$

где $B(x, \xi) \geq 0$ и $C(x, \xi) \geq 0$ – $(n \times n)$ -матрицы, 1-периодические по ξ , $\text{rank } B = n - m$, то усредненная задача сводится к эллиптической системе m уравнений для m неизвестных функций.

Утреннее заседание 28 апреля 1996 г., секция 3.

1. Чалдеа Б. (Cialdea B.) (Италия, Рим) “Теорема братьев Рисс для дифференциальных форм”

2. Назайкинский В. Е. “Униформизация Лере для переопределенных систем”

Доказана локальная теорема существования и единственности решения в задаче Коши для переопределенной системы дифференциальных уравнений на комплексном многообразии в классе ветвящихся аналитических функций.

Пусть X – комплексное многообразие, $\mathcal{M}$ – левый когерентный $\mathcal{O}_X$ -модуль с простыми характеристиками, $Y \in X$ – комплексное подмногообразие коразмерности k , $x_0 \in X$ – заданная точка. Предполагается, что многообразие Y не является целиком характеристическим, а точка x_0 – характеристическая, т.е. над ней имеются точки пересечения $C = N^*Y \cap \text{char}(\mathcal{M})$. Рассматривается задача Коши для системы $\mathcal{M}$ на Y в окрестности точки x_0 . Предполагается, что характеристическое множество $\text{char}(\mathcal{M})$ – подмногообразие в T^*X той же коразмерности, что и Y в X , трансверсальное к N^*Y , причем ранг проекции на X их пересечения C максимален; в этом случае проекция Z множества C на X является гладким подмногообразием коразмерности 1 в Y . Предполагается также, что касательные плоскости к бихарактеристическим листам $\text{char}(\mathcal{M})$ в точках множества C однозначно проектируются на X , причем их проекции не содержат ненулевых векторов, касательных к Z . На $\mathcal{M}$ налагаются также некоторые аналитические условия, связанные со структурой скаляризаторов некоторого 1-представления модуля $\mathcal{M}$. При этих условиях построена всюду когерентная на Y система $\widetilde{\mathcal{M}}_Y$, изоморфная $\mathcal{M}_Y$ вне характеристических точек, и доказан изоморфизм $\mathcal{R} \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\widetilde{\mathcal{M}}_Y, \mathcal{O}_{Y,Z}^{\text{ram}}) \simeq f^{-1} \mathcal{R} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{Y, \text{cone}(Z)}^{\text{ram}})$ пучков решений “регуляризованной” индуцированной системы $\widetilde{\mathcal{M}}_Y$ и системы $\mathcal{M}$, соответственно, в классах ветвящихся аналитических функций $\mathcal{O}_{Y,Z}^{\text{ram}}$ (аналитические функции на Y , ветвящиеся вокруг множества Z характеристических точек начального многообразия Y) и $\mathcal{O}_{X, \text{cone}(Z)}^{\text{ram}}$ (аналитические функции на X , ветвящиеся вокруг характеристического конуса $\text{cone}(Z)$ множества Z).

3. Булинский А. В. “Динамика открытых квантовых систем в марковском приближении и некоммутативные формы Дирихле”

Марковский режим отвечает описанию динамики открытых систем в терминах непрерывной однопараметрической полугруппы $(\tau_t)_{t \geq 0}$ вполне положительных отображений некоммутативной операторной алгебры $\mathcal{M}$. Для W^* -алгебры $\mathcal{M}$ мы изучаем динамики со стационарным точным нормальным состоянием ω на $\mathcal{M}$. Самосопряженные относительно ω полугруппы определяют самосопряженные полугруппы сжатий в гильбертовом пространстве $L^2(\mathcal{M}, \omega)$, в котором среди неотрицательных плотно определенных квадратичных форм выделяется класс форм Дирихле, взаимно однозначно соответствующих полугруппам L^2 -самосопряженных марковских операторов. Для упомянутых динамических полугрупп, определяемых форм-генераторами, исследуется асимптотика орбит при больших временах. Установлены эргодические теоремы, которые иллюстрируются модельными примерами квазисвободной динамики на C^* -алгебре канонических антикоммутирующих соотношений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Госкомитета РФ по высшему образованию (грант 96-1.7.100).

[1] Булинский А. В. // Функци. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. № 2. С. 64–67.

[2] Albeverio S., Hoegh-Krohn R. // Comm. Math. Phys. 1977. V. 56. P. 173–187.

[3] Goldstein S., Lindsay J. M. // Math. Z. 1995. V. 219. P. 591–608.

4. Закалюкин В. М. “Лагранжевы отображения в дифференциальной геометрии”

Рассмотрим устойчивый росток каустики лагранжева отображения.

ТЕОРЕМА 1. *Раздутие Нэша такого роста является неособым проективным подмногообразием проективизации кокасательного расслоения базы лагранжевой проекции.*

ТЕОРЕМА 2. *Подмножества параболических точек устойчивых простых ростков каустик, вложенных общим образом в аффинное пространство, имеют, при раздутии Нэша, кратность $\mu - 1$ пересечения с исключительным дивизором. Здесь μ – число Милнора лагранжевой особенности.*

Эта теорема обобщает известный факт [2], что через критическую точку фокального множества каустики гиперповерхности в $\mathbb{R}^3$ в общем положении проходят либо одна, либо три линии параболических точек, если эта критическая точка отвечает омбилической точке поверхности.

Рассмотрим точное лагранжево вложение цилиндра $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ в $T^*\mathbb{R}^n$, близкое к стандартному лагранжеву коллапсу [1]. Примером таких вложений служит лагранжево подмногообразие единичных нормалей к выпуклым гиперповерхностям в $\mathbb{R}^n$. Такой лагранжев цилиндр расслоен на характеристики выпуклого по импульсам гамильтониана.

ТЕОРЕМА 3. *При естественном выборе нулевого сечения такого расслоения точки пересечения общего слоя с прообразами каустики и страта Максвелла перемежаются. При этом пары индексов Маслова точек прообраза страта Максвелла состоят из совпадающих между собой чисел.*

ТЕОРЕМА 4. *Существует ориентация прообраза каустики и страта Максвелла, при которой их объединение гомологично нулевому сечению.*

ТЕОРЕМА 5. *Многозначное отображение, сопоставляющее точке гиперповерхности евклидова пространства направления главных кривизн, имеет в общем положении стандартные лагранжевы особенности.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00710) и ИНТАС (грант 4373).

[1] Арнольд В. И. // Труды МИАН. 1995. Т. 209. С. 14–64.

[2] Bruce J. W., Fidal D. L. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A. 1989. V. 11. P. 147–168.

5. Макаров Е. К. (Белоруссия, Минск) “О неограниченности собственно характеристических множеств решений линейных многомерных уравнений”

Рассматривается линейное вполне интегрируемое уравнение

$$(1) \quad y'h = A(x)hy, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad x \in U, \quad h \in \mathbb{R}^m,$$

где $U \subset \mathbb{R}^m$ открыто и содержит некоторый выпуклый выступающий телесный конус $K \subset \mathbb{R}^m$, $A: U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^m))$ – ограниченная непрерывная оператор-функция. Подмножество собственно характеристических функционалов $\mathcal{P}[y, K]$ в множестве характеристических функционалов $\mathcal{M}[y, K]$ любого решения y уравнения (1) было выделено в [1].

ТЕОРЕМА 1. Множество $\mathcal{P}[y, K]$ плотно в $\mathcal{M}[y, K]$ для любого решения y уравнения (1).

ТЕОРЕМА 2. При $n = 1$, $m = 3$ существуют выпуклый выступающий телесный конус $K \subset \mathbb{R}^m$ и уравнение (1), определенное в некоторой окрестности K , такое, что любое его решение имеет неограниченное собственно характеристическое множество на конусе K .

ТЕОРЕМА 3. Если конус K многогранный, то множество $\mathcal{P}[y, K]$ ограничено для любого решения y уравнения (1).

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.

[1] Макаров Е. К. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. №2. С. 220–227.

6. Сапрыкина М. Е., Раутиан Н. А. “Конечно-гладкая локальная классификация типичных двупараметрических семейств диффеоморфизмов прямой”

В работе построены нормальные формы относительно конечно-гладкой сопряженности для локальных двупараметрических семейств диффеоморфизмов вещественной прямой.

Через Diff обозначим пространство всех гладких ростков в точке $(0) \in \mathbb{R}$ диффеоморфизмов прямой; через $\varepsilon \in \mathbb{R}^2(0)$ – параметры; через $F(\cdot, \varepsilon): \mathbb{R}^2(0) \rightarrow \text{Diff}$ (через $H(x, \varepsilon)$ – сопрягающее) семейство ростков диффеоморфизмов прямой; через $\mathcal{SN}^+$ и $\mathcal{F}^+$ – подпространства Diff :

$$\mathcal{SN}^+ = \{f \in \text{Diff} : f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f''' \neq 0\},$$

$$\mathcal{F}^+ = \{f \in \text{Diff} : f(0) = 0, f'(0) = -1, f'''(0) = 0, f^{(5)} \neq 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Локальное семейство $F(x, \varepsilon)$ диффеоморфизмов прямой называется SN^+ -семейством (F^+ -семейством), если

- 1) росток $F(\cdot, 0) \in \mathcal{SN}^+$ (соответственно, $\mathcal{F}^+$);
- 2) семейство $F(\cdot, \varepsilon)$ трансверсально в точке $\varepsilon = 0$ к $\mathcal{SN}^+$ (соответственно, к $\mathcal{F}^+$).

ТЕОРЕМА (о секториальной нормализации для SN^+ -семейств). В любой достаточно малой окрестности нуля в $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$ для любого SN^+ -семейства существуют области Ω_j , $j = 1, 2, 3$, такие, что в каждой из областей Ω_j определено гладкое отображение $H_j: (x, \varepsilon) \rightarrow H_j(x, \varepsilon)$, удовлетворяющее следующим свойствам.

1. В области Ω_j ($j = 1, 2, 3$) диффеоморфизм H_j сопрягает SN^+ -семейство F с нормальной формой $\tilde{F}$, которая при каждом значении параметра включается в поток векторного поля v на прямой, единого для всех трех областей Ω_j ; $\tilde{F} = g_v^1$, где $v = (x^3 + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2)(1 + a(\varepsilon)x^2)$, $a(0) \neq 0$.

2. В связанных компонентах $\Omega_j \cap \Omega_{j+1}$ отображения $H_j \circ H_{j+1}^{-1}$ отличаются от тождественного отображения на плоские в нуле функции.

3. Для каждого j отображение H_j единственно с точностью до преобразования фазового потока поля v .

Для F^+ -семейств получен аналогичный результат.

7. Сычев М. А. (Новосибирск) “Характеризация устойчивости в скалярных вариационных задачах”

Для исследования устойчивости решений задачи

$$I(u) = \int_{\Omega} L(x, u, Du) dx \rightarrow \min, \quad u(x) \in W^{1,p}, \quad u|_{\partial\Omega} = f \quad (L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$$

базисным является свойство: сходимости $u_k \rightharpoonup u_0$ в $W^{1,p}$, $I(u_k) \rightarrow I(u_0)$ влекут сходимость $u_k \rightarrow u_0$ в $W^{1,1}$. Это свойство характеризуется в терминах интегранта с помощью понятия строгой выпуклости функции в точке (строгое неравенство Йенсена в точке).

ТЕОРЕМА. Пусть $L(x, u, v)$ – интегрант Каратеодори, $|L| \leq a|v|^p + b$, $p \geq 1$, $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\text{mes } \partial\Omega = 0$.

Если для п.в. $x \in \Omega$ $L(x, u_0(x), v)$ строго выпукла в точке $v = Du_0(x)$ и отрицательные части последовательности $L(x, u_k, Du_k)$ равномерно суммируемы, то сходимости $u_k \rightharpoonup u_0$ в $W^{1,1}$, $I(u_k) \rightarrow I(u_0)$ влекут сходимости $u_k \rightarrow u_0$ в $W^{1,1}$, $L(x, u_k, Du_k) \rightarrow L(x, u_0, Du_0)$ в L_1 .

Обратно, если для $u_k \in u_0 + C_0^\infty(\Omega)$ с равномерно суммируемыми $|Du_k|^p$ имеет место сходимость $u_k \rightarrow u_0$ в $W^{1,1}$ в случае, когда $u_k \rightharpoonup u_0$ в $W^{1,p}$ и $I(u_k) \rightarrow I(u_0)$, то одна из функций $L(x, u_0(x), v)$, $-L(x, u_0(x), v)$ строго выпукла в точке $v = Du_0(x)$ для п.в. $x \in \Omega$.

Ослабленный вариант теоремы доказан в [1] для случая $p > 1$, однако легкая модификация доказательства влечет приводимый результат. Как следствия получены критерии существования и устойчивости решений в однородной задаче минимизации энергии в классе деформаций вида $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, x_3 + u(x_1, x_2, x_3))$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-00878).

[1] Сычев М. А. // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 6. С. 77–109.

8. Чеботарев А. М. “О границе динамической полугруппы”

Динамические полугруппы используются для описания необратимой эволюции квантовых систем, взаимодействующих с окружением (1976, Линдблад, Горини и соавт.). Позже было замечено, что решения эволюционных уравнений теории марковских случайных процессов допускают расширения до динамических полугрупп. Обратно, выбор индикатора борелевского множества в качестве начального условия для динамической полугруппы дает переходную вероятность соответствующего марковского процесса. На этом пути недавно были получены новые критерии регулярности марковских процессов, исключающие критические явления, такие как взрыв или уход на бесконечность (А. М. Чеботарев, А. С. Холево, F. Fagnola, K. Parthasarathy, J. Garcia и др.). На языке динамических полугрупп свойство регулярности является следствием консервативности минимальной динамической полугруппы $P_t^{\min}(B) = \exp\{t\mathcal{L}\}(B)$, порождаемой генератором $\mathcal{L}(\cdot)$. В случае, если минимальная динамическая полугруппа консервативна (т.е. $P_t(I) = I$), она является единственным решением задачи Коши для уравнения Линдблада и однозначно определяется отображением $\mathcal{L}$. Основной результат настоящего сообщения состоит в параметризации всех консервативных расширений минимальной динамической полугруппы в том случае, если $P_t(I) \leq I$. С этой целью динамической полугруппе сопоставляется сжимающее вполне положительное отображение $Q: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, выражаемое через коэффициенты генератора $\mathcal{L}(\cdot)$. Доказано, что множество $\mathcal{S} = \{X: Q(X) = X, I \geq X \geq 0\}$ является *-слабо замкнутым, и существует слабо замкнутое выпуклое подмножество $T \subset \mathcal{B}(l_2(\mathcal{H}))$, изометричное множеству всех $\mathcal{S}$ -значных нормальных вполне положительных отображений $C(\cdot)$ таких, что $C(I) = I - R_1^{\min}(I)$, где $R_\lambda^{\min}(\cdot)$ – резольвентное отображение минимальной динамической полугруппы. Поэтому “консервирующее” отображение $C(\cdot)$ может быть описано с помощью теоремы Крейна–Мильмана. При этом роль границы играет множество $\mathcal{E}$ крайних точек подмножества T , а роль граничного условия – вероятностная мера на $\mathcal{E}$.

Вечернее заседание 28 апреля 1996 г., секция 1.

1. Годунов С. К., Михайлова Т. Ю., Роменский Е. И. (все – Новосибирск) “Термодинамически согласованные системы законов сохранения, инвариантные относительно вращения”

2. Дакоронья Б. (Dacorogna B.) (Швейцария, Лозанна), Марчеллини П. (Marcellini P.) (Италия, Флоренция) “Новый подход к вопросу о существовании решений уравнений и систем типа Гамильтона–Якоби”

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество; $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$; $Du(x) = (\partial u_i / \partial x_j) \in \mathbb{R}^{mn}$; $F: \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}$; $\varphi \in W^1_\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Рассматривается задача Дирихле–Коши:

$$(1) \quad \begin{cases} F(Du(x)) = 0 & \text{для почти всех (кратко: п.в.) } x \in \Omega; \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Приведем две типичные теоремы.

ТЕОРЕМА 1 (скалярный случай). Пусть $m = 1$ и $Z = \{\xi \in \mathbb{R}^n : F(\xi) = 0\}$. Тогда задача (1) имеет плотное в $W^1_\infty(\Omega)$ множество решений $u \in W^1_\infty(\Omega)$ при выполнении следующего условия:

(2) $D\varphi(x)$ принадлежит некоторому компактному подмножеству $\text{int co } Z$ для п.в. $x \in \Omega$.

Если наложено дополнительное требование $\varphi \in C^1(\Omega)$, то (2) можно заменить условием

(3) $D\varphi(x) \in Z \cup \text{int co } Z$, $x \in \Omega$.

Здесь через $\text{int co } Z$ обозначена внутренность выпуклой оболочки множества Z .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если функция F выпукла и коэрцитивна, то (2) равносильно неравенству $F(D\varphi(x)) \leq 0$, представляющему собою классическое необходимое условие разрешимости (см. работы С. Н. Кружкова, П. Л. Лионса).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Наши предположения позволяют рассмотреть также системы.

ТЕОРЕМА 2 (случай собственных значений). Пусть $m = n$, ξ – матрица размеров $n \times n$ с неотрицательными собственными значениями $\lambda_1(\xi) \leq \dots \leq \lambda_n(\xi)$. Предположим, что вектор-функция $\varphi \in W^1_\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет неравенству $\lambda_n(D\varphi(x)) \leq 1 - \delta$ для п.в. $x \in \Omega$ при некотором $\delta > 0$. Тогда существует плотное в $W^1_\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ множество решений $u \in W^1_\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ следующей задачи:

$$\lambda_1(Du) = \dots = \lambda_n(Du) = 1 \quad \text{для п.в. } x \in \Omega, \quad u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В доказательствах сформулированных двух теорем используются теорема Бэра о категории и понятие квазивыпуклости, введенное Морри.

3. Кружков С. Н. “Понятие обобщенного решения в нелокальной теории нелинейных уравнений первого порядка”

4. Дудникова Т. В. (Электросталь), Комеч А. И. “О стабилизации для нелинейного волнового уравнения”

Рассматривается следующая задача Коши для функции $u \in C(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \mu u_{tt}(x, t) = T u_{xx}(x, t), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad t \in \mathbb{R}; \\ (2) \quad & u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x); \\ (3) \quad & y(t) = u(0 \pm, t); \quad m \ddot{y}(t) = F(y(t)) + T[u_x(0+, t) - u_x(0-, t)]; \\ (4) \quad & \dot{y}|_{t=0} = y_1. \end{aligned}$$

Здесь $m, \mu, T > 0$. Постановка задачи объяснена в [1].

Предполагается, что случайные функции u_0, u_1 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= y_0, & u_1(x) &= 0 & \text{при } x > 0; \\ u_0(x) &= y_0 + W(-x), & u_1(x) &= aW'(-x) & \text{при } x < 0. \end{aligned}$$

Здесь $W(x)$ – стандартный винеровский процесс на пространстве $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ и (y_0, y_1) – независимая от W случайная величина.

На потенциал $V(y) = - \int F(y) dy$ и функцию $f_0(y, v)$ – плотность распределения (y_0, y_1) , накладываются следующие условия:

$$\begin{aligned} V &\in C^2(\mathbb{R}), \quad V(y) \geq 0, \quad \liminf_{|y| \rightarrow \infty} (V(y)/\ln |y|) > T, \\ \iint (1 + v^2 + V(y) + \ln^+ f_0(y, v)) f_0(y, v) dy dv &< \infty. \end{aligned}$$

Введем семейство мер $\mu_t, t > 0$, на пространстве $\mathcal{H}^s = H_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}) \oplus H_{\text{loc}}^{s-1}(\mathbb{R})$:

$$\mu_t(A) = P\{\omega : (u(t), \dot{u}(t)) \in A\}, \quad A \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}^s), \quad s < 1/2.$$

ТЕОРЕМА 1. *C вероятностью 1 существует и единственно решение $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^2)$ задачи (1)–(4).*

ТЕОРЕМА 2. *Семейство мер μ_t слабо сходится при $t \rightarrow \infty$ к некоторой предельной мере μ_∞ на пространстве $\mathcal{H}^s, s < 1/2$.*

[1] Komech A. I. // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 196. P. 384–409.

5. Коньков А. А. “Об оценках для решений квазилинейных эллиптических неравенств в областях, принадлежащих цилиндру”

Пусть Ω – открытое подмножество $\mathbb{R}^n, n \geq 2, 0 \in \Omega \subset \{(x', x_n) : |x'| < 1, -\infty < x_n < \infty\}$,

$$L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, a_{ij} \equiv a_{ji}$ – измеримые функции, удовлетворяющие условию равномерной эллиптичности. Обозначим $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^n \setminus \Omega, Q_r^x = \{y : |y - x| < r\}, \overline{Q}_r^x$ – замыкание Q_r^x .

Будут изучаться положительные решения неравенства

$$(1) \quad Lu \geq F(x, u),$$

где $F : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – локально ограниченная измеримая функция такая, что $F(x, t_1) \leq F(x, t_2)$ при $t_1 \leq t_2$.

ТЕОРЕМА. Пусть $f \in C^1((0, \infty) \times (0, \infty))$, $f(r, t_1) \leq f(r, t_2)$ при $t_1 \leq t_2$, и $\forall r, t \in (0, \infty)$

$$0 \leq f(r, t) \leq \operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega \cap Q_{2r}^0 \setminus Q_{r/2}^0} F(x, t).$$

Пусть также $\lambda: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – измеримая функция такая, что $\forall r > 0$

$$\lambda(r) \leq \inf_{x \in \Omega \cap Q_{2r}^0 \setminus Q_{r/2}^0} \mu^2(x),$$

где $\mu(x) = \sup_{\rho \in (0, |x|/2)} \rho^{1-n} \operatorname{cap}(\mathcal{D} \cap \overline{Q_\rho^x}, Q_{2\rho}^x)$. Тогда найдутся постоянные $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $R_0 > 0$, зависящие только от n и постоянных эллиптичности оператора L , такие, что для всякого положительного решения неравенства (1) в области $\Omega \cap Q_R^0$, $R_0 < R \leq \infty$, равного нулю на $Q_R^0 \cap \partial\Omega$, справедлива оценка

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega \cap Q_r^0} u(x) \geq m(r) \quad \forall r \in [R_0, R],$$

где m – решение задачи Коши $m'' = \alpha f(r, \beta m) + \gamma \lambda(r)m$, $m(R_0) = u(0)$, $m'(R_0) = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00653).

[1] Кондратьев В. А., Коньков А. А. // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 9. С. 81–94.

6. Волевич Л. Р., Ширикян А. Р. “Ограниченные и почти периодические по времени решения сильно нелинейных гиперболических уравнений”

Пусть $\partial = (\partial_t, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$, $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$, $\partial^\alpha = \partial_t^{\alpha_0} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$. Рассматривается уравнение

$$(1) \quad P(\partial)u(t, x) + \varepsilon G(t, x, \partial^m u(t, x)) = f(t, x), \quad \partial^m u = \{\partial^\alpha u, |\alpha| \leq m\},$$

где $P(\partial)$ – строгогиперболический оператор порядка m с вещественными коэффициентами, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ – малый параметр, а $G(t, x, z)$, $z = \{z_\alpha, |\alpha| \leq m\} \in \mathbb{R}^d$, – гладкая вещественнозначная функция. Предполагается, что выполнены следующие условия.

УСЛОВИЕ (А). Найдется такое $\delta > 0$, что

$$P(\tau, \xi) \neq 0 \quad \text{при} \quad |\operatorname{Re} \tau| < \delta, \quad (\operatorname{Im} \tau, i\xi) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

где $P(\tau, \xi)$ – характеристический полином оператора $P(\partial_t, \partial_x)$.

УСЛОВИЕ (В). Для любого шара $B_\rho = \{z \in \mathbb{R}^d : |z| \leq \rho\}$ функция $G(t, x, z)$ принадлежит пространству $C_b^\infty(\mathbb{R}_{t,x}^{n+1} \times B_\rho)$ бесконечно гладких функций на $\mathbb{R}_{t,x}^{n+1} \times B_\rho$, которые равномерно ограничены вместе со всеми производными, причем $G(t, x, 0) \equiv 0$.

Для целого числа $k \geq 0$ положим

$$\mathbb{F}_k = \{u(t, x) : \partial_t^j u \in C_b(\mathbb{R}, H^{(k-j)})\}, \quad j = 0, \dots, k\},$$

где $H^{(s)} = H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ – пространство Соболева порядка s .

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (А) и (В). Тогда при $k \gg 1$, произвольной правой части $f(t, x) \in \mathbb{F}_k$ и достаточно малых значениях параметра $\varepsilon \in \mathbb{R}$ уравнение (1) имеет хотя бы одно ограниченное по $t \in \mathbb{R}$ решение $u(t, x) \in \mathbb{F}_{k+m-1}$.

При условии почти периодичности по t функций $G(t, x, z)$ и $f(t, x)$ можно показать, что построенное решение является также почти периодическим.

7. Тешуков В. М. (Новосибирск) “Простые волны интегродифференциальных волновых уравнений”

Распространение длинных волн на поверхности слоя идеальной завихренной несжимаемой или сжимаемой баротропной жидкости описывается следующими уравнениями [1]:

$$(1) \quad \begin{aligned} u_t + uu_x + \left(f \left(\int_0^1 H d\lambda \right) \right)_x &= 0, & H_t + (uH)_x &= 0, \\ u &= u(x, \lambda, t), & H &= H(x, \lambda, t), & x \in \mathbb{R}, & t \in \mathbb{R}, & \lambda \in [0, 1], \end{aligned}$$

$f(z) = z$ в случае несжимаемой жидкости, $f'(z) = (\rho(z))^{-1}$ в случае баротропной жидкости с уравнением состояния $\rho = \rho(p)$. Решение типа простой волны задается соотношениями $u = u(h(x, t), \lambda)$, $H = H(h(x, t), \lambda)$, где $h(x, t)$ – некоторая функция двух переменных.

Условия примыкания простой волны к заданному сдвиговому потоку имеют вид

$$(2) \quad u(h_0, \lambda) = u_0(\lambda), \quad H(h_0, \lambda) = H_0(\lambda), \quad h_0 > 0.$$

Пусть $u_0(\lambda) \in C^1[0, 1]$, $H_0(\lambda) \in C[0, 1]$, $u'_0(\lambda) > 0$, $\lambda \in [0, 1]$, $H_0(\lambda) > \delta > 0$. Для модели несжимаемой жидкости справедлива

ТЕОРЕМА. *Существуют функции $u(h, \lambda)$, $H(h, \lambda)$, удовлетворяющие условиям (2), определенные при $h \in (0, A)$, $A > 0$, $h_0 \in (0, A)$, $\lambda \in [0, 1]$, $u \in C^{1,1}((0, A) \times [0, 1])$, $H \in C^{1,0}((0, A) \times [0, 1])$, такие, что соотношения*

$$u = u(h, \lambda), \quad H = H(h, \lambda), \quad h = \int_0^1 H d\lambda = h(x, t)$$

задают простую волну системы (1), если $h(x, t)$ является решением уравнения

$$h_t + k(h)h_x = 0.$$

Здесь $k(h)$ – корень характеристического уравнения системы (1):

$$1 = \int_0^1 H(h, \lambda) (u(h, \lambda) - k)^{-2} d\lambda.$$

Аналогичный факт (с небольшим изменением формулировки) справедлив для модели баротропной жидкости.

[1] Тешуков В. М. // ПМТФ. 1994. Т. 35. №6. С. 17–26.

8. Тупчиев В. А. (Обнинск) “Глобальная разрешимость задачи Коши для системы нелинейной упругости”

Рассматривается задача Коши для изэнтропической системы, описывающей динамику нелинейной упругой среды Максвелла без внутреннего трения, теплопроводности, внешних сил и источников тепла [1]:

$$(1) \quad \begin{cases} \rho_t + (\rho v_k)_{x_k} = 0, \\ (\rho v_m)_t + (\rho v_m v_k - \sigma_{mk})_{x_k} = 0, \\ (\rho c_{ij})_t + (\rho (v_k c_{ij} - v_i c_{kj}))_{x_k} + v_i (\rho c_{ki})_{x_k} = 0, \end{cases}$$

$$(2) \quad (\rho, v, C)|_{t=0} = (\rho^0(x), v^0(x), C^0(x)).$$

Здесь $\rho, v = (v_1, v_2, v_3)$, σ_{mk} , $C = (c_{ij})$ – плотность, скорость, тензоры напряжений и диссипации; $i, j, k, m = 1, 2, 3$; по повторяющемуся индексу проводится суммирование. Тензор σ_{mk} определяется с помощью формулы Мурнагана

$$\sigma_{mk} = \delta_{mk} U_V + \rho U_{c_{mj}} c_{kj},$$

где $U = U(V, c_{11}, c_{12}, \dots, c_{33})$ – удельная внутренняя энергия, $V = \rho^{-1}$.

При определенных “естественных” условиях на функцию U и начальные данные (2) методом вязкости доказывается глобальная теорема существования функционального решения [2] задачи (1), (2), а при некоторых дополнительных требованиях на U устанавливается, что это решение является функцией из $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^4)$.

[1] Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.

[2] Галкин В. А. // ДАН СССР. 1990. Т. 310. № 4. С. 834–839.

9. Галкин В. А. (Обнинск) “Классы однозначной разрешимости для систем квазилинейных законов сохранения”

Вечернее заседание 28 апреля 1996 г., секция 2.

1. Родригес Ж.-Ф. (Rodrigues J.-F.) (Португалия, Лиссабон). “Некоторые замечания о задаче с двумя препятствиями”

При построении асимптотической модели стационарного потока заряженных частиц в полупроводниковом устройстве под действием переноса и диффузии возникает специальная задача с двумя препятствиями для электрического потенциала, которая соответствует наличию диода с сильным обратным p – n -переходом и содержит смешанные условия Дирихле и Неймана. Первое замечание относится к простому случаю постоянных препятствий: при естественных предположениях установлено, что, как и в классической задаче о плотине, обе свободные границы являются гладкими кривыми, которые, по крайней мере, дифференцируемы; более того, они аналитичны, если заданное распределение зарядов является кусочно аналитическим. Доказательство таких же, притом локально устойчивых, свойств свободных границ представляет особенный интерес в более сложном случае, когда препятствия задаются нижним и верхним квазипотенциалами Ферми, которые неявно зависят от электрического потенциала, будучи связанными с ним посредством вспомогательных смешанных краевых задач. В этой ситуации по-прежнему устанавливается разрешимость возникающего квазивариационного неравенства, но, вообще говоря, не удается получить никакой информации о соответствующих свободных границах. Однако, если данные достаточно близки к тем, которые соответствуют постоянным препятствиям, то методы теории возмущений позволяют доказать, что свободные границы в квазивариационной задаче по-прежнему являются гладкими кривыми, причем расстояние между ними оценивается через их локальные гёльдеровские нормы.

2. Туваев М. В. “Теорема единственности решения задачи Неймана для квазилинейного эллиптического уравнения в области, граница которой имеет особое множество”

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $E \subset \partial\Omega$, $(\partial\Omega \setminus E) \in C^1$, $p \in \mathbb{R}$, $1 < p < n$.

ТЕОРЕМА. Пусть $u_1, u_2 \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\overline{\Omega} \setminus E \cap L_{\text{loc}}^\infty(\overline{\Omega} \setminus E))$ – слабые решения задачи

$$\begin{cases} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f(u, \nabla u) + g(x), & x \in \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi(x), & x \in \partial\Omega \setminus E \quad (\nu - \text{нормаль к } \partial\Omega), \end{cases}$$

причем в соответствующих интегральных тождествах пробные функции принадлежат $W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ и обращаются в нуль в окрестности E ;

$$\begin{aligned} \varphi &\in L^{p(n-1)/[(p-1)n]}(\partial\Omega \setminus E), & g &\in L^1(\Omega), \\ f &\in C(\mathbb{R}^{n+1}), & f(v, \xi) &\text{ строго монотонна по } v, \\ \lambda|v|^{\beta_1+1}(1+|\xi|^{\beta_2}) &\leq f(v, \xi)v \leq \mu(v)(1+|\xi|^p), & \mu(v) &\in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}), \\ \lambda &> 0, & \beta_1 &> 0, & 0 &\leq \beta_2 \leq p, & \beta_1 + \beta_2 &> p-1. \end{aligned}$$

Тогда если мера Хаусдорфа $\mu_\alpha(E) = 0$, где

$$(1) \quad n - \alpha > \frac{p\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 + \beta_2 + 1 - p},$$

и для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$

$$\int_{\Omega \setminus E_\varepsilon} (f(u_1, \nabla u_1) - f(u_2, \nabla u_2))(u_1 - u_2) dx \geq 0,$$

где $E_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, E) \leq \varepsilon\}$, то $u_1 \equiv u_2$ в Ω .

Условие (1) является точным в том смысле, что из правой части неравенства нельзя вычесть никакую положительную константу.

3. Пламеневский Б. А. (Санкт-Петербург) “Классические динамические задачи в областях с ребрами”

4. Уралыцева Н. Н. (Санкт-Петербург) “ C^1 -регулярность свободных границ в точках контакта”

5. Радкевич Е. В. “Волновые поезда” как нелинейное осреднение в системе фазового поля”

Рассматривается математическая модель процесса мгновенного охлаждения или нагревания на временах порядка $t = O(\varepsilon^\gamma)$, порожденного осциллирующими начальными данными для функции порядка в системе фазового поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \Delta \theta, \\ \varepsilon^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \varepsilon^2 \Delta \varphi + \varphi - \varphi^3 + \varepsilon \varkappa \theta, \quad (x, t) \in Q, \\ \varphi|_{t=0} &= \varphi^0(x, \varepsilon), \quad \theta|_{t=0} = \theta^0(x, \varepsilon), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_\Sigma = 0, \quad \theta|_\Sigma = \theta_b. \end{aligned}$$

Здесь φ – функция порядка, θ – температура, $\varepsilon \ll 1$ – малый параметр, $\varkappa = \text{const}$, $Q = (0, T) \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой (C^∞) границей, $n \leq 3$, $\Sigma = [0, T] \times \partial\Omega$, ν – нормаль к Σ . Функции φ^0 и θ^0 достаточно гладки для $\varepsilon \geq \text{const} > 0$, их слабые пределы $\overline{\varphi}^0, \overline{\theta}^0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ разрывны; θ_b – достаточно гладкая функция. Хорошо известно, что с этой задачей связан важный класс асимптотических решений – так называемые самоподобные решения. В пределе при стремлении малого параметра к нулю возникает задача со свободной границей, описывающая эволюцию особенностей предельного решения (модифицированная задача Стефана).

Естественным обобщением этого случая является так называемая задача о волновых поездах с функциями $\overline{\varphi}^0, \overline{\theta}^0$, имеющими разрывы на поверхностях $\Gamma_0^j \in \Omega$, $j = 0, 1, \dots, N$, координаты 1, где $\Gamma_0^i \cap \Gamma_0^j = \emptyset$, $i \neq j$, $\Gamma_0^j \cap \partial\Omega = \emptyset$, и $|\overline{\varphi}^0| = 1$ почти всюду в Ω . Тогда осциллирующая допредельная функция φ^0 меняет знак на поверхностях Γ_0^j , где $j = 0, 1, \dots, N$, и $\text{dist}(\Gamma_0^i, \Gamma_0^j) \sim c\varepsilon^\gamma$ для любых $i \neq j$, $\gamma \in (0, 1)$, $c > 0$, $N = N(\varepsilon) \rightarrow \infty$, $\varepsilon^\gamma N(\varepsilon) \rightarrow \text{const}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В докладе приведена общая конструкция асимптотического решения в этом случае, на основе которой осуществляется слабый предельный переход к соответствующей задаче со свободной границей.

Работа выполнена совместно с В. Г. Даниловым и Г. А. Омеляновым.

6. Омелянов Г. А. “Асимптотика некоторых нестабильных процессов для систем фазового поля и Кана–Хиллиарда”

Строится быстроосциллирующее асимптотическое решение для задач фазовых переходов, описываемых системой фазового поля

$$(1) \quad \varepsilon^2 \varphi_t = \varepsilon^2 \Delta \varphi + \varphi - \varphi^3 + \varepsilon \theta, \quad (\theta + \varphi)_t = \Delta \theta, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad n \leq 3, \quad \varepsilon \ll 1,$$

и неизотермической системой Кана–Хиллиарда

$$(2) \quad \varepsilon^2 \varphi_t + \Delta(\varepsilon^2 \Delta \varphi + \varphi - \varphi^3 + \varepsilon \theta) = 0, \quad (\theta + \varphi)_t = \Delta \theta, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Для (1) $\varphi = \Phi\left(\frac{S(x,t)}{\varepsilon}, E(x,t)\right) + O(\varepsilon)$, для (2) $\varphi = \Phi\left(\frac{S(x,t)}{\varepsilon}, E(x,t), C(x,t)\right) + O(\varepsilon)$ и в обоих случаях $\theta = \theta_0(x,t) + \varepsilon\theta_1\left(\frac{S}{\varepsilon}, x, t\right) + O(\varepsilon^2)$, где $\Phi(\tau, \dots)$ – периодическая по τ функция, вычисляющаяся через эллиптические функции Якоби; S, E, C находятся из модельных уравнений вида

$$(3) \quad S_t = a^{-1} \operatorname{div}(a \nabla S), \quad |\nabla S| = f, \quad g(C, E)_t + \Delta C = 0,$$

где для (1) a, f – функции от E и для (2) – от E, C ; $\theta_{0t} - \Delta\theta_0 = F$, где $F = 0$ для (1) и $F = F(C, E)$ для (2). Доказано, что при $|\Phi| \ll 1$ уравнения (3) близки по своим свойствам к обратному уравнению теплопроводности, а при $|\Phi|$, стремящемся к некоторому критическому значению Φ^* , (3) близки к гиперболическим уравнениям. Описана бифуркация решения, происходящая при $|\Phi| \rightarrow \Phi^*$, и доказано, что при этом для (1) $\Phi \rightarrow \Phi_{th} = th(S/\varepsilon)$, а для (2) Φ трансформируется в солитонное решение Φ_{sol} . Эти решения являются уже устойчивыми, однако с ростом t Φ_{sol} трансформируется в Φ_{th} . Тем самым, малые периодические возмущения “сверхустойчивы”, и их развитие приводит к формированию областей, заполненных твердой или жидкой фазами, т.е. эти решения описывают процесс фазовой декомпозиции.

Работа выполнена совместно с В. Г. Даниловым и Е. В. Радкевичем.

7. Жевандров П. Н., Мерзон А. Е. “Асимптотика краевых волн у берега переменного уклона”

Цель исследования заключается в нахождении частот волн, захваченных берегом переменного уклона при больших значениях волнового числа k . Соответствующая краевая задача формулируется следующим образом: найти нетривиальные решения (с конечной энергией) уравнения $\Delta\Phi - k^2\Phi = 0$ в криволинейном угле, образованном лучом $y = 0, x \geq 0$ (свободная поверхность) и кривой $y = -h(x), x \geq 0$ (дно, здесь $h(0) = 0, h'(0) \neq 0, h(x) > 0$ при $x > 0$) с условием непротекания на дне и условием $g\Phi_y - \omega^2\Phi = 0$ на свободной поверхности. При $h(x) = x \operatorname{tg} \alpha$ решения существуют только для $\omega^2 = gk \sin(2n-1)\alpha, n = 1, \dots, M(\alpha)$, где $M(\alpha) = \max M \in \mathbb{N} : (2M-1)\alpha < \pi/2$. В [2] доказано, что при больших k имеется по крайней мере $M(\alpha)$ решений в случае неплоского дна; α определяется равенством $\operatorname{tg} \alpha = h'(0)$. Наш основной результат: при $k \rightarrow \infty$ частоты этих волн даются формулой $\omega_n^2 = gk [\sin(2n-1)\alpha] \times \{1 + O(k^{-1})\}$. Доказательство сводится к решению цепочки задач такого же вида, как и исходная, в угле с правыми частями в краевых условиях. Это делается с помощью методов [1].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00527), Института А. М. Ляпунова и фонда CONACYT (Мексика).

[1] Merzon A. E. // 3rd Intern. Conf. on Math. and Num. Aspects of Wave Propagation / ed. G. Cohen. Philadelphia: SIAM, 1995. P. 613–623.

[2] Bonnet-Ben Dhia A.-S., Joly P. // SIAM J. Appl. Math. 1993. V. 53. P. 1507–1550.

8. Бадерко Е. А., Черепова М. Ф. “Априорные оценки решений линейных эллиптических уравнений в областях класса $C^{1,\alpha}$ ”

9. Бородин М. А. (Украина, Донецк) “Двухфазная задача Стефана”

Вечернее заседание 28 апреля 1996 г., секция 3.

1. Власов В. В. “Об асимптотическом поведении решений одного класса функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве”

Изучается начальная задача вида

$$(1) \quad \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{kj} u^{(j)}(t-h_k) + \int_0^h a(s) u(t-s) ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$(2) \quad u(t) = y(t), \quad t \in [-h, 0], \quad u^{(j)}(+0) = y^{(j)}(-0), \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

где a_{kj} – комплексные коэффициенты, числа h_j таковы, что $0 = h_0 < h_1, \dots < h_n = h$, функции $a(s) \in L_2((0, h), \mathbb{C})$, $y(s) \in W_2^m((-h, 0), \mathbb{C})$.

Обозначим через ν_q кратности нулей λ_q функции $l(\lambda)$:

$$l(\lambda) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{kj} \lambda^j \exp(-\lambda h_k) + \int_0^h \exp(-\lambda s) a(s) ds.$$

ТЕОРЕМА. Пусть $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$, множество Λ нулей функции $l(\lambda)$ отделимо, т.е. $\inf \text{dist}_{\lambda_p \neq \lambda_q}(\lambda_q, \lambda_p) > 0$. Тогда величина $N = \sup_{\lambda_q \in \Lambda} \nu_q$ конечна и для любого сильного решения $u(t)$ задачи (1), (2) выполнено неравенство

$$(3) \quad \|u(t + \cdot)\|_{W_2^m(-h, 0)} \leq d(t^{N-1} + 1) \exp(\kappa t) \|y\|_{W_2^m(-h, 0)}, \quad t \geq 0,$$

где $\kappa = \sup_{\lambda_q \in \Lambda} \text{Re } \lambda_q$, с постоянной d , не зависящей от функции $y(t)$.

В докладе приводятся также результаты об асимптотическом поведении и устойчивости решений уравнений с последействием в гильбертовом пространстве, близкие соответствующим результатам из [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00333).

[1] Власов В. В. // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 8. С. 67–92.

2. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. (Украина, Киев) “О целых эрмитовых операторах, изображаемых дифференциальными операторами в частных производных”

Рассмотрим выражение вида

$$(1) \quad y''(t) + A(t)y(t), \quad t \in [0, b], \quad b < \infty,$$

где при каждом $t \in [0, b]$ $A(t)$ – неотрицательный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с не зависящей от t областью определения $\mathcal{D}$, вектор-функция $A(t)f$, $f \in \mathcal{D}$, сильно дифференцируема на $[0, b]$. Пусть L_0 – минимальный оператор, порожденный в пространстве $\mathfrak{H} = L_2(H, [0, b])$ выражением (1) и граничным условием $y'(0) = 0$, $\mathfrak{H}_+ = \mathcal{D}(L_0^*)$ с нормой графика оператора L_0^* , $\mathfrak{H}_-$ – соответствующее пространство с негативной нормой. Определим оператор $\delta_0: H \rightarrow \mathfrak{H}_-$ как

$$(\delta_0 f, u)_{\mathfrak{H}} = (f, u(0))_H \quad \forall f \in H, \quad \forall u \in \mathfrak{H}_+.$$

Имеют место следующие утверждения:

- 1) оператор δ_0 непрерывен;
- 2) линейал $\mathfrak{L} = \{\delta_0 f : f \in H\}$ замкнут в $\mathfrak{H}_-$;
- 3) эрмитов оператор L_0 является $\mathfrak{L}$ -целым в смысле М. Г. Крейна–Ю. Л. Шмульяна.

Беря в качестве $A(t)$ дифференциальные операторы в пространстве $H = L_2(\mathbb{R}^n)$, получим примеры целых дифференциальных операторов в частных производных. Тем самым решается задача, поставленная М. Г. Крейном в его докладе на Международном конгрессе математиков (Москва, 1966).

3. Дубинский Ю. А. “О некоторой задаче наилучшего продолжения периодической функции”

В полуплоскости $y > 0$ среди всех 2π -периодических функций $f(z)$, являющихся продолжением заданной функции $f_0(x) \in W_p^{1-1/p}(-\pi, \pi)$, $1 < p < \infty$, ищется такая функция, для которой минимально коаналитическое уклонение

$$\mu_p(f) = \|f(z) - f_a(z)\|_{W_p^1(G)}^p$$

(здесь $f_a(z)$ – аналитическая часть $f(z)$, отвечающая разложению

$$L_p(G) = \mathcal{O}_p(G) \oplus \partial_z \mathring{V}_p^1(G), \quad G = \{-\pi < x < \pi, 0 < y < +\infty\}.$$

Математической моделью этой задачи является краевая задача для включения

$$(1) \quad -\Delta_p(f - f_a) + |f - f_a|^{p-2}(f - f_a) \in \mathcal{O}_{p'}^{-1}(G),$$

$$(2) \quad f(x + i0) = f_0(x), \quad P^+ \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial y}(f - f_a) \right|^{p-2} \frac{\partial}{\partial y}(f - f_a) \right|_{y=0} \Big\} = 0,$$

где Δ_p – p -лапласиан, P^+ – оператор проектирования на подпространство периодических функций с положительными частотами.

Доказана корректность задачи (1), (2) и тем самым существование и единственность решения исходной задачи о продолжении периодической функции с наименьшим коаналитическим уклонением $\mu_p(f)$. В случае среднеквадратичной градиентной метрики, т.е. для $\mu_2(f) = \|\nabla(f - f_a)\|_{L_2(G)}^2$, наилучшим продолжением является, как оказывается, гармоническое продолжение.

4. Мышкис А. Д. “Автономные дифференциальные уравнения с импульсной самоподдержкой и бесконечным запаздыванием”

Рассматривается скалярное функционально-дифференциальное уравнение

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(x(t + \theta_1), x(t + \theta_2), \dots, x_t) \\ (0 \geq \theta_1 > \theta_2 > \dots \rightarrow -\infty; \quad x_t(\theta) := x(t + \theta), \quad -\infty < \theta \leq 0)$$

с условием самоподдержки

$$(2) \quad (x(t) = 0) \Rightarrow x(t^+) = a \quad (= \text{const} > 0),$$

где функционал f определен на $[0, a]^\infty \times$ (множество непрерывных слева функций $(-\infty, 0] \rightarrow [0, a]$ без предельных точек у множества точек разрыва) и принимает значения из $[-\Delta, -\delta]$, где $0 < \delta < \Delta$. Предполагается, что: f удовлетворяет условию Липшица в форме

$$|f(u_1, u_2, \dots, \psi) - f(v_1, v_2, \dots, \varphi)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} M_j |u_j - v_j| + M_0 \int_{-\infty}^0 e^{kt} |\psi(t) - \varphi(t)| dt; \\ M^0 := \sup_{j \geq 1} \{M_j e^{k|\theta_j|}\} < \infty;$$

$k > 0$; существует натуральное $p > 0$ такое, что на каждом интервале, длина которого меньше a/δ , содержится не более p значений θ_j .

ТЕОРЕМА. Для любых $\varepsilon > 0$, $E > \varepsilon$ существует такое $\eta > 0$, что если $k > \varepsilon$, $\delta > \varepsilon$, $\varepsilon < a < E$, $\Delta < E$, $p < E$, $M_0 < \eta$, $M^0 < \eta$, то уравнение (1) с условием (2) имеет единственное, с точностью до произвольного сдвига по t , периодическое решение. Это решение имеет ровно один нуль на каждом своем наименьшем периоде и глобально экспоненциально устойчиво (в естественном смысле).

Соотношение между ε , E и η может быть указано в явной форме.

5. Никольский М. С. “О системах интегральных уравнений типа Вольтерра в свертках”

6. Рябенкий В. С. “Дискретный аналог потенциалов Кальдерона и его приложения”

Результаты опубликованы в работе [1].

[1] Ryaben’kii V. S. // Math. Nachr. 1996. V. 177. P. 251–264.

7. Скубачевский А. Л. “О необходимых и достаточных условиях нормальности одного эллиптического функционально-дифференциального оператора”

Заседание 29 апреля 1996 г., секция 1.

1. Аксенов А. В. “Локальные и нелокальные симметрии, точные решения уравнений абсолютно неустойчивых сред”

Рассматривается следующая система уравнений

$$(1) \quad u_t + uu_x - \lambda(\rho^{1/\lambda})_x = 0, \quad \rho_t + (\rho u)_x = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}^1).$$

Система уравнений (1) описывает в приближении длинных волн обширный класс абсолютно неустойчивых сред (опрокинутая мелкая вода, перетяжки на плазменном пинче и др.). Преобразование годографа система уравнений (1) сводится к виду

$$(2) \quad x_r = 2\lambda z t_r + r t_z, \quad x_z = -r t_r + 2\lambda z t_z,$$

где $r = \rho^{1/(2\lambda)}$, $z = u/(2\lambda)$. Условием совместности системы (2) является уравнение

$$(3) \quad Lu \equiv t_{rr} + (2\lambda + 1)r^{-1}t_r + t_{zz} = 0.$$

Найдены симметрии системы (2) и уравнения (3). Показано, что фундаментальные решения уравнения (3), являющиеся решениями уравнения

$$(4) \quad Lu = \delta(r - 1)\delta(z),$$

описывают периодические по x решения системы (1). Показано, что из алгебры Ли L_4 операторов симметрии уравнения (3) только один допускается уравнением (4). Найдены инвариантные относительно этого оператора решения уравнения (4). Показано, что из алгебры Ли L_4 операторов симметрии системы (2) уравнением (4) допускается только один (он задает нелокальную симметрию уравнения (3)). С его помощью получены новые фундаментальные решения уравнения (3).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01742).

2. Введенская Н. Д., Добрушин Р. Л., Карпелевич Ф. И. “Нелинейные уравнения, возникающие в задачах о сетях связи”

3. Волович И. В. “Краевые условия и асимптотические разложения в теории гравитационного излучения”

4. Дородницын В. А. “Симметрии и законы сохранения разностных уравнений”

В докладе излагается инвариантно-групповой подход к проблеме консервативности разностных уравнений. Развитый в [1], [3] математический аппарат позволяет строить разностные схемы и сетки, полностью сохраняющие непрерывную симметрию (инвариантность по отношению к локальной группе Ли) исходных дифференциальных уравнений, что дает наличие у разностных моделей точных инвариантных решений или полную интегрируемость. Возникает вопрос, когда разностная модель инвариантной вариационной задачи будет обладать разностными аналогами законов сохранения. Строятся два разностных аналога известной теоремы Нётер, которые имеют существенные отличия от непрерывного случая. В первом варианте (см. [2]) предлагается отказаться от инвариантности функционала, заменив ее на условие “квазиинвариантности”, приводящее к консервативности разностных уравнений Эйлера. Во втором варианте строится консервативное пересечение локальных экстремалей, т.е. уравнений, на которых достигается стационарность функционала при преобразованиях соответствующей подгруппы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01742) и Миннауки РФ.

[1] Дородницын В. А. // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Новейшие достижения. 1989. Т. 34. С. 149–190.

[2] Дородницын В. А. // ДАН. 1993. Т. 328. № 6. С. 678–682.

[3] Dorodnitsyn V. // Internat. J. Modern Phys. C. 1994. V. 5. № 4. P. 723–734.

5. Егоров Ю. В. “О задаче Лагранжа”

Рассматривается задача Лагранжа [1] об оптимальной форме колонны заданной длины и единичного объема. Эта задача рассматривалась в работах Дж. Келлера, И. Таджбахша, А. С. Брагуса, А. П. Сейраняна и других. Однако существование оптимальной формы колонны до сих пор не было доказано. Задача состоит в определении такой положительной функции $Q_\alpha(x)$, для которой

$$\int_0^1 Q_\alpha(x)^\alpha dx = 1$$

(где α фиксировано, $0 < \alpha < 1$), а величина

$$M_\alpha = \inf_{y \in K} \int_0^1 Q_\alpha(x) y''^2 dx$$

максимальна. Здесь K – класс функций $y(x) \in \dot{W}_2^2(0, l)$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^l y'^2 dx = 1.$$

Доказывается существование решения этой задачи на основе рассмотрения нелинейной вариационной задачи о максимуме функционала $\int_0^1 |y'(x)|^p dx$, где $p = 2\alpha/(\alpha - 1) < 0$, в классе

неубывающих функций $y(x) \in W_2^1(0, 1)$ таких, что $y(0) = 0$, $\int_0^1 y^2(x) dx = 1$. Дается обоснование результата Дж. Келлера и И. Таджбахша [2] ($\alpha = 1/2$), который вызывал критику у многих специалистов (N. Olhoff, S. Rasmussen и др.). Доказывается, что

$$M_\alpha = 4 \frac{(2\alpha + 1)}{\alpha} \left(\frac{1 + \alpha}{1 + 2\alpha} \right)^{1-1/\alpha} B \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha} \right)^2,$$

где B – функция Эйлера. Дается точная формула для соответствующей функции $Q_\alpha(x)$. Рассматриваются некоторые обобщения задачи Лагранжа. В частности, рассматриваются другие (кроме жестких) формы закрепления краев колонны.

Изложенные в докладе результаты получены совместно с В. А. Кондратьевым, работа которого поддана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 96-01-00653).

[1] Lagrange J. L. Sur la figure des colonnes // Oeuvres de Lagrange. Paris: Gauthier-Villars, 1867.

[2] Tadjbakhsh I., Keller J. B. // J. Appl. Mech. 1962. V. 29. P. 159–164.

6. Ильясов Я. Ш. “Некоторые следствия из одного дифференциального тождества, возникающего при исследовании основных решений полулинейных эллиптических уравнений”

Рассматривается уравнение

$$(1) \quad -u_{zz}(z, x) - \Delta_x u(z, x) = g(u(z, x)), \quad (z, x) \in (-l, l) \times \mathbb{R}^N, \quad u \in H^1((-l, l) \times \mathbb{R}^N),$$

с периодическими условиями по z :

$$(2) \quad u(-l, x) = u(l, x), \quad u_z(-l, x) = u_z(l, x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

(здесь и далее мы используем те же обозначения, что и в [1]).

Обозначим через $\mathfrak{M}_{\text{gr}} = \{u^l, 0 < l \leq +\infty\}$ параметризованное семейство основных (ground state) решений задачи (1), (2).

В [1] доказано следующее дифференциальное тождество

$$(3) \quad dS^l(u^l) = -2\frac{1}{l}H^l(u^l) \quad \text{при п.в. } l > 0, \quad u^l \in \mathfrak{M}_{\text{gr}},$$

где S^l – функционал действия, а H^l – функционал энергии, соответствующий задаче (1), (2) (см. [1]).

ТЕОРЕМА. *Отображение $H(l): l \rightarrow H^l(u^l)$ является монотонно возрастающей отрицательной функцией, стремящейся к нулю при $l \rightarrow +\infty$.*

С помощью этой теоремы и тождества (3) доказан ряд утверждений о необходимых условиях существования и несуществования нетривиальных решений задачи (1), (2). Установлены некоторые новые свойства решений из $\mathfrak{M}_{\text{gr}}$.

[1] Ильясов Я. Ш. // ТМФ. 1995. Т. 105. № 3. С. 438–450.

7. Еремин Ю. А., Свешников А. Г. “Проекционно-итерационный метод в задачах дифракции”

Для общей задачи дифракции формулируется понятие квазирешения. Развивается метод дискретных источников построения квазирешения в виде линейной комбинации сингулярных решений. Обсуждается проблема выбора носителя сингулярностей. Предлагается проекционный метод определения амплитуд дискретных источников. Дано обоснование корректной разрешимости получающихся линейных систем и развит эффективный итерационный алгоритм их решения. Доказана сходимость в непрерывной норме в произвольном компакте вне дифрагирующего объекта построенного квазиразширения к решению исходной задачи. Обсуждаются численные результаты.

[1] Еремин Ю. А., Свешников А. Г. // Матем. моделирование. 1994. Т. 6. № 6. С. 76–84.

[2] Еремин Ю. А., Свешников А. Г. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 10.

Заседание 29 апреля 1996 г., секция 2.

1. Ивасаки Ч. (Iwasaki C.) (Япония, Химедзи) “Символическое построение фундаментального решения уравнения теплопроводности и кривизны на римановых многообразиях с краем”

Пусть M – n -мерное риманово многообразие с краем ∂M ; $\Delta_p = d_{p-1}\vartheta_p + \vartheta_{p+1}d_p$ – оператор Лапласа, действующий на дифференциальные p -формы $A^p(M) = \Gamma(\Lambda^p T^*(M))$; $E_p(t)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{aligned} (\partial/\partial t + \Delta_p)E_p(t) &= 0 \quad \text{в } (0, T) \times M; \\ E_p(0) &= I \quad \text{на } M; \quad E_p(t) \in \text{Dom } \vartheta_p, \\ d_p E_p(t) &\in \text{Dom } \vartheta_{p+1} \quad \text{на } (0, T); \quad e_p(t, x, y) \text{ — ядро } E_p(t). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА. Пусть l – целое число, $0 \leq l \leq n$. Тогда при $t \rightarrow 0$ справедливы соотношения:

1) для любой $\psi \in C^\infty(\overline{M})$

$$\begin{aligned} \int_M \sum_{p=0}^l (-1)^p \binom{n-p}{n-l} \text{tr } e_p(t, x, x) \psi(x) dv \\ = \left\{ \int_M C_l(x) \psi(x) dv + \int_{\partial M} D_{l-1}(x) \psi(x) d\sigma \right\} t^{-(n-l)/2} + O(t^{-(n-l-1)/2}), \end{aligned}$$

где $C_{l-1}(x)$ и $D_{l-1}(x)$ определяются с помощью второй основной формы и римановых кривизн на M и ∂M ;

2) если $x \in M \setminus \partial M$, то

$$\sum_{p=0}^l (-1)^p \binom{n-p}{n-l} \text{tr } e_p(t, x, x) = C_l(x) t^{-n/2+l/[2+O(t^{-(n-l-1)/2})]},$$

3) если $x \in \partial M$, то

$$\sum_{p=0}^l (-1)^p \binom{n-p}{n-l} \text{tr } e_p(t, x, x) = 2D_{l-1}(x) t^{-(n-l+1)/2} + O(t^{-(n-l)/2}).$$

Сформулированный результат обобщает те, которые содержатся как в [1], так и в [2].

[1] Günther P., Schimming R. // J. Differential Geom. 1977. V. 12. P. 599–618.

[2] Iwasaki C. // Japan. J. Math. (N.S.) 1995. V. 21. P. 235–285.

2. Ильин А. М. (Екатеринбург). “Вырождающиеся дифференциальные уравнения с малым параметром при старших производных”

Рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка, зависящего от малого параметра ε , являющегося множителем при старших производных. В случае вырождения уравнения на границе области вид асимптотики зависит от степени вырождения. Если вырождение сильное, то асимптотический ряд по целым степеням ε обеспечивает равномерное приближение решения с точностью до любой степени ε . При слабом вырождении асимптотика вблизи множества вырождения описывается функциями пограничного слоя, которые строятся методом согласования асимптотических разложений.

Другой случай относится к вырождению уравнения в некоторой подобласти. Рассмотрим первую краевую задачу в области D для уравнения $\rho(x)\Delta u + (\mathbf{b}, \nabla u) + c(x)u = f(x)$, где $\rho(x) = a(x) > 0$ при $x \in D_0$, $\rho(x) = \varepsilon > 0$ при $x \in D \setminus D_0$.

Здесь D_0 – строго внутренняя подобласть, а на ее границе, лежащей внутри D , выполняется обычное условие сопряжения.

Оказывается, что предел решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ зависит от поведения гладкого вектора $\mathbf{b}$. В одном случае предел решения u_0 в области D_0 является решением задачи Неймана, а в другом случае он равен решению третьей краевой задачи:

$$a(x) \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} + b_0 u_0 = b_0 v_0$$

на границе подобласти D_0 , где $b_0 = (\mathbf{b}, \mathbf{n})$ на этой границе, а v_0 – предельное решение в подобласти $D \setminus D_0$.

3. Эйдельман С. Д. (Украина, Киев), Ивасишен С. Д. (Украина, Черновцы). “Об одном новом классе вырождающихся параболических уравнений”

Пусть $l, m, n, b_1, \dots, b_n$ – целые числа, причем $0 \leq l \leq m \leq n, b_j \geq 1; N = l + m + n, \vec{b} = (b_1, \dots, b_n), q_j = \frac{2b_j}{2b_j - 1}, \tilde{k} = \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{2b_j}, M_{krs} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2b_j} (k_j + 1) + \sum_{j=1}^m \left(1 + \frac{1}{2b_j}\right) (r_j + 1) + \sum_{j=1}^l \left(2 + \frac{1}{2b_j}\right) (s_j + 1)$, если k, r, s – мультииндексы соответствующих размерностей; $X = (x, y, z), \Xi = (\xi, \eta, \zeta)$, если $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \{y, \eta\} \subset \mathbb{R}^m, \{z, \zeta\} \subset \mathbb{R}^l$. Рассматривается уравнение

$$(1) \quad \left(\partial_t^1 - \sum_{j=1}^m x_j \partial_{y_j}^1 - \sum_{j=1}^l y_j \partial_{z_j}^1 - \sum_{\tilde{k} \leq 1} a_k(t, X) \partial_x^{\tilde{k}} \right) u = f.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнение (1) называется $2\vec{b}$ -параболическим с инерцией по части переменных в области G , если существует такое $\delta > 0$, что для всех $\sigma \in \mathbb{R}^n$ и $(t, X) \in G$

$$\operatorname{Re} \sum_{\tilde{k}=1} a_k(t, X) (i\sigma)^{\tilde{k}} \leq -\delta (\sigma_1^{2b_1} + \dots + \sigma_n^{2b_n}).$$

Если $l \geq 1$, а функции $a_k, \tilde{k} \leq 1$, не зависят от X и являются непрерывными по t на $[0, T]$, то справедлива

ТЕОРЕМА. Существует фундаментальное решение $Z(t, X; \tau, \Xi)$, $0 \leq \tau < t \leq T, \{X, \Xi\} \subset \mathbb{R}^N$, задачи Коши для уравнения (1), которое является целой функцией аргументов $N_j = (x_j - \xi_j)(t - \tau)^{-1/2b_j}, 1 \leq j \leq n$;

$$M_j = (y_j - \eta_j + (t - \tau)x_j)(t - \tau)^{-(1+1/2b_j)}, \quad 1 \leq j \leq m;$$

$$L_j = \left(z_j - \zeta_j + (t - \tau)y_j + \frac{1}{2}(t - \tau)^2 x_j \right) (t - \tau)^{-(2+1/2b_j)}, \quad 1 \leq j \leq l,$$

при этом имеют место оценки

$$|\partial_x^k \partial_y^r \partial_z^s Z| \leq C_{krs} (t - \tau)^{-M_{krs}} \exp \left\{ -c \left(\sum_{j=1}^n N_j^{q_j} + \sum_{j=1}^m M_j^{q_j} + \sum_{j=1}^l L_j^{q_j} \right) \right\}.$$

Информация о фундаментальном решении позволяет установить корректную разрешимость задачи Коши, изучить качественные свойства решений уравнений вида (1).

4. Арефьев В. Н., Багиров Л. А. “Асимптотическое поведение решений уравнения диффузии в областях с особенностями”

В области G с границей Γ исследуются слабые решения задачи Дирихле для параболического уравнения

$$(1) \quad \partial_t - \partial_x(a(x, t)\partial_x u) + b(x, t)\partial_x u + c(x, t)u = f(x, t).$$

Здесь $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $|\partial_t a(x, t)| + |\partial_x a(x, t)| + |b(x, t)| + |c(x, t)| \leq M$. Линия Γ содержит особые точки. Без ограничения общности считаем, что такая точка одна и ее координаты $(0, 0)$. Предполагается, что в малой окрестности $(0, 0)$ область G совпадает с одной из областей K_j , $j = 1, \dots, 6$; где

$$K_1 = \{(x, t) : -\beta x^2 < t < \alpha x^2, x > 0, \alpha > 0, \beta > 0\};$$

$$K_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{K_1};$$

K_3 – область с границей

$$\Gamma_3 = \{(x, t) : t = \alpha x^2, \alpha > 0, t > 0, x < 0\} \cup \{(x, t) : t = -\beta x^2, \beta > 0, x > 0, t < 0\}, \\ \{(x, t) : x = 0, t > 0\} \in K_3;$$

$$K_4 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{K_3};$$

$$K_5 = \{(x, t) : t < -\alpha x^2, \alpha > 0, x \geq 0\} \cup \{(x, t) : t < -\beta x^2, \beta > 0, x < 0\};$$

$$K_6 = \{(x, t) : t > \alpha x^2, \alpha > 0, x \geq 0\} \cup \{(x, t) : t > \beta x^2, \beta > 0, x < 0\}.$$

ТЕОРЕМА. Пусть область G в малой окрестности $(0, 0)$ совпадает с областью K_j и пусть функция $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,0}(G)$ является решением уравнения (1) с правой частью $f \in L^2(G)$. Тогда в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ справедливо представление $u(x, t) = c\rho(x, t)^{\mu(\beta)}\psi(\omega) + O(\rho(x, t)^\tau)$, где $c = \text{const}$, $\rho(x, t) = (x^4 + t^2)^{1/4}$.

Если $j \in \{1; 3; 5\}$, то $c = 0$, $\tau = 1/2$. Если $j \in \{2; 4\}$ и $\beta > \beta_*$, где β_* – наименьший корень уравнения $D_{1/2}(-(2\beta_*)^{-1/2}) = 0$, то вновь $c = 0$, $\tau = 1/2$. Если $j \in \{2; 4\}$ и $\beta < \beta_*$, то $c \neq 0$, $\tau = 1/2$, $\mu(\beta)$ – наименьший корень уравнения $D_{\mu(\beta)}(-(2\beta)^{-1/2}) = 0$, $0 < \mu(\beta) < 1/2$, $\psi(\omega)$ – гладкая функция, $\omega \in \{(x, t) : x^4 + t^2 = 1\}$. Если $j \in \{2; 4\}$ и $\beta = \beta_*$, то $c \neq 0$, $\tau = 1/2 - \delta$, $\mu(\beta) < \delta < 1/2$. Если $j = 6$, то $c \neq 0$, $\mu(\beta) = 0$, $\tau = 1/2$. Здесь $D_\mu(x)$ – функция параболического цилиндра.

Параболические уравнения в областях с особыми точками других типов изучались в работах И. Г. Петровского, В. П. Михайлова, В. А. Кондратьева, Кона (J. J. Kohn) и Ниренберга (L. Nirenberg), В. И. Фейгина, О. А. Олейник и Е. В. Радкевича.

5. Масленникова В. Н., Боговский М. Е. “О параболических уравнениях с условиями Дирихле на всей границе”

Пусть $\psi_+(x) > 0$ и $\psi_-(x) < 0$ в ограниченной области $S \subset \mathbb{R}^n$, причем $\psi_\pm(x) \in C(\overline{S})$ и $\psi_\pm|_{\partial S} = 0$. В области $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \psi_-(x) < t < \psi_+(x), x \in S\}$ рассматривается равномерно параболическое уравнение

$$(1) \quad u_t - \text{div}_x(A(x, t)\nabla_x u) + (b(x, t), \nabla_x u) + c(x, t)u = f(x, t)$$

с положительно определенной матрицей $A(x, t)$. Предполагается, что коэффициенты A_{ij} , b_i , $c \in L_\infty(\Omega)$ и, кроме того, $\frac{\partial A_{ij}}{\partial t} \in L_\infty(\Omega_-)$, где $\Omega_- = \{(x, t) \in \Omega : t < 0\}$. И пусть $H(\Omega)$ – гильбертово пространство с нормой $\|u\|_{H(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D_x^\alpha u(x, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|u_t(x, t)\|_{L_2(\Omega_-)}$. Такая необычная норма позволяет определить обобщенное решение с не более чем непрерывной $\partial\Omega$. Через $\dot{H}(\Omega)$ обозначим пополнение $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ по норме $H(\Omega)$. Требованием $u \in \dot{H}(\Omega)$ задается краевое условие для (1). Это означает, например, что $u|_{S_-} = 0$ в случае липшицевости $\psi_-(x)$ и $u|_{S_+ \setminus \Gamma_+} = 0$ в случае $\psi_+(x) \in C^1(S)$, где $S_\pm = \{(x, t) \in \partial\Omega : t = \psi_\pm(x), x \in S\}$,

$\Gamma_+ = \text{Int}\{(x, t) \in S_+ : \nu_t = +1\}$, ν_t – проекция на ось t единичной внешней нормали ν к $\partial\Omega$, $\text{Int } M$ – внутренность подмножества $M \subset S_+$. Так, например, если Ω – шар в $\mathbb{R}^{n+1}$, то Γ_+ пусто и из условия $u \in \dot{H}(\Omega)$ следует условие Дирихле на всей границе $u|_{\partial\Omega} = 0$. Обобщенным решением называется функция $u \in \dot{H}(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению (1) в смысле обычного интегрального тождества, не содержащего u_t , с пробными функциями из $\dot{C}^\infty(\Omega)$.

ТЕОРЕМА. Для любой $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение $u(x, t) \in \dot{H}(\Omega)$ и имеет место соответствующая оценка.

При дополнительном предположении $D_x^\alpha A_{ij} \in L_\infty(\Omega_-)$, $|\alpha| = 1$, из теоремы вытекают два следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $n = 1$ обобщенное решение $u(x, t)$ принадлежит $W_{2,x,t}^{2,1}(\Omega_-)$. Поэтому для $\psi_-(x)$, допускающей вложение $W_{2,x,t}^{2,1}(\Omega_-) \hookrightarrow C(\overline{\Omega_-})$, краевое условие $u|_{S_-} = 0$ выполняется в смысле $C(\overline{\Omega_-})$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $n \geq 2$, $A_{ij} \in C(\overline{\Omega_-})$ и каждое сечение Ω_- гиперплоскостью $t = \text{const}$ является выпуклым подмножеством в $\mathbb{R}^n$, то обобщенное решение $u(x, t) \in W_{2,x,t}^{2,1}(\Omega_-)$.

6. Денисов В. Н. “Об асимптотике при больших значениях времени решений задачи Коши для параболических уравнений”

ТЕОРЕМА. Пусть $u_0(x)$ – непрерывная в $\mathbb{R}^N$ функция, удовлетворяющая неравенству

$$|u_0(x)| < C(1 + |x|^m) \quad (C > 0, \quad m > 0),$$

и пусть решение $u(x, t)$ задачи Коши для уравнения теплопроводности с начальной функцией $u_0(x)$ обладает при некотором $\nu > 0$ равномерным относительно $x \in \mathbb{R}^N$ пределом

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\nu u(x, t) = A(x).$$

Тогда при $\alpha > 2\nu + m$ для шаровых средних Рисса $S_R^\alpha u_0(x)$ порядка α от $u_0(x)$ существует равномерный относительно x на каждом компакте $K \subset \mathbb{R}^N$ предел

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R^{2\nu} S_R^\alpha u_0(x) = C_1 A(x) \quad (C_1 = \text{const}).$$

Случай ограниченной в $\mathbb{R}^N$ функции был рассмотрен в [1] (при этом $\alpha > 2\nu$). Сформулированная теорема переносится на случай, когда оператор Лапласа заменяется полигармоническим оператором, а также на параболические по Петровскому системы с постоянными коэффициентами.

[1] Денисов В. Н. // ДАН. 1995. Т. 340. № 6. С. 736–738.

7. Киселев О. М. (Уфа) “Базисные функции, связанные с двумерной системой Дирака”

Пусть φ – решение краевой задачи для системы Дирака:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}} & 0 \\ 0 & \partial_z \end{pmatrix} \varphi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & q \\ -\bar{q} & 0 \end{pmatrix} \varphi, \quad E(kz)\varphi|_{|z| \rightarrow \infty} = I,$$

где $E(kz) = \text{diag}(\exp(kz), \exp(\bar{k}\bar{z}))$. Обозначим:

$$(2) \quad (\varphi^{(i)}, \psi^{(j)})_f = \iint_{\mathbb{C}} dz \wedge d\bar{z} (\bar{f}(z, \bar{z}) \varphi_{1i} \bar{\psi}_{1j} + f(z, \bar{z}) \varphi_{2i} \bar{\psi}_{2j}),$$

$$(3) \quad \langle \varphi_{(i)}, \psi_{(j)} \rangle_h = \iint_{\mathbb{C}} dk \wedge d\bar{k} (\bar{\varphi}_{i1} \psi_{j1} \bar{h}(k, \bar{k}) - \bar{\varphi}_{i2} \psi_{j2} h(k, \bar{k})).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\partial^\alpha q, |q|^2 \in L_1 \cap C$, при $|\alpha| \leq 2$, и краевая задача (1) разрешима для $\forall k \in \mathbb{C}$. Тогда любая функция w из $C^1 \cap L_1$ представима в виде:

$$w(z, \bar{z}) = \frac{-i}{\pi} \langle \varphi_{(2)}, \psi_{(2)} \rangle_{\hat{w}},$$

где $\hat{w} = \frac{i}{4\pi} (\varphi^{(2)}, \psi^{(2)})_w$. Здесь ψ – решение задачи, сопряженной к (1) относительно формы (2).

Известно, что интегрирование уравнения Деви–Стюартсона-II (ДС-II):

$$i\partial_t q + 2(\partial_z^2 + \partial_{\bar{z}}^2)q + (g + \bar{g})q = 0, \quad \partial_{\bar{z}} g = \partial_z |q|^2$$

связано с задачей (1). Формулы разложения из теоремы 1 и следующая теорема позволяют решить методом Фурье линеаризованное уравнение ДС-II:

$$i\partial_t U + 2(\partial_z^2 + \partial_{\bar{z}}^2)U + (g + \bar{g})U + (v + \bar{v})q = 0, \quad \partial_{\bar{z}} V = \partial_z (q\bar{U} + \bar{q}U).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть q – решение уравнения ДС-II, удовлетворяющее условиям теоремы 1 при $0 \leq t < T_0 = \text{const}$. Тогда решение линеаризованного на q уравнения ДС-II можно представить в виде:

$$U(z, \bar{z}, t) = -\frac{i}{\pi} \langle \varphi_{(2)}, \psi_{(2)} \rangle_{\hat{U}},$$

где $\hat{U}$ – решение уравнения $\partial_t \hat{U} - 2i(k^2 + \bar{k}^2)\hat{U} = 0$.

8. Скрыпник И. И. (Украина, Донецк) “О гладкости решений вырождающихся параболических уравнений”

В ограниченной цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, рассматривается уравнение

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t}(|u|^{\frac{1}{m}-1}u) - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0, \quad m \geq 1, \quad p \geq 2.$$

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(x_0, t_0) \in S_T = \partial\Omega \times (0, T)$. Для того, чтобы точка (x_0, t_0) была регулярной для уравнения (1), достаточно, чтобы

$$\int_0 \left\{ \frac{C_p(B(x_0, r) \setminus \Omega)}{C_p(B(x_0, r))} \right\}^{\frac{1}{m(p-1)}} \frac{dr}{r} = \infty.$$

Здесь $C_p(E)$ – эллиптическая p -емкость множества $E \subset \mathbb{R}^N$.

Рассмотрим цилиндр $Q_R^\varepsilon = B(x_0, R) \times (t_0 - R^{p-\varepsilon}, t_0 + R^{p-\varepsilon})$. Без ограничения общности считаем, что $u(x, t) = 0$, $(x, t) \in S_T \cap Q_R^\varepsilon$. Пусть M, λ удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{ess\,sup}_{Q_R^\varepsilon} u \leq M, \quad \left\{ \frac{C_p(B(x_0, R/2) \setminus \Omega)}{C_p(B(x_0, R/2))} \right\}^{\frac{1}{m(p-1)}} \leq \lambda \leq 1.$$

Рассмотрим цилиндр $Q_R^\lambda = B(x_0, R) \times \left(t_0 - \left(\frac{K_1}{M\lambda} \right)^{m(p-1)-1} R^p, t_0 + \left(\frac{K_1}{M\lambda} \right)^{m(p-1)-1} R^p \right)$.

Теорема 1 является следствием следующего аналога так называемой леммы о возрастании.

ТЕОРЕМА 2. Справедлива следующая альтернатива: либо

$$(2) \quad \lambda M \leq K_1 R^{\frac{\varepsilon}{m(p-1)-1}},$$

либо $\operatorname{ess\,sup}_{Q_{R/2}^\lambda} u \leq M(1 - K_2\lambda)$.

Очевидным образом из неравенства (2) получаем

$$\operatorname{ess\,sup}_{Q_{R/2}^\varepsilon} u \leq M(1 - \lambda) + K_1 R^{\frac{\varepsilon}{m(p-1)-1}}.$$

Для доказательства теоремы 2 используется вспомогательная функция типа потенциала.

9. Купцов Л. П. (г. Жуковский) “О вырожденных эллиптических уравнениях второго порядка”

Пусть $(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_{2n}, y) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, оператор $L_{2n} = \sum_{j=1}^{2n} A_j^2$ равен сумме квадратов линейно независимых операторов

$$A_{2k-1} = \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}}, \quad A_{2k} = \frac{\partial}{\partial x_k} + cx_{2k-1} \frac{\partial}{\partial y}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Предполагается, что константа $c \neq 0$. Это условие означает, что поля направлений, вдоль которых “дифференцируют” операторы A_j , $1 \leq j \leq 2n$, вполне неголономны в $\mathbb{R}^{2n+1}$: двигаясь только по траекториям этих полей направлений, можно из любой точки пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$ попасть в любую другую его точку.

Для уравнения $L_{2n}u = 0$:

- 1) построено в явном виде фундаментальное решение (ф.р.) $\Phi(x, y; \lambda, \mu)$ с точечной сингулярностью (λ, μ) ;
- 2) получены различные варианты свойства среднего, его обращения и сильного принципа максимума;
- 3) рассмотрены свойства гладкости соответствующего объемного потенциала (см. [1]).

При $n = 1$ рассмотрен более общий оператор $L_2 = A_1^2 + A_2^2$, где

$$A_k = \frac{\partial}{\partial x_k} + a_k(x) \frac{\partial}{\partial y}, \quad k = 1, 2,$$

причем

$$\frac{\partial a_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}(x) \neq 0$$

при $x = (x_1, x_2) \in D$, $D \subset \mathbb{R}^2$.

“Касательным” (в точке $(\xi, \eta) = (\xi_1, \xi_2, \eta)$) к оператору L_2 является оператор

$$\tilde{L}_2 = \tilde{A}_1^2 + \tilde{A}_2^2,$$

где $\tilde{A}_k = \frac{\partial}{\partial x_k} + a_k(x, \xi) \frac{\partial}{\partial y}$, $a_k(x, \xi) = a_k(\xi) + \frac{\partial a_k}{\partial x_1}(\xi)(x_1 - \xi_1) + \frac{\partial a_k}{\partial x_2}(\xi)(x_2 - \xi_2)$ — линейная функция, “касательная” к функции $a_k(x)$ в точке $x = \xi$, $k = 1, 2$. Для оператора $\tilde{L}_2$ явно строится ф.р. $\tilde{\Phi}(x, y; \lambda, \mu)$. Его наличие позволяет применить метод параметрикса для построения ф.р. уравнения $L_2u = 0$.

[1] Купцов Л. П. // Теория функций и приближений. Труды 7-й Саратовской зимней школы. Ч. 2. Саратов: Изд-во СГУ, 1995. С. 20–24.

10. Матросов В. М. “Качественная теория дифференциальных уравнений в банаховых пространствах”