Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, В. З. Энольский, σ -функции (n, s) -кривых,
УМН, 1999, том 54, выпуск 3, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm157>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:29:37

σ -ФУНКЦИИ (n, s) -КРИВЫХ

В. М. БУХШТАБЕР, Д. В. ЛЕЙКИН, В. З. ЭНОЛЬСКИЙ

Пусть $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^g$, $\gamma \in \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ и $m = \begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ \eta & \eta' \end{pmatrix}$, где ω, ω', η и η' такие $g \times g$ -матрицы, что $\det \omega \neq 0$, $\omega^{-1}\omega'$ – симметрична, $\mathrm{Re}(\omega^{-1}\omega')$ – положительно определена и $m \begin{pmatrix} 0 & -1_g \\ 1_g & 0 \end{pmatrix} m^T = \frac{i\pi}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1_g \\ 1_g & 0 \end{pmatrix}$. Рассмотрим систему функциональных уравнений относительно функции ϕ :

$$(1) \quad \begin{aligned} \phi(\mathbf{u} + 2\omega\mathbf{k} + 2\omega'\mathbf{k}'; m) &= \exp\{2(\eta\mathbf{k} + \eta'\mathbf{k}')(\mathbf{u} + \omega\mathbf{k} + \omega'\mathbf{k}')\} \phi(\mathbf{u}; m), \\ \phi(\mathbf{u}; \gamma m) &= \phi(\mathbf{u}; m), \end{aligned}$$

где $\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathbb{Z}^g$. Целые по $\mathbf{u}$ решения (1) называются σ -функциями. Как функции от $\mathbf{u}$ они образуют одномерное линейное пространство [1], [2]. Такие функции имеют прямую реализацию с помощью тета-функций [3].

В настоящей заметке мы покажем, что в случае, когда матрицы (ω, ω') и (η, η') возникают как матрицы периодов канонических голоморфных и мероморфных дифференциалов на римановой поверхности алгебраической кривой, σ -функция допускает представление в окрестности $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ в виде ряда по $\mathbf{u}$, коэффициенты которого являются полиномами от констант определяющих кривую.

Пусть n и s – пара взаимнопростых целых чисел, таких что $s > n \geq 2$. Натуральные числа $\{w_1, w_2, \dots\}$ не представимые в виде $an + bs$, где a и b – неотрицательные целые числа, образуют последовательность Вейерштрасса длины $g = \frac{(n-1)(s-1)}{2}$. Рассмотрим класс плоских невырожденных кривых рода g вида

$$f(x, y; \boldsymbol{\lambda}) = y^n - x^s - \sum_{\alpha, \beta} \lambda_{\alpha n + \beta s} x^\alpha y^\beta = 0,$$

где $0 \leq \alpha < s-1$, $0 \leq \beta < n-1$ и $\alpha n + \beta s < ns$. Размерность пространства модулей такого класса равна $d_{n,s} = \frac{(n+1)(s+1)}{2} - \left\lfloor \frac{s}{n} \right\rfloor - 3$. Кривые $V(\boldsymbol{\lambda})$ такого вида называются (n, s) -кривыми. Зададим отображение Абеля $A_r: (V(\boldsymbol{\lambda}))^r \rightarrow \mathbb{C}^g$ при помощи голоморфных интегралов

$$(2) \quad u_i = \sum_{k=1}^r \int_{(x_k, y_k)}^{(\infty, \infty)} du_i(x, y), \quad du_i(x, y) = x^{\alpha_i-1} y^{n-\beta_i-1} \frac{dx}{fy}, \quad i = 1, \dots, g;$$

где $fy = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y; \boldsymbol{\lambda})$ и пара целых чисел α_i и β_i представляет i -й элемент последовательности Вейерштрасса $-\alpha_i n + \beta_i s = w_i$. Определим мероморфные дифференциалы $\{dr_1(x, y), \dots, dr_g(x, y)\}$ с помощью соотношения [4]:

$$\frac{d\Omega((z, w), (x, y))}{dx} - \frac{d\Omega((x, y), (z, w))}{dz} = \sum_{k=1}^g \frac{du_i(x, y)}{dx} \frac{dr_i(z, w)}{dz} - \frac{du_i(z, w)}{dz} \frac{dr_i(x, y)}{dx},$$

$\Omega(l(x, y), (z, w)) = 1/((x-z)fy) \cdot \sum_{k=1}^n y^{n-k} (f(z, w; \boldsymbol{\lambda})/w^{n-k+1})_+$, где $(\cdot)_+$ обозначает, что мы учитываем только слагаемые с неотрицательными степенями w . Положим

$$(3) \quad \begin{aligned} (\omega, \omega') &= \frac{1}{2} \left(\oint_{\mathbf{a}_i} du_j(x, y), \oint_{\mathbf{b}_i} du_j(x, y) \right)_{i,j=1, \dots, g}, \\ (\eta, \eta') &= -\frac{1}{2} \left(\oint_{\mathbf{a}_i} dr_j(x, y), \oint_{\mathbf{b}_i} dr_j(x, y) \right)_{i,j=1, \dots, g}, \end{aligned}$$

Работа выполнена при частичной поддержке грантов INTAS 96-770, CRDF UM1-325 и РФФИ 99-01-00090.

где $\{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i\}_{i=1, \dots, g}$ – базис $H_1(V(\boldsymbol{\lambda}), \mathbb{Z})$ с пересечениями $\mathbf{a}_i \circ \mathbf{b}_j = \delta_{i,j}$ и $\mathbf{a}_i \circ \mathbf{a}_j = \mathbf{b}_i \circ \mathbf{b}_j = 0$. Пусть $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, g}$ – неспециальный дивизор. Рассмотрим функцию заданную формулой

$$(4) \quad \sigma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \exp \left\{ \varphi((x_1, y_1), \dots, (x_g, y_g)) \right\} \frac{\det \left(\frac{du_j(x_i, y_i)}{dx_i} \right)_{i,j=1, \dots, g}}{\det(x_i^{j-1})_{i,j=1, \dots, g}} \prod_{i=1}^g x_i,$$

где

$$\varphi((x_1, y_1), \dots, (x_g, y_g)) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{(x_i, y_i)}^{(\infty, \infty)} \Omega((z, w), (x_j, y_j^{(k)})) dz,$$

где для каждой пары (x_j, y_j) набор $\{y_j^{(1)}, \dots, y_j^{(n-1)}, y_j^{(n)} = y_j\}$ представляет собой множество корней $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ уравнения $f(\xi, x_j, \boldsymbol{\lambda}) = 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Функция $\sigma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ является решением системы (1) с матрицами ω, ω', η и η' заданными формулами (3).*

Действительно, правая часть (4) представляет собой симметрическую функцию переменных $(x_1, \dots, x_g)$ и, согласно теореме обращения Якоби, является однозначной функцией вектора $\mathbf{u} = A_g((x_1, y_1), \dots, (x_g, y_g))$; требуемое утверждение следует из свойств периодичности дифференциала $\Omega((x, y), (z, w)) dx$ и теоремы Абеля.

СЛЕДСТВИЕ 1. *В окрестности точки $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ функция $\sigma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ обладает разложением по степеням $u_1, \dots, u_g$ с коэффициентами, представляющими собой полиномы по $\boldsymbol{\lambda}$.*

Окрестность точки $\mathbf{0}$ согласно (2) соответствует окрестности точки $g \cdot (\infty, \infty) \in (V(\boldsymbol{\lambda}))^g$. Вводя параметризацию $(x_j, y_j) = (t_j^{-n}, t_j^{-s}(1 + \sum_{k>0} q_k(\boldsymbol{\lambda}) t_j^k))$, где $q_k(\boldsymbol{\lambda})$ – полиномы, находим из (4), что $\sigma(\mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda}) = 0$. Требуемое разложение представляет собой композицию разложения правой части (4) и рядов обратных (2), и как легко проверить, содержит $\boldsymbol{\lambda}$ только в целых неотрицательных степенях. Введем градуировку $\deg t = 1$, где t – локальный параметр в окрестности (∞, ∞) ; тогда $\deg x = -n$, $\deg y = -s$ и $\deg \lambda_k = -k$. В этой градуировке, согласно (2), $\deg u_k = w_k$, где w_k – соответствующий элемент последовательности Вейерштрасса; в то время как из (4) следует однородность правой части в такой градуировке, причем $\deg \sigma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{(n^2 - 1)(s^2 - 1)}{24}$, что доказывает следствие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Conforto F. Abelsche Functionen und algebraische Geometrie. Berlin: Springer-Verlag, 1956. [2] Маркушевич А. И. Введение в классическую теорию абелевых функций. М.: Наука, 1979. [3] Buchstaber V. M., Enolskii V. Z., Leykin D. V. // Rev. Math. Math. Phys. 1997. V. 10. № 2. P. 1–125. [4] Baker H. F. Abelian functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Институт магнетизма НАН, Киев, Украина

Принято редколлегией
25.05.1999