Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Егоров, О конечно-порожденных группах унитарных операторов, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 3, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm159>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:31:56

О КОНЕЧНО-ПОРОЖДЕННЫХ ГРУППАХ УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. В. ЕГОРОВ

В современной алгебре вопрос о существовании точного линейного представления группы решается с помощью *метода расщепляемых координат* [1]. В предлагаемой работе рассматривается новый метод построения точных представлений, использующий понятия топологической динамики.

Пусть G – конечно-порожденная группа, K – компактное метризуемое пространство. Предположим, что группа G действует гомеоморфизмами на компакте K . Напомним, что такое действие называется *дистальным*, если для всякой пары точек $k, k' \in K$ и произвольной последовательности элементов $g_1, g_2, \dots, g_i, \dots \in G$ пределы соответствующих последовательностей сдвигов $g_1 k, g_2 k, \dots, g_i k, \dots$ и $g_1 k', g_2 k', \dots, g_i k', \dots$ различны (если эти пределы существуют). Назовем действие группы G на компакте K *действием без малых орбит*, если существует точка $k \in K$ с такой окрестностью U , что для всякого элемента $g \in G$ найдется некоторая его степень g^m , под действием которой точка k выходит за пределы окрестности U .

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы конечно-порожденная группа могла быть реализована как подгруппа группы унитарных операторов в некотором конечномерном комплексном линейном пространстве, необходимо и достаточно, чтобы она допускала эффективное дистальное действие без малых орбит на некотором компакте.*

Если конечно-порожденная группа реализована как подгруппа группы унитарных операторов $U_n(\mathbb{C})$, то в качестве требуемого действия можно взять ее действие левыми сдвигами на $U_n(\mathbb{C})$. Действительно, пространство $U_n(\mathbb{C})$ компактно и может быть наделено левоинвариантной метрикой. Отсюда следует дистальность действия. Свойство отсутствия малых орбит следует из свойства отсутствия малых подгрупп в $U_n(\mathbb{C})$, так как $U_n(\mathbb{C})$ является группой Ли.

Обратно, если конечно-порожденная группа G действует требуемым образом на компакте K , то она может быть вложена в компактную топологическую метризуемую группу $\hat{G}$, причем это вложение обладает относительным NSS-свойством: существует окрестность единицы в $\hat{G}$, которая не содержит подгрупп из G . Тогда, используя теорему Петера–Вейля и компактность группы $\hat{G}$, можно построить достаточную систему унитарных конечномерных представлений группы G , состоящую из конечного числа представлений. Сумма этих представлений задает точное унитарное конечномерное представление группы G . Для построения вложения $G \subset \hat{G}$ используется конструкция, связанная с действиями на банаховых пространствах. Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА. *Пусть G – конечно-порожденная группа, эффективно почти-периодически действующая на вещественном банаховом пространстве B линейными непрерывными операторами. Почти-периодичность действия означает, что замыкание $\hat{G}_b$ орбиты каждого вектора $b \in B$ компактно. Тогда замыкание естественного вложения G в $\tilde{G} = \prod_{b \in B} \hat{G}_b$ является компактной топологической метризуемой группой.*

Топологическое произведение $\tilde{G}$ компактно согласно теореме Тихонова. Каждая точка этого произведения интерпретируется как отображение, которое ставит в соответствие вектору $b \in B$ некоторый вектор из замкнутой орбиты $\hat{G}_b$. Композиция отображений такого вида снова происходит из некоторой точки пространства $\tilde{G}$. Поэтому пространство $\tilde{G}$ приобретает структуру моноида. Каждый элемент G рассматривается как обратимый линейный оператор и отождествляется с некоторой точкой $\tilde{G}$. Таким образом, мы получаем изоморфное вложение G в $\tilde{G}$. Требуемые свойства замыкания образа этого вложения доказываются с использованием теоремы Банаха–Штейнгауза.

В рассматриваемом нами случае группа G , действующая на компакте K , является подгруппой в обволакивающей полугруппе Эллиса $E(G, K)$. Обволакивающая полугруппа получается

присоединением поточечных пределов преобразований из G . Ввиду дистальности действия полугруппа Эллиса оказывается группой [2]. Это обстоятельство позволяет доказать, что действие группы G на компакте K индуцирует дистальное по отношению к слабой сходимости действия на слабо замкнутой выпуклой оболочке левых сдвигов борелевской вероятностной меры на $E(G, K)$. Существование G -инвариантной вероятностной меры на обволакивающей группе обеспечивается следующим аналогом теоремы Рылль-Нарджевского о неподвижной точке [3].

ЛЕММА. Пусть группа G действует линейно и дистально по отношению к слабой сходимости на слабо компактном выпуклом множестве вероятностных мер. Тогда это действие имеет неподвижную точку.

Инвариантное интегрирование по построенной мере позволяет усреднить метрику, индуцированную на G произвольной метрикой пространства $E(G, K)$, и рассмотреть G как группу изометрий соответствующего пополнения $\bar{G}$.

Действие G на банаховом пространстве непрерывных функций на $\bar{G}$ является почти-периодическим, и упомянутая выше лемма позволяет вложить G в топологическую компактную группу $\hat{G}$. При этом свойство отсутствия малых орбит влечет относительное NSS-свойство для вложения $G \subset \hat{G}$.

Полученный результат можно использовать как признак линейной представимости групп. Подобные методы можно использовать также для исследования вопроса о финитной аппроксимируемости конечно-порожденных групп в тех случаях, когда непосредственное построение достаточной системы подгрупп конечного индекса затруднительно. Доказательство приводимого нами следствия использует теорему Мальцева об аппроксимации.

СЛЕДСТВИЕ. Конечно-порожденная группа финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она эффективно и дистально действует на некотором компакте.

Условие конечной порожденности рассматриваемых групп используется при доказательстве метризуемости пространств, возникающих в процессе доказательства основной теоремы. При этом используется следующий метризационный принцип.

ЛЕММА. Пусть конечно-порожденная группа G действует гомеоморфизмами на компактах K_α , $\alpha \in A$, и пусть $$ – точка произведения $\prod_{\alpha \in A} K_\alpha$. Тогда замыкание орбиты $G*$ метризуемо.*

СЛЕДСТВИЕ. Группа G , допускающая эффективное дистальное действие без малых орбит на некотором компакте, является линейной, т.е. допускает точное матричное представление над некоторым полем Δ .

Последнее следствие вытекает из локальной теоремы Мальцева. В качестве поля Δ можно взять некоторую ультрастепень поля комплексных чисел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. М.: Наука, 1987. [2] Бронштейн И. У. Расширения минимальных групп преобразований. Кишинев: Штиинца, 1975. [3] Ryll-Nardzewski C. // Proc. of the Fifth Berkeley Symp. on Math. Statistics and Probability. V. 2. Berkeley: Univ. of California, 1967. P. 55–61.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией
07.05.1999