Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Печерский, Ю. М. Сухов, Идеи Р. Л. Добрушина в теории сетей обслуживания, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 2, 25–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1585>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:48:03

ИДЕИ Р. Л. ДОБРУШИНА В ТЕОРИИ СЕТЕЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Е. А. ПЕЧЕРСКИЙ, Ю. М. СУХОВ

Насколько нам известно, Роланд Львович Добрушин начал активно интересоваться теорией сетей обслуживания с 1971 года. С чисто математической точки зрения эта теория служила для него естественной областью применения многочисленных идей, которые он успешно разрабатывал в тот период (и позднее) в связи с задачами равновесной и неравновесной статистической механики и теории марковских процессов с локальным взаимодействием. Позднее обе теории он объединил под общим названием теории многокомпонентных случайных систем. В частности, важную формирующую

роль в добрушинском подходе к теории сетей сыграли его работы [3]–[5], а впоследствии [6]. Следует сказать, что его влияние на становление теории сетей обслуживания много шире, чем это можно было бы проследить по его публикациям в этой области. При этом влияние его идей и подходов испытывали на себе не только сотрудники его лаборатории и его ученики.

Роланд Львович с самого начала ясно понимал важность многочисленных приложений возникающей в те годы теории, основанной на строгих результатах в статистической физике. Стоит отметить, что в течение 70-х годов основная масса специалистов в теории очередей продолжала работать в традиционном направлении, исследуя очереди к изолированному обслуживаемому устройству. Существовало довольно распространенное мнение, что сети с очередями представляют слишком громоздкий объект для строго математического исследования и создание здесь содержательной теории есть задача скорее завтрашнего дня. Действительно, до середины 70-х годов в теории сетей была известна единственная нетривиальная модель, поддающаяся до определенной степени строгому изучению, – модель Джексона [15], [16]. Дальнейшее продвижение было также связано с рядом ограничений на модели, которое затрудняло их применение (см. [14], [17], [18], а также обзор [13]).

Мы дадим очень короткое описание сети, изученной Джексоном, и его результатов. Сеть обслуживания проще всего мыслить как некоторый граф с ориентированными ребрами. Имеются случайные потоки требований (клиентов), приходящие на некоторые из узлов графа. Требование, пришедшее в некоторый узел, имеет заданный маршрут по вершинам графа, начинающийся в узле, в который требование пришло. Маршрут согласован с ориентацией ребер, соединяющих вершины маршрута. Требования обслуживаются в узлах своих маршрутов по тем или иным алгоритмам. Время обслуживания в каждом посещаемом узле есть случайная величина, зависящая в общем случае от маршрута. Джексон изучал сеть с независимыми пуассоновскими входными потоками и экспоненциально распределенными временами обслуживания, которые зависят только от узла. Алгоритм обслуживания в каждом узле задавался естественным правилом “первым пришел – первым обслуживаешься” (FCFS). Маршруты в модели Джексона задаются с помощью субстохастической матрицы (p_{ij}) , где p_{ij} – это вероятность перехода из узла с номером i в узел с номером j . Если обозначить интенсивность входного потока в узел j символом λ_j , то можно написать систему уравнений для интенсивностей ρ_j потоков, поступающих на каждый узел j , в которых кроме входного потока извне учтены также потоки в узел j из узлов, связанных с узлом j :

$$(1) \quad \rho_j = \lambda_j + \sum_{1 \leq i \leq K} \rho_i p_{ij}, \quad j = 1, \dots, K,$$

где K – число узлов в сети. По аналогии с классическими системами массового обслуживания, состоящими из одного прибора, естественно предположить, что сеть не перегружена, если

$$(2) \quad \rho_j < \mu_j, \quad j = 1, \dots, K,$$

где μ_j – интенсивность обслуживания на узле j . Джексон доказал этот и серию других фактов о сетях, носящих его имя. Наиболее удивительным оказался тот факт, что в стационарном режиме сеть Джексона работает (с точки зрения длин очередей в узлах), как система K изолированных одноканальных систем с пуассоновским входным потоком с интенсивностями ρ_j и экспоненциально распределенными временами обслуживания со средним μ_j^{-1} . Это тем более поразительно, что “полные” потоки клиентов, поступающих на серверы, вообще говоря, зависимы и отнюдь не являются пуассоновскими (распределение потоков в сети Джексона по сей день неизвестно).

Нетрудно понять ограниченность этих моделей. Добрушин рассматривал их как модели аналогичные точно-решаемым моделям статистической физики. Поэтому он, хотя и предлагал, ослабляя условия на сеть, исследовать область, где еще действуют законы, открытые Джексоном, считал, что основные усилия здесь следует направить на построение качественной теории сетей (см. [2], [6], [8]), в которой законы Джексона могли бы появиться уже только в асимптотическом виде при том или ином предельном переходе. Понимая теорию сетей обслуживания как один из объектов теории многокомпонентных случайных систем, он предлагал использовать здесь термодинамический и гидродинамический предельные переходы. Он также подчеркивал, что большая группа симметрий, обычно присущая сетям обслуживания, позволяет использовать развитый в рамках статистической физики метод среднего поля. Мы остановимся здесь на нескольких результатах, полученных с использованием этих и других идей, активно эксплуатируемых в статистической физике.

В работе [8] Добрушин сделал первый шаг в использовании термодинамического предельного перехода для изучения проблемы устойчивости работы большой сети в стационарном режиме. Формально это сводится к исследованию единственности стационарного режима, что осмысленно только для бесконечных сетей. В этой работе исследовалась одномерная бесконечная сеть и было показано, что при малой интенсивности потока сообщений стационарный режим единственный. Развитие эта деятельность нашла в работе [20], где исследовалась бесконечная сеть обслуживания с неединственным стационарным режимом работы.

Добрушин настойчиво пропагандировал также использование гидродинамического предельного перехода при исследовании сетей обслуживания. Не существует его работ на эту тему, однако эта область активно развивается. По-видимому первый шаг был сделан в работе [21]. Это один из примеров его влияния, которое невозможно измерить опубликованными или оставшимися в рукописи его работами. О плодотворности этой идеи можно судить по количеству публикаций, использующих этот метод (см. [22]).

Его активная пропаганда метода среднего поля также дала плоды, которые нельзя измерить только публикациями. Но в этой области имеются опубликованные его работы [6], [2]. Мы остановимся на последней работе, в которой Роланд Львович принял участие уже в последние месяцы жизни.

Рассмотрим систему с K серверами $S_1, \dots, S_K$, в которую поступает пуассоновский поток интенсивности λK , $\lambda < 1$. В момент поступления клиент производит неудачу выбор (с возвращением) двух серверов среди $S_1, \dots, S_K$, а затем поступает на обслуживание в тот из двух отобранных, где длина очереди меньше. Длительности

обслуживания предполагаются независимыми и экспоненциально распределенными, со средним 1. Если n_j – это число клиентов, стоящих в очереди к устройству j , то в стационарном режиме

$$(3) \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \Pr(n_j > m) = (\lambda)^{2^m}.$$

Для сравнения рассмотрим случай, когда клиент просто выбирает наудачу один из серверов $S_1, \dots, S_K$ (это эквивалентно ситуации, где имеется один изолированный сервер, на который поступает поток интенсивности λ). В этом случае

$$(4) \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \Pr(n_j > m) = \lambda^m, \quad m \geq 1.$$

Это означает, что даже сравнительно “либеральное” управление в сети позволяет резко уменьшить вероятность длинных очередей.

С конца 80-х Добрушин начинает интересоваться теорией больших уклонений. Он предлагает совершенно новый взгляд на исследования больших флуктуаций в сетях обслуживания. Развиваемый к этому времени подход приводил к исследованию принципа больших уклонений для кусочно однородных блужданий в конечномерных пространствах или их частях. Возникающие здесь трудности не преодолены в полной мере до сих пор. Хотя Роланд Львович опубликовал одну работу в этом направлении [1], он также предложил совершенно новый подход в этих проблемах. Его идея состояла в том, чтобы выразить изучаемый функционал в терминах входного потока. Тогда событие, состоящее в том, что исследуемый функционал примет большое значение, также выражается в терминах входного потока. Это выражение может быть довольно сложным и очень редко имеет явную форму, однако такое сведение приводит к принципу больших уклонений для входного потока, что очень часто много проще упомянутого выше принципа больших уклонений для кусочно постоянных блужданий. Этим методом в работе [12] была изучена простейшая сеть, а именно, тандем. Мы приведем здесь этот результат. Входной поток в систему типа тандем может быть описан как последовательность независимых случайных векторов $(\xi_n^1, \xi_n^2, \tau_n)$. Здесь τ_n – это интервал времени между приходами $(n-1)$ -го и n -го клиентов. В [12] величины τ_n распределены экспоненциально с параметром λ . Случайные величины ξ_n^1, ξ_n^2 определяют времена обслуживания для n -го клиента на первом и втором приборах, соответственно. В работе предполагается, что все три компоненты каждого вектора независимы. Главное условие на случайные величины ξ_n^1 и ξ_n^2 состоит в следующем. Существуют положительные θ_+^1 и θ_+^2 такие, что для любых $\theta < \theta_+^i$ конечно преобразование Лапласа:

$$(5) \quad \varphi_i(\theta) = \mathbb{E} e^{\theta \xi_1^i} < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Предполагается также, что система не перегружена, т.е. существует стационарный режим ее работы. Для этого требуется, чтобы выполнялись следующие два неравенства:

$$(6) \quad \lambda \varphi_i'(0) < 1, \quad i = 1, 2.$$

В работе изучается функционал ω , называемый виртуальным временем ожидания. Это случайная величина, равная времени ожидания клиента, если бы он пришел в фиксированный момент времени. Так как система рассматривается в стационарном режиме, то распределение этой величины не зависит от выбранного момента времени. Результат работы следующий. Для любого $a > 0$

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \Pr(\omega > an) = -\min\{\beta_1, \beta_2\},$$

где β_1 и β_2 являются корнями уравнений

$$(8) \quad \theta = \lambda[\varphi_i(\theta) - 1], \quad i = 1, 2.$$

В этом результате виден также эффект, который на инженерном языке называется “узкое место”. Большие отклонения суммарного времени ожидания в тандеме совпадают с большими отклонениями на “худшем” обслуживающем устройстве, как если бы он работал независимо без другого устройства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Blinovskiy V. M., Dobrushin R. L. Process level large deviations for a class piece-wise homogeneous random walks // The Dynkin Festschrift. Markov Processes and Their Applications / ed. M. I. Freidlin. Ser. Progress in Probability. V. 50. Boston: Birkhauser, 1994. P. 1–60.
- [2] Введенская Н. Д., Добрушин Р. Л., Карпелевич Ф. И. Система обслуживания с выбором наименьшей из двух очередей – асимптотический подход // Пробл. передачи информ. 1996. Т. 32. № 1. С. 20–36.
- [3] Добрушин Р. Л. О законе Пуассона для распределения частиц в пространстве // Укр. матем. журн. 1956. Т. 8. № 2. С. 127–134.
- [4] Добрушин Р. Л. Марковские процессы с большим числом локально взаимодействующих компонент: существование предельного процесса и его эргодичность // Пробл. передачи информ. 1971. Т. 7. № 2. С. 70–87.
- [5] Добрушин Р. Л. Марковские процессы с большим числом локально взаимодействующих компонент: обратимый случай и некоторые обобщения // Пробл. передачи информ. 1971. Т. 7. № 3. С. 57–66.
- [6] Добрушин Р. Л., Сухов Ю. М. Асимптотическое исследование звездообразных сетей коммутации сообщений с большим числом радиальных лучей // Пробл. передачи информ. 1976. Т. 12. № 1. С. 70–94.
- [7] Добрушин Р. Л., Сухов Ю. М. Временная асимптотика для некоторых вырожденных моделей эволюции систем с бесконечным числом частиц // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем., Т. 4. М.: ВИНТИ, 1979. С. 147–254.
- [8] Добрушин Р. Л., Прелов В. В. Асимптотический подход к изучению сетей коммутации сообщений с большим числом частиц // Пробл. передачи информ. 1979. Т. 15. № 1. С. 61–73.
- [9] Добрушин Р. Л. Уравнение Власова // Функц. анализ и его прилож. 1979. Т. 13. № 2. С. 29–49.
- [10] Dobrushin R. L. Switching Networks, Gibbsian fields – interconnections // Proc. 1st World Congress of the Bernoulli Society (Tashkent, 1986). Utrecht: VN Sci. Press, 1987. P. 377–393.

- [11] Dobrushin R. L., Kelbert M. Ya., Rybko A. N., Suhov Yu. M. Qualitative methods of queueing networks theory // Stochastic Cellular Systems: Ergodicity, Memory, Morphogenesis / ed. R. L. Dobrushin, V. I. Kryukov, A. L. Toom. Manchester: Univ. Press, 1990. P. 183–224.
- [12] Dobrushin R. L., Pechersky E. A. Large Deviations for Tandem Queuing Systems // J. Appl. Math. Stochastic Anal. 1994. V. 7. P. 301–330.
- [13] Baccelli F., Foss S., Mairess J. Stationary ergodic Jackson networks: results and counter-examples // Stochastic Networks. Theory and Applications / ed. F. P. Kelly, S. Zachary, I. Ziedens. Oxford: Clarendon Press, 1987. P. 377–393.
- [14] Baskett F., Chandy K. M., Muntz R. R., Palacios F. G. Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers // J. Assoc. Comput. Mach. 1975. V. 22. № 2. P. 248–260.
- [15] Jackson J. R. Networks of waiting times // Oper. Res. 1957. V. 5. № 4. P. 518–527.
- [16] Jackson J. R. Jobshop-like queueing systems // Management Sci. 1965. V. 10. № 1. P. 131–142.
- [17] Kelly F. P. Networks of queues // Adv. Appl. Probab. 1976. V. 8. № 2. P. 416–432.
- [18] Kelly F. P. Reversibility and Stochastic Networks. New York: Wiley, 1979.
- [19] Wolf R. N. Stochastic Modelling and Theory of Queues. New York: Prentice–Hall, 1989.
- [20] Кельберт М. Я., Концевич М. А., Рыбко А. Н. О сетях Джексона на счетных графах // Теория вероятн. и ее примен. 1989. Т. 33. С. 358–361.
- [21] Рыбко А. Н., Столяр А. Л. О эргодичности случайных процессов, описывающих открытую сеть обслуживания // Пробл. передачи информ. 1992. Т. 28. С. 199–200.
- [22] Kelly F. P., Williams R. J. (ed.) Stochastic Networks. New York: Springer-Verlag, 1995.