Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Ибрагимов, Работы Р. Л. Добрушина о процессах Маркова, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 5–9

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1581>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 14:58:03

СТАТЬИ О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ДЕЯТЕЛЬНОСТИ Р. Л. ДОБРУШИНА

РАБОТЫ Р. Л. ДОБРУШИНА О ПРОЦЕССАХ МАРКОВА

И. А. ИБРАГИМОВ

Это направление относится к начальному периоду деятельности Р. Л. Добрушина, “годам ученичества”; в этой области им написано чуть более 10 работ, и многие из них послужили началом больших исследований, продолжающихся и поныне, или явились открытием нового неожиданного явления.

Ряд работ этого периода, [1], [3], [4], [12], [13], посвящен изучению однородных процессов Маркова с конечным или счетным множеством состояний в терминах производных вероятностей перехода $p'_{ij}(t)$ в нуле (плотностей перехода): $a_{ij} = p'_{ij}(0)$, $i \neq j$; $a_i = -p'_{ii}(0)$. В работе [3] указано обобщение дифференциальных уравнений Колмогорова. В [1], [4] найдены условия регулярности процесса, т.е. условия, когда траектории процесса не имеют разрывов второго рода.

В работе [12] Р. Л. Добрушин построил пример марковского однородного процесса со счетным числом состояний, все состояния которого мгновенны, т.е. все $a_i = \infty$ (одновременно и независимо аналогичный пример нашли Феллер и Маккин [34]). Процессы с конечным числом состояний мгновенных состояний не имеют. Ранее А. Н. Колмогоров построил пример однородного марковского процесса с одним мгновенным состоянием, а П. Леви [24] считал, что процессов, все состояния которых мгновенны, не бывает (см. также [35]).

Ряд этих результатов Добрушина в том или ином виде вошел в известные монографии Чжуна [36] и Гихмана и Скорохода [17].

Однако наибольшую известность из работ “марковского” цикла, пожалуй, приобрели работы, посвященные предельным теоремам для цепей Маркова [2], [5], [9]–[11].

Студенческая работа [2] была посвящена новому направлению в теории предельных теорем для цепей Маркова. Классические предельные теоремы для цепей Маркова касались условий сходимости к нормальному закону. Следуя сложившийся к тому времени теории суммирования независимых величин [16], в работе [2] Р. Л. Добрушин ставит и решает для сравнительно частной схемы цепей Маркова задачу описания всех возможных предельных распределений. Именно, он рассматривает последовательность серий случайных величин $(\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn})$, связанных в пределах каждой серии в однородную цепь Маркова с двумя состояниями 0 и 1, и матрицей вероятностей перехода $\begin{pmatrix} p_n & 1 - p_n \\ q_n & 1 - q_n \end{pmatrix}$. Р. Л. Добрушин находит для сумм $\zeta_n = \sum_{k=1}^n \xi_{nk}$ при должной нормировке все возможные предельные распределения (их оказывается семь, в случае

независимых величин – три) и указывает условия сходимости к каждому распределению.

Работа имеет совершенно законченный характер и поставленная задача решена полностью. А. Н. Колмогоров в своем обзоре работ последних лет в области предельных теорем [23, с. 373] уделит значительное место этой работе Роланда Львовича (все-го А. Н. Колмогоров цитирует 16 работ), а в Math. Rev. Chung пишет, что “the mass of results looks formidable”. О дальнейшем развитии этих исследований см. [30].

Работы [5], [9]–[11] дают в определенном смысле законченное решение старой задачи о применимости центральной предельной теоремы к неоднородным цепям Маркова. Поучительна сама история задачи. Она восходит к работе 1910 г. самого А. А. Маркова (см. [29, с. 465–509]. Марков рассматривал случайные величины $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$, связанные в цепь Маркова с двумя состояниями 0 и 1, и искал условия, при выполнении которых нормированные суммы

$$\bar{S}^{(n)} = (S^{(n)} - \mathbb{E}S^{(n)})(DS^{(n)})^{-1/2}, \quad S^{(n)} = \sum_{i=1}^n X_i^{(n)}$$

асимптотически нормальны при $n \rightarrow \infty$. Положим для более общего случая цепи с N состояниями $(a_{i1}^{(n)}, \dots, a_{iN}^{(n)})$

$$\alpha^{(n)} = \min_{i,j,k} \mathbb{P}\{X_i^{(n)} = a_{ik}^{(n)} \mid X_{i-1}^{(n)} = a_{i-1j}^{(n)}\}.$$

Марков доказал (для $N = 2$), что суммы $\bar{S}^{(n)}$ асимптотически нормальны, если $\alpha^{(n)} \geq \alpha > 0$, оставив трудную задачу об ослаблении наложенных им ограничений другим исследователям. В ряде трудных и глубоких работ 1922, 1926, 1928 гг. С. Н. Бернштейн последовательно замечал ограничение $\alpha^{(n)} \geq \alpha > 0$ условиями $\alpha^{(n)}n^{1/7-\varepsilon} \rightarrow \infty$, $\alpha^{(n)}n^{1/5-\varepsilon} \rightarrow \infty$, $\alpha^{(n)}n^{1/3-\varepsilon} \rightarrow \infty$. Более того, в работе 1926 г. Бернштейн построил пример цепи с двумя состояниями и $\alpha^{(n)} \asymp n^{-1/3}$, для которой предельное распределение $\bar{S}^{(n)}$ отлично от нормального. Наконец, в 1947 г. Н. А. Сапогов [31] доказал центральную предельную теорему в условиях $\alpha^{(n)}n^{1/3} \rightarrow \infty$. Тем самым, для цепей с двумя состояниями задача Маркова получила законченное решение.

Глубокое обобщение методов Бернштейна позволило Ю. В. Линнику в работах 1948–49 гг. доказать асимптотическую нормальность сумм $\bar{S}^{(n)}$ для цепей Маркова с произвольным конечным числом состояний N при условии $\alpha^{(n)}n^{1/3-\varepsilon} \rightarrow \infty$ (и все $a_{ij}^{(n)}$ равномерно ограничены); о работах С. Н. Бернштейна и Ю. В. Линника см. [14], [25].

Эта история и связанные с ней имена дают ясное представление, с какими серьезными трудностями должен был столкнуться Роланд Львович, поставив своей целью довести эти замечательные, но во многом еще очень не окончательные результаты до уровня сравнимого, например, с теорией суммирования независимых величин конца 40-х годов [16].

В работах [5], [9]–[11] Р. Л. Добрушин рассматривает нормированные суммы $\bar{S}^{(n)}$ вещественнозначных случайных величин $X_i^{(n)} = X_i^{(n)}(\omega_i^{(n)})$, определенных на неод-

нородной цепи $\{\omega_i^{(n)}\}$ с произвольным множеством состояний. Классический коэффициент $\alpha^{(n)}$ для таких цепей уже не определен, и требуется найти правильную постановку задачи. Для марковской переходной функции $P(x, A)$ Добрушин определяет коэффициент эргодичности

$$\alpha(P) = 1 - \sup_{x, y, A} |P(x, A) - P(y, A)|.$$

Для цепи $\{\omega_i^{(n)}\}$ с переходными функциями $P_i^{(n)}$ определяется коэффициент эргодичности

$$\alpha^{(n)} = \min_i \alpha(P_i^{(n)}),$$

который и оказывается “правильной” характеристикой цепи при доказательстве предельных теорем. Например (см. [10], [11]), суммы $\bar{S}^{(n)}$ асимптотически нормальны, если:

- 1) величины $X_i^{(n)}$ равномерно ограничены;
- 2) дисперсии $DX_i^{(n)} \rightarrow \infty$;
- 3) $\alpha^{(n)} n^{1/3} \rightarrow \infty$.

Если же $\alpha^{(n)} n^{1/3} \asymp 1$, то предельное распределение может оказаться даже не безгранично делимым. Весьма глубокое обобщение результатов Маркова–Бернштейна–Сапогова–Линника! Добрушин рассмотрел также случай неограниченных величин и нашел для них аналог условия Линдеберга.

Относительно непосредственного развития работ [10], [11] см., например, [27], [28], [33] и литературу там. Как это обычно бывает, существенное продвижение в решении действительно трудной и глубокой задачи связано с введением новых понятий и созданием новых методов, значение которых далеко выходит за рамки оригинальной проблемы. В этом смысле работы [10], [11] оказали значительное влияние на развитие теории предельных теорем для зависимых величин вообще. Коэффициент эргодичности Добрушина послужил прототипом введенных позднее различных коэффициентов слабой зависимости; использование предельных теорем для мартингалов стало впоследствии мощным методом доказательства предельных теорем для зависимых величин (см. [18], [19], [26], [15]). В общем работы Р. Л. Добрушина по предельным теоремам для цепей Маркова оказали весьма значительное прямое и косвенное воздействие на дальнейшее развитие теории суммирования зависимых величин (например, работы [20]–[22] в определенной степени написаны под влиянием изучения [10], [11]).

В небольшой заметке [7] Роланд Львович, изучая предельное распределение аддитивных функционалов $\sum_{k=1}^n f(S_k)$, определенных на простейшем случайном блуждании по целым точкам прямой, обнаружил следующий замечательный феномен: если $\sum f(n) = c \neq 0$, то предельное распределение $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n f(S_k)$ совпадает с распределением $c|\xi|$, ξ – стандартная нормальная величина (результат, ранее обнаруженный В. Феллером для специальных $f(\cdot)$); если же $c = 0$, то нормировать уже нужно множителем $n^{-1/4}$ и предельное распределение – это распределение $\eta\sqrt{|\xi|}$, ξ, η – независимые нормальные величины с нулевым средним. Это наблюдение послужило отправной точкой для замечательных исследований А. В. Скорохода (см. [32], где авторы различают “1-й и 2-й случаи Добрушина”, см. также [15]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Добрушин Р. Л. Об условиях регулярности стационарного процесса со счетным множеством состояний // УМН. 1952. Т. 7. № 6. С. 185–191.
- [2] Добрушин Р. Л. Предельные теоремы для цепей Маркова с двумя состояниями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1953. Т. 17. С. 291–330.
- [3] Добрушин Р. Л. Обобщение уравнений Колмогорова для процессов Маркова с конечным числом состояний // Матем. сб. 1953. Т. 33. С. 576–596.
- [4] Добрушин Р. Л. Условия регулярности процессов Маркова с конечным числом состояний // Матем. сб. 1954. Т. 34. С. 541–556.
- [5] Добрушин Р. Л. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102. С. 5–8.
- [6] Добрушин Р. Л. Лемма о пределе сложной случайной функции // УМН. 1955. Т. 10. № 2. С. 157–159.
- [7] Добрушин Р. Л. Две предельные теоремы для простейшего случайного блуждания на прямой // УМН. 1955. Т. 10. № 3. С. 139–146.
- [8] Добрушин Р. Л. О законе Пуассона для распределения частиц в пространстве // Укр. матем. журн. 1956. Т. 8. С. 127–134.
- [9] Добрушин Р. Л. О центральной предельной теореме для неоднородных цепей Маркова // Докл. АН СССР. 1956. Т. 108. С. 1004–1006.
- [10] Добрушин Р. Л. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. I // Теория вероятн. и ее примен. 1956. Т. 1. № 1. С. 272–289.
- [11] Добрушин Р. Л. Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. II // Теория вероятн. и ее примен. 1956. Т. 1. № 4. С. 365–425.
- [12] Добрушин Р. Л. Процесс Маркова со счетным числом состояний, все состояния которого мгновенны // Теория вероятн. и ее примен. 1956. Т. 1. № 4. С. 481–485.
- [13] Добрушин Р. Л. Некоторые классы однородных цепей Маркова со счетным числом состояний // Теория вероятн. и ее примен. 1957. Т. 2. № 3. С. 377–380.
- [14] Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. IV. Теория вероятностей. Математическая статистика. М.: Изд-во АН СССР, 1964.
- [15] Бородин А. Н. Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий // Труды МИАН. СПб: Наука, 1994.
- [16] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.–Л.: ГИИТТЛ, 1949.
- [17] Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. II. М.: Наука, 1973.
- [18] Гордин М. И. О центральной предельной теореме для стационарных процессов // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188. № 4. С. 739–741.
- [19] Гордин М. И., Лифшиц Б. А. Центральная предельная теорема для стационарных процессов Маркова // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239. № 4. С. 766–767.
- [20] Ибрагимов И. А. Некоторые предельные теоремы для стационарных в узком смысле вероятностных процессов // Докл. АН СССР. 1959. Т. 125. № 4. С. 711–714.
- [21] Ибрагимов И. А. Некоторые предельные теоремы для стационарных процессов // Теория вероятн. и ее примен. 1962. Т. 7. № 4. С. 453–456.
- [22] Ибрагимов И. А. Центральная предельная теорема для одного класса зависимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1963. Т. 8. № 1. С. 89–94.
- [23] Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986.
- [24] Lévy P. Systèmes markoviennes et stationnaires; cas dénombrables // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1951. V. 68. P. 327–380.
- [25] Линник Ю. В. Избранные труды. Теория вероятностей. Л.: Наука, 1981.
- [26] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.
- [27] Лифшиц Б. А. О центральной предельной теореме для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова // Теория вероятн. и ее примен. 1978. Т. 23. № 2. С. 295–312.
- [28] Лифшиц Б. А. Принцип инвариантности для слабо зависимых величин // Теория вероятн. и ее примен. 1984. Т. 29. № 1. С. 33–40.
- [29] Марков А. А. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1951.

- [30] Мешалкин Л. Д. Предельные теоремы для цепей Маркова с конечным числом состояний // Теория вероятн. и ее примен. 1958. Т. 3. № 4. С. 361–385.
- [31] Сапогов Н. А. О сингулярных цепях Маркова // Докл. АН СССР. 1947. Т. 58. № 2. С. 193–196.
- [32] Скороход А. В., Слободенюк Н. П. Предельные теоремы для случайных блужданий. Киев: Наукова думка, 1970.
- [33] Статулявичус В. А. Предельные теоремы для сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова. I–III // Литов. матем. журн. 1969. Т. 9. № 2. С. 345–361; 1969. Т. 9. № 3. С. 635–672; 1970. Т. 10. № 1. С. 161–169.
- [34] Feller W., McKean H. P., Jr. A diffusion equivalent to a countable Markov chain // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1956. V. 42. P. 351–354.
- [35] Chung K. L. Some new developments in Markov chains // Trans. Amer. Math. Soc. 1956. V. 81. № 1. P. 195–210.
- [36] Чжун Кай Лай. Однородные цепи Маркова. М.: Мир 1964.