Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Заседания Московского математического общества, *УМН*, 1997, том 52, выпуск 3, 181–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1590>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 14:33:44

ЗАСЕДАНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

На заседаниях Московского Математического Общества состоялись следующие научные доклады:

3 декабря 1996 г. Д. В. ТРЕЩЕВ. “Усреднение в быстро-медленных системах. Классический и современный аспекты”.

Быстро-медленной называется система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{y} = \varepsilon f(x, y, \varepsilon), \\ \dot{x} = \omega(y) + \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{T})^n$ – быстрые переменные, $y \in D \subset \mathbb{R}^m$ – медленные переменные, ε – малый параметр.

Классический метод усреднения сопоставляет системе (1) усредненную систему

$$\dot{y} = \varepsilon \langle f \rangle(y), \quad \langle f \rangle(y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{(\mathbb{T})^n} f(x, y, 0) dx.$$

При этом хочется надеяться, что решения усредненной системы близки к проекциям решений исходной системы на пространство медленных переменных.

Надежды оправдываются прежде всего в одночастотном случае ($n = 1, \omega \neq 0$). В многочастотном случае ($n > 1$) ситуацию портят резонансы.

В докладах будет рассказано о некоторых результатах и методах теории усреднения с упором на одночастотные системы.

10 декабря 1996 г. А. Г. СЕРГЕЕВ. “Вихри и уравнения Зайберга–Виттена”.

Уравнения, описывающие вихри, возникли впервые в теории сверхпроводимости и с тех пор появились в различных задачах теоретической физики. В простых случаях они допускают редукцию к известному в дифференциальной геометрии уравнению типа Лиувилля

$$\Delta u = f e^u + g.$$

С другой стороны, как выяснилось в самое последнее время, вихри тесно связаны с уравнениями Зайберга–Виттена, которые позволяют строить новые инварианты гладких 4-мерных многообразий. А именно, уравнения вихрей получаются из уравнений Зайберга–Виттена 2-мерной редукцией.

В докладе рассказано о решении вихревых уравнений, рассеянии вихрей и связи указанных уравнений с уравнениями Зайберга–Виттена.

17 декабря 1996 г. И. М. КРИЧЕВЕР. “Алгебро-геометрические n -ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности”.

В течение более века, начиная с опубликованной в 1810 г. работы Дюпена (Dupin) и Бине (Binet), задача построения n -ортогональных криволинейных систем координат или плоских диагональных метрик была в ряду задач первого ранга в дифференциальной геометрии. Как классификационная задача она была в основном решена в начале этого века. Вехой в истории этой задачи была фундаментальная монография Дарбу.

В начале 80-х было обнаружено, что эта классическая и старая задача имеет глубокие связи и приложения в современной теории интегрируемых квазилинейных систем гидродинамического типа в размерности $(1 + 1)$ и в топологических теориях поля.

В докладе описано алгебро-геометрическое построение n -ортогональных криволинейных систем координат в плоском пространстве. Эти системы выражаются в терминах тета-функции Римана вспомогательных алгебраических кривых. Получены точные формулы для потенциалов алгебро-геометрических метрик Егорова и функции разбиения соответствующих топологических теорий поля.

19 декабря 1996 г. М. А. ШУБИН (Северо-Восточный ун-т, Бостон, США). *“Комплексный анализ и алгебры фон Ноймана”*.

Одно из замечательных открытий фон Ноймана состоит в том, что можно ввести вещественные размерности некоторых бесконечномерных пространств. Среди них, например, пространства L^2 -функций на универсальном накрытии компактного многообразия, инвариантные относительно стандартного действия фундаментальной группы. В недавних работах М. Громова, Г. Хенкина и докладчика выяснилось, что эти размерности играют важную роль в комплексном анализе. Например, они позволяют установить существование бесконечномерного пространства голоморфных L^2 функций на универсальном накрытии компактного строго псевдовыпуклого многообразия с краем и, более общо, на строго псевдовыпуклом многообразии с кокомпактным действием унимодулярной группы Ли.

Для понимания доклада достаточно знаний стандартного материала из университетских курсов комплексного и функционального анализа.

24 декабря 1996 г. Заседание, посвященное 60-летию Д. В. Аносова.

Программа заседания.

1. С. П. Новиков. *Вступительное слово*.
2. В. И. Арнольд. *Усреднение, риманова геометрия и вариационное исчисление в задаче о движении заряженной частицы на поверхности*.
3. А. И. Нейштадт. *Скачки адиабатического инварианта и хаос линии тока в течении Стокса*.
4. В. И. Оселедец. *Классификация двумерных линейных расширений каскада и инвариантные меры*.
5. Л. П. Шильников. *Гомоклинические касания*.

18 февраля 1997 г. А. А. АГРАЧЕВ. *Вокруг задачи Дидоны* (Студенческие чтения).

Классическая задача Дидоны: “Найти кривую заданной длины, окружающую область максимальной площади”, – видимо, древнейшая вариационная задача и одна из самых старых геометрических задач вообще. Ее решение – окружность – также известно с незапамятных времен (историю задачи см. в книжке В. М. Тихомирова “Рассказы о максимумах и минимумах”).

Стоит, однако, рассмотреть “длину” и “площадь” чуть более общие, чем евклидовы, как мы оказываемся в гуще современных исследований и обнаруживаем явления, характерные для большинства, так называемых, неголономных задач. В лекции будет рассказано о недавних результатах и открытых вопросах, а также отмечены связи с теорией особенностей, субримановой геометрией, геометрической теорией управления и другими областями.

25 февраля 1997 г. В. В. ЧЕПЫЖОВ, М. И. ВИШИК. *Аттракторы неавтономных уравнений с частными производными*.

К настоящему времени построена весьма богатая теория аттракторов автономных эволюционных уравнений с частными производными. Неавтономные уравнения изучались менее интенсивно. В докладе будет рассказано о работах авторов в этом направлении. Будут изложены теоремы существования и структуры равномерных аттракторов процессов и семейств процессоров, отвечающих неавтономным эволюционным уравнениям. Зависимость от времени этих уравнений описывается временным символом уравнения. Предполагается, что символ уравнения является трансляционно-компактной функцией в подходящем пространстве. Такой подход приводит к весьма широкому классу уравнений, включающим в виде подкласса почти периодические функции. Большое внимание уделено размерности аттракторов неавтономных уравнений. Для случая квазипериодической зависимости от времени получены оценки сверху и снизу фрактальной размерности аттракторов. При этом обнаруживается эффект зависимости размерности от числа рационально независимых частот квазипериодической функции, который ранее не наблюдался в теории аттракторов автономных уравнений. В случае общей зависимости от времени размерность аттракторов может быть бесконечной. Для исследования таких уравнений авторами предложен метод изучения ε -энтропии аттракторов. В качестве примеров будут рассмотрены: 2D система Навье–Стокса с зависящей от времени внешней силой, системы уравнений реакции-диффузии, гиперболические уравнения с диссипацией с зависящими от времени членами. В заключение был изложен метод построения траекторных аттракторов, позволяющий исследовать уравнения, для

которых не имеет место или не доказана теорема единственности соответствующей задачи Коши, например, 3D систему Навье–Стокса.

4 марта 1997 г. Заседание, посвященное 80-летию Г. Е. Шилова.

Программа заседания.

1. В. М. Тихомиров. *Вступительное слово.*

2. Е. А. Горин, С. Т. Норвидас (Вильнюс). *Универсальные символы.*

Ряд классических неравенств бернштейновского типа означает совпадение нормы некоторого оператора в пространстве целых функций (одного или нескольких переменных) со спектральным радиусом этого оператора. С этой точки зрения, цель доклада – описание наиболее простых, но всех таких ситуаций с позиций абстрактного гармонического анализа.

Для каждого изометрического представления и локально-компактной абелевой группы G операторами банахова пространства и функции q на двойственной группе X , локально принадлежащей алгебре преобразований Фурье–Стилтьеса (такие функции называются символами), естественно определяется оператор $q(u)$. Символ называется универсальным, если норма каждого такого оператора совпадает с его спектральным радиусом.

Оказывается, если группа X связна, то символ универсален тогда и только тогда, когда он представляется в виде произведения характера и плоской волны, т.е. суперпозиции вещественного гомоморфизма и одномерного универсального символа (а за пределами связных групп это не так). Описание одномерных универсальных символов – отдельная аналитическая задача с нетривиальным решением даже в классе комплексных полиномов второй степени.

3. Р. С. Ибрагимов. *Сдвиги гауссовых мер.*

Гауссова мера на бесконечномерном линейном пространстве задается положительно-определенной квадратичной формой на некотором его подпространстве, которое может быть названо подпространством гладких векторов. Поведение меры при сдвигах описывается так: сдвиг на гладкий вектор переводит меру в эквивалентную, тогда как сдвиг на негладкий вектор “чисто сингулярен”: существует множество полной меры (оно может быть названо множеством сингулярности), образ которого при данном сдвиге не пересекается с ним и, в частности, имеет нулевую меру. Разумеется, множество сингулярности зависит от выбора негладкого вектора.

Вопрос: если зафиксировать некоторое несчетное множество негладких векторов, то можно ли подобрать для них общее множество сингулярности?

Этот вопрос наиболее интересен для следующего случая: гауссова мера задается в пространстве обобщенных функций на многообразии, соответствующая квадратичная форма – интеграл Дирихле, а в качестве упомянутого множества негладких векторов рассматривается совокупность всех δ -функций и их линейных комбинаций. К настоящему времени эта задача решена для всех многообразий, кроме двумерных (в этой размерности имеются частичные результаты).

Рассматриваемый вопрос связан с задачами из теории операторных алгебр и представлениями групп токов.

4. *Воспоминания о Г. Е. Шилове.*

18 марта 1997 г. Ю. С. Ильяшенко. *Гипотеза Зейферта и аттрактор Куперберг* (Студенческие чтения).

Гипотеза Зейферта находится на стыке теории дифференциальных уравнений и топологии. Она состоит в том, что *векторное поле без особых точек на трехмерной сфере всегда имеет периодическую траекторию*. Родственная формулировка: *векторное поле без особых точек на полнотории (бублике с внутренней дыркой) всегда имеет замкнутую фазовую кривую*. Аналогичное утверждение для кольца почти очевидно, и будет доказано в докладе. В 1972 г. Пол Швейцер (Бразилия–США) построил сенсационный контрпример к гипотезе Зейферта: S^1 -гладкое векторное поле на полнотории без особых точек и периодических траекторий. Пример Швейцера основан на существовании экзотического S^1 -диффеоморфизма окружности, не имеющего ни периодических точек, ни плотных орбит. Такой диффеоморфизм не может быть S^1 -гладким (Данжуа). В течение 20 лет делались безуспешные попытки построить контрпример к гипотезе Зейферта гладкости выше 2. Наконец, в 1994 году Кристина Куперберг построила бесконечно гладкий контрпример, основанный на простой, поистине олимпиадной идее. С помощью еще более простого трюка Терстон превратил этот пример в аналитический.

В докладе рассказано обо всех этих конструкциях. Знаний, выходящих за пределы второго курса мехмата, не требуется.

25 марта 1997 г. В. М. БУХШТАБЕР. *Функции Клейна, гиперэллиптические Якобианы и интегрируемые системы.*

Цель доклада – представить теорию гиперэллиптических функций Клейна и показать новые возможности, которые она открывает в современных приложениях абелевых функций.

Основы этой теории были заложены Феликсом Клейном. В работе 1888 г. он предложил построение гиперэллиптических аналогов эллиптических функций Вейерштрасса. Большой вклад в эту теорию внес Генри Бейкер, который в работах 1897–1907 гг. открыл ряд замечательных свойств этих функций, далеко продвинув случай рода 2.

Основу доклада составляет цикл работ автора, Д. В. Лейкина и В. З. Энольского (1995–1997 гг.), в которых найдены явные алгебраические соотношения между функциями Клейна и их частными производными для любого рода.

В качестве следствий получен ряд приложений в теории гиперэллиптических Якобианов, и их многообразий Куммера, линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, нелинейных дифференциальных уравнений типа Кортевега–де Фриза и Син-Гордона.

1 апреля 1997 г. С. М. ГУСЕЙН-ЗАДЕ. *Алгебра Верлинде и диаграммы Дынкина критических точек.*

Как известно, полупростые алгебры Ли могут описываться своими диаграммами Дынкина. Такие диаграммы без кратных ребер – это A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 . A – D – E -мистика состоит в том, что ряд не связанных друг с другом (по крайней мере – на первый взгляд) классификационных задач также приводит к A – D – E -классификации и к соответствующим диаграммам. В теории особенностей диаграммы A, D и E соответствуют простым, т.е. не имеющим модулей, критическим точкам функций. При этом соответствия *простая критическая точка* $\mapsto$ *полупростая алгебра Ли* (или, точнее, – соответствующая группа Вейля) и *группа Вейля* $\mapsto$ *критическая точка* имеют естественные описания. Однако, совершенно неясно, почему простые критические точки должны быть во взаимно однозначном соответствии с диаграммами A, D и E . Диаграммы Дынкина определяются для любых (изолированных) критических точек функций, однако, диаграммы непростых критических точек не встречались в теории алгебр Ли и их представлений.

В связи с исследованием моделей конформной теории поля изучались, так называемые, алгебры Верлинде – конечномерные коммутативные ассоциативные алгебры, являющиеся, в некотором смысле, усечениями алгебр представлений полупростых алгебр Ли. Умножение в алгебрах Верлинде описывается некоторыми графами, напоминающими диаграммы Дынкина критических точек. Была высказана гипотеза, что для алгебр Верлинде алгебра Ли $su(n)$ это и есть диаграммы Дынкина, так называемых, укороченных потенциалов. Это предположение приводит к странным соотношениям (двойственностям) между такими графами.

Соответствующие гипотезы доказаны прямым сравнением рассматриваемых объектов (докладчик и А. Н. Варченко), но причины совпадения этих объектов остаются совершенно не понятными.

Для понимания доклада специальных знаний не требуется.

8 апреля 1997 г. В. БАЛЬЗЕР (W. Balser, Германия, Ульм). *Формальные решения обыкновенных дифференциальных уравнений, явление Стокса и мультисуммируемость.*

У линейных систем ОДУ имеются, так называемые, формальные решения, которые могут выражаться степенными рядами с нулевым радиусом сходимости. В классической теории показывается, что в каждом секторе с достаточно малым углом при вершине в особой точке системы всегда найдется фундаментальное решение данной системы, для которого данное формальное решение является асимптотическим. Зависимость полученных таким образом фундаментальных решений от расположения сектора называется явлением Стокса. Активно развивающаяся в настоящее время теория мультисуммируемости дает удобный инструмент для вычисления этих фундаментальных решений через формальные решения с помощью конечного числа интегральных преобразований, что в свою очередь позволяет продвинуться в изучении явления Стокса.

15 апреля 1997 г. Ю. В. НЕСТЕРЕНКО. *Трансцендентные числа и модулярные функции.*

Хорошо известно, что числа e и π не являются корнями многочленов с целыми коэффициентами. Трансцендентность первого из них была доказана в 1873 г. Ш. Эрмитом, а второго – в 1882 г. Ф. Линдеманом. До сих пор никто не может доказать иррациональность суммы $e + \pi$ или произведения $e\pi$. В более общей форме можно ставить вопрос об отсутствии алгебраических соотношений между e и π над $\mathbb{Q}$, т.е. об алгебраической независимости этих чисел. Устроенное сложнее, чем сумма или произведение, число e^π трансцендентно. Этот факт – частный случай 7-й проблемы Гильберта – был доказан в 1929 г. А. О. Гельфондом.

В 1996 г. докладчику удалось решить одну из старых проблем теории трансцендентных чисел: доказать алгебраическую независимость π и e . Как ни странно, но экспоненциальная функция не участвует в доказательстве этого результата. Основная роль принадлежит модулярным функциям.

В докладе описаны современные методы доказательства алгебраической независимости чисел, а также полученные с их помощью общие результаты, частным следствием которых является приведенное выше утверждение π и e^π .

22 апреля 1997 г. Ю. В. КУЗЬМИН. *Группы заузленных поверхностей.*

Как известно, любую группу узла можно задать соотношениями вида

$$x_i^{-1} x_j x_i = x_k$$

(такое представление называется представлением Виртингера). Что из себя представляет класс всех групп, которые могут быть заданы соотношениями указанного вида? Выяснилось, что это – в точности группы заузленных поверхностей. В то же время, если задана абстрактная группа (с помощью матриц, подстановок, прямых или свободных произведений, других теоретико-групповых конструкций), то априори вовсе неясно, когда ее можно задать такими соотношениями. Оказалось, что критерий того, что группа задается соотношениями сопряжения между образующими, можно дать в гомологических терминах, неожиданно близких к известной теореме Кервера, характеризующей группы трехмерных узлов.

Об этих и других результатах, касающихся групп заузленных поверхностей, рассказано в докладе.

6 мая 1997 г. И. М. КРИЧЕВЕР. *Гамильтонова структура двумерных интегрируемых уравнений и $N = 2$ суперсимметричные калибровочные теории.*

В докладе изложен новый подход к построению Гамильтоновой теории солитонных уравнений. В случае одномерных интегрируемых систем типа уравнения Кортевега–де Фриза этот подход дает новые представления хорошо известных структур. Для двумерных систем типа уравнения Кадомцева–Петвиашвили получены новые иерархии симплектических структур. Ограничения этих структур на пространства модулей алгебро-геометрических (конечнозонных) решений дает ответ на проблему описания симплектических форм на пространствах модулей $N = 2$ суперсимметричных моделей теории поля. Аксиоматика таких форм была предложена Виттеном–Зайбергом и Донаги.

Как показано в докладе, это же пространство модулей, которое с точки зрения алгебраической геометрии является пространством модулей алгебраических кривых с парой абелевых дифференциалов на них, приводит к построению ряда интегрируемых моделей топологической теории поля.

20 мая 1997 г. С. П. НОВИКОВ. *Алгебраическая симметрия 2D разностных операторов и спектральная теория.*

Хорошо известно, что у 1D и 2D операторов Шрёдингера имеется очень большая непрерывная “группа спектральной симметрии”. Мы называем ее Теорией Солитонов. Дискретные симметрии (преобразования Дарбу и Лапласа) также использовались для изучения спектральной теории специальных операторов, где непрерывная симметрия не работает. Разностный аналог этой теории был найден недавно. Он приводит к очень интересным комбинаторным и алгебраическим задачам.

От правления Московского Математического Общества

Выдающийся американский тополог Ганс Самельсон (Hans Samelson; Университет Стэнфорд, Калифорния) передал свою обширную личную математическую библиотеку в дар Независимому Московскому Университету, Библиотека НМУ уже получила часть этого дара – очень ценные подборки практически всех ведущих англоязычных математических журналов. В настоящее время при посредничестве Американского Математического Общества организуется пересылка математических книг Г. Самелсона в Москву. Правление Московского Математического Общества, студенты, аспиранты и преподаватели НМУ благодарны нашему коллеге за его щедрый дар.