Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Чистяков, Об отображениях ограниченной вариации со значениями в метрическом пространстве, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 3, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm158>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:11:37

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. Чистяков

В настоящей заметке представлены некоторые новые результаты, касающиеся отображений ограниченной вариации (в том числе и многозначных), определенных на подмножестве вещественной прямой $\mathbb{R}$ и принимающих значения в метрическом пространстве. Один из вопросов, которые будут нас интересовать, – это вопрос о существовании *регулярных* селекций многозначных отображений, имеющих, вообще говоря, невыпуклые образы. В случае выпуклозначных отображений существование непрерывных селекций при весьма общих условиях установлено в работе Майкла [1]. Без предположения о выпуклости значений многозначного отображения непрерывные селекции могут не существовать даже для сжатий, зависящих от двух или более переменных (Хермес, [2]). Здесь будут изучаться невыпуклозначные многозначные отображения одной вещественной переменной.

Рассмотрим функциональное включение вида

$$(1) \quad f(t) \in F(t), \quad t \in I = [a, b] \subset \mathbb{R},$$

где $F: I \rightarrow 2^X$ – заданное многозначное отображение из отрезка I в класс 2^X непустых подмножеств банахова пространства X , подчиненное определенным *условиям регулярности*, о которых будет сказано ниже. Будем искать отображения $f: I \rightarrow X$, удовлетворяющие включению (1) во всех точках $t \in I$ кроме, быть может, счетного их числа (точнее, во всех точках непрерывности F) и подчиняющиеся условиям регулярности в том же смысле, что и F . Такие отображения f будем называть *регулярными селекциями* многозначного отображения F . Условия регулярности, о которых упоминалось ранее, будут выражаться в терминах *ограниченности вариации*. Таким образом, решения функционального включения (1) ищутся в пространствах отображений ограниченной вариации. Поскольку класс всех (по крайней мере) компактных множеств пространства X можно превратить в метрическое пространство относительно метрики Хаусдорфа D , мы сталкиваемся с отображениями ограниченной вариации, принимающими значения в метрическом пространстве.

Поэтому прежде всего рассмотрим отображение $f: I \rightarrow X$, где X – метрическое пространство с метрикой d . Такое отображение f называется *отображением ограниченной Φ -вариации*, где $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – непрерывная, выпуклая вниз функция такая, что $\Phi(\rho) = 0$ только при $\rho = 0$, если

$$(2) \quad V_{\Phi}(f) = \sup_T \sum_{i=1}^m \Phi\left(\frac{d(f(t_i), f(t_{i-1}))}{t_i - t_{i-1}}\right) \cdot (t_i - t_{i-1}) < \infty,$$

где супремум берется по всем разбиениям $T = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b\}$ отрезка $I = [a, b]$. Множество всех отображений из I в X ограниченной Φ -вариации обозначим через $BV_{\Phi}(I; X)$. Обозначим также через $C^{0,1}(I; X)$, $AC(I; X)$ и $BV_1(I; X)$ соответственно множества всех непрерывных по Липшицу (в метрике d) отображений, абсолютно непрерывных отображений и отображений ограниченной (по Жордану) Φ -вариации при $\Phi(\rho) = \rho$, $\rho \geq 0$. Имеют место следующие вложения функциональных пространств:

$$(3) \quad C^{0,1}(I; X) \subset BV_{\Phi}(I; X) \subset BV_1(I; X) \quad \text{и} \quad C^{0,1}(I; X) \subset AC(I; X) \subset BV_1(I; X),$$

а если дополнительно известно, что $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi(\rho)/\rho = \infty$, то

$$(4) \quad C^{0,1}(I; X) \subset BV_{\Phi}(I; X) \subset AC(I; X) \subset BV_1(I; X).$$

В теории вещественных функций ограниченной вариации известны следующие критерии: 1) *критерий Жордана* [3]: $f \in BV_1(I; \mathbb{R}) \iff f$ представима в виде разности двух неубывающих ограниченных функций на I ; 2) *критерий Рисса* [4]: если $\Phi(\rho) = \rho^q$, $q > 1$, то $f \in BV_{\Phi}(I; \mathbb{R}) \iff f \in AC(I; \mathbb{R})$ и производная f' (определенная почти всюду) суммируема на I со степенью q ; 3) *критерий Медведева* [5]: если $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi(\rho)/\rho = \infty$, то $f \in BV_{\Phi}(I; \mathbb{R}) \iff f \in AC(I; \mathbb{R})$ и $\int_a^b \Phi(|f'(t)|) dt < \infty$.

Наш первый результат в этом направлении – это следующая *структурная*

ТЕОРЕМА 1. Если X есть метрическое пространство, то $f \in BV_\Phi(I; X)$ в том и только том случае, когда существуют неубывающая ограниченная функция $\varphi \in BV_\Phi(I; [0, \infty))$ и отображение $g \in C^{0,1}(J; X)$, где $J = \varphi(I)$ есть образ φ , такие, что $f(t) = g(\varphi(t))$ для всех $t \in I$, причем константа Липшица отображения g не превосходит единицы и $V_\Phi(\varphi) = V_\Phi(f)$.

Эта теорема также справедлива, если в ней заменить BV_Φ на $C^{0,1}$ или AC . Используя ее, получаем следующую теорему о компактности в пространствах отображений ограниченной Φ -вариации, которая обобщает известный в теории вещественных функций ограниченной вариации (когда $X = \mathbb{R}$ и $\Phi(\rho) = \rho$) принцип выбора Хелли [3].

ТЕОРЕМА 2. Пусть K есть компактное подмножество метрического пространства X и $\mathcal{F}$ – бесконечное семейство непрерывных отображений из I в K , такое, что $\sup_{f \in \mathcal{F}} V_\Phi(f) < \infty$. Тогда семейство $\mathcal{F}$ содержит последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, которая поточечно на I сходится к некоторому отображению $f \in BV_\Phi(I; X)$ при $n \rightarrow \infty$. Более того, если X – банахово пространство, то условие непрерывности семейства $\mathcal{F}$ излишне. Если же $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi(\rho)/\rho = \infty$, то сходимость f_n к f является равномерной.

Понятие Φ -вариации отображения не только обобщает понятие вариации по Жордану ($\Phi(\rho) = \rho$) и вариации по Риссу ($\Phi(\rho) = \rho^q$, $q > 1$), но и представляет самостоятельный интерес в силу следующей теоремы (ср. с (4)).

ТЕОРЕМА 3. Если X – метрическое пространство и $f \in AC(I; X)$, то найдется такая функция Φ , что $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi(\rho)/\rho = \infty$, $\lim_{\rho \rightarrow 0} \Phi(\rho)/\rho = 0$ и $f \in BV_\Phi(I; X)$.

Многозначное отображение $F: I \rightarrow 2^X$ называется отображением ограниченной Φ -вариации относительно метрики Хаусдорфа D , если величина $V_\Phi(F)$, определяемая так же, как в (2), с заменой d на D , конечна. Теперь мы можем сформулировать теорему о существовании регулярных селекций многозначных отображений ограниченной вариации.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X – банахово пространство и многозначное отображение $F \in BV_\Phi(I; 2^X)$ имеет компактный график $\text{Graph}(F) = \{(t, x) \in I \times X \mid x \in F(t)\}$. Тогда для всех $t_0 \in I$ и $x_0 \in F(t_0)$ найдется регулярная селекция $f \in BV_\Phi(I; X)$ отображения F (другими словами, решение включения (1)) такая, что $f(t_0) = x_0$ и $V_\Phi(f) \leq V_\Phi(F)$. Если дополнительно известно, что F непрерывно или $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \Phi(\rho)/\rho = \infty$, то селекция f также непрерывна и включение (1) имеет место для всех $t \in I$.

Результат теоремы 4 дополняется следующим утверждением, принадлежащим Мордуховичу [6]: если в теореме 4 многозначное отображение F липшицево относительно метрики Хаусдорфа D , то оно имеет регулярную липшицеву селекцию. Таким образом, все многозначные отображения из шкалы пространств (3) и (4) обладают регулярными селекциями из того же класса отображений ограниченной вариации, что и само многозначное отображение.

Наконец, отметим, что представленные результаты (теоремы 1–4) обобщают результаты, полученные автором ранее для более специальных классов отображений ограниченной вариации ([7], [8]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Michael E. A. // Ann. Math. 1956. V. 63. №2. P. 361–382; V. 64. № 3. P. 562–580; 1957. V. 65. № 2. P. 375–390. [2] Hermes H. // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 29. №3. P. 535–542. [3] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. [4] Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. [5] Медведев Ю. Т. // УМН. 1953. Т. 8. №6. С. 115–118. [6] Мордухович Б. Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988. [7] Chistyakov V. V. // J. Dynam. Control Systems. 1997. V. 3. №2. P. 261–289. [8] Чистяков В. В. // Матем. сб. 1998. Т. 189. №5. С. 153–176.

Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: chistyakov@mm.unn.ac.ru

Принято редколлегией
23.04.1999