Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Алексеевский, В. О. Бугаенко, Г. И. Олшанский, В. Л. Попов,
О. В. Шварцман, Эрнест Борисович Винберг (к шестидесятилетию со дня рож-
дения), *УМН*, 1997, том 52, выпуск 6, 193–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1602>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:39:30

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

ЭРНЕСТ БОРИСОВИЧ ВИНБЕРГ

(к шестидесятилетию со дня рождения)

26 июля 1997 года выдающемуся математику доктору физико-математических наук профессору Московского государственного университета Эрнесту Борисовичу Винбергу исполнилось шестьдесят лет. Он окончил механико-математический факультет МГУ в 1959 году и аспирантуру по кафедре алгебры в 1961 году. С 1961 года и по сегодняшний день Эрнест Борисович работает на кафедре алгебры Московского Университета (доцент с 1966 года, профессор с 1991 года).

В студенческие годы Э. Б. Винберг учился мастерству в школе Е. Б. Дынкина по группам Ли. В начале 60-х Е. Б. Дынкин стал активно заниматься теорией стохастических процессов и постепенно отошел от занятий группами Ли. Большинство его многочисленных учеников последовало за ним и сменило тематику. Э. Б. Винберг и А. Л. Онищик были в числе тех немногих, кто остались верны теории групп Ли и возглавили в МГУ семинар по группам Ли и однородным пространствам — преемник семинара Дынкина по группам Ли конца 50-х. Семинар Винберга—Онищика (а с какого-то момента Винберга—Онищика—Попова) работает на мехмате вот уже более тридцати лет. Первая научная работа Э. Б. Винберга — его дипломная работа. В ней получено описание инвариантных линейных связностей в однородном пространстве G/H группы Ли G (не обязательно редуктивном). Показано, что плоская инвариантная линейная связность в однородном пространстве G/H полупростой группы Ли G задает реализацию G/H в виде открытой орбиты M линейного действия группы G в векторном пространстве V и является ограничением стандартной плоской связности пространства V на M . Получена классификация однородных пространств G/H , допускающих плоскую инвариантную связность [1], [3].

В цикле работ [2], [5], [8], [11] Э. Б. Винберг развил глубокую теорию однородных выпуклых конусов. С каждым однородным выпуклым конусом связана однородная область Зигеля. При этом самосопряженному конусу соответствует симметрическая область Зигеля.

В 1935 г. Э. Картан получил классификацию ограниченных симметрических областей в $\mathbb{C}$ и доказал, что при $n \leq 3$ любая однородная ограниченная область является симметрической. Он поставил вопрос о том, верно ли это утверждение для любого n (известный как гипотеза Картана). Контрпример к этой гипотезе был построен И. И. Пятецким-Шапиро в 1957 г. Им же был поставлен вопрос о существовании несамосопряженных выпуклых однородных конусов.

В заметке [2] Э. Б. Винберг построил первый пример такого конуса и получил полную классификацию самосопряженных выпуклых конусов, основанную на неожиданной связи таких конусов с компактными йордановыми алгебрами.

В следующей заметке [5] Э. Б. Винберг сделал важный шаг на пути к описанию произвольных однородных выпуклых конусов: он установил взаимно-однозначное соответствие между однородными выпуклыми конусами $V \subset \mathbb{R}^n$ и некоторым классом неассоциативных алгебр, названных им компактными левосимметрическими нормальными алгебрами (или, сокращенно, кланами).

С тех пор левосимметрические алгебры естественным образом появляются в различных разделах математики. В литературе они известны как алгебры Винберга.

В заметке [6] Э. Б. Винберг предложил универсальную конструкцию однородных выпуклых конусов в терминах введенных им компактных матричных T -алгебр.

Оказывается, что любой однородный выпуклый конус реализуется как конус “положительно определенных эрмитовых матриц” в подходящей T -алгебре. В терминах T -алгебр удается не только описать структуру произвольного однородного выпуклого конуса V , но и вычислить его группу автоморфизмов $\text{Aut}(V)$ [11].

В совместных с И. И. Пятачким-Шапиро и С. Г. Гиндикиным работах Э. Б. Винберга [9], [15], [19] были изучены однородные кэлеровы многообразия.

В работе [15] была высказана фундаментальная гипотеза о том, что любое однородное кэлерово многообразие M допускает голоморфное расслоение над однородной ограниченной областью со слоем, изоморфным прямому произведению локально плоского и односвязного компактного однородных кэлеровых многообразий. Эта гипотеза (ставшая теоремой в 1995 году, благодаря усилиям многих математиков) полностью решает вопрос об устройстве M как комплексного многообразия.

Двадцать лет спустя Эрнест Борисович снова вернулся к выпуклым конусам, но уже в совершенно другой связи.

В 1980 г. Э. Б. Винберг опубликовал работу [43] об инвариантных конусах в алгебрах Ли, открывшую новое направление в теории групп и алгебр Ли.

Первый ее результат – простой критерий существования выпуклого инвариантного конуса в пространстве конечномерного неприводимого вещественного представления полупростой группы Ли G . Автор показал, что если $\mathfrak{g}$ – простая вещественная алгебра Ли, то выпуклый инвариантный конус $C \subset \mathfrak{g}$ существует тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ является эрмитовой алгеброй. Далее, в [43] показано, что в множестве $\{C\}$ инвариантных конусов имеются единственные, с точностью до умножения на -1 , максимальный конус $C_{\max}$ и минимальный конус $C_{\min}$, которые совпадают друг с другом только для $\mathfrak{d} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$.

Затем Э. Б. Винберг ввел понятие непрерывного инвариантного упорядочения в группе Ли G , где инвариантность понимается по отношению к левым и правым сдвигам. Всякое такое упорядочение естественно определяет некоторый инвариантный конус в алгебре Ли $\mathfrak{g}$: он образован касательными векторами ко всевозможным монотонным кривым, исходящим из единичного элемента. Обратный же переход – от конуса к упорядочению – не столь прост, но как доказано в статье, минимальный конус $C_{\min}$ в эрмитовой алгебре $\mathfrak{g}$ всегда задает упорядочение в группе G , если G односвязна. Отметим, что инвариантные конусы и упорядочения тесно связаны с полугруппами в группах Ли. В свою очередь, полугруппы Ли находят важные применения в современной теории представлений бесконечномерных классических групп и в гармоническом анализе на полупростых группах Ли. Идеи, заложенные в [38], и поставленные там проблемы существенно повлияли на активное развитие всех этих направлений в последнее десятилетие.

Особое место в нашем рассказе занимают работы Э. Б. Винберга по теории инвариантов.

Уже на заре развития теории инвариантов стало ясно, что, как правило, алгебра инвариантов линейной группы устроена весьма сложно. Поэтому линейные группы с максимально просто устроенной, а именно, полиномиальной, алгеброй инвариантов естественно выделились в особо интересный и важный класс (такие группы сейчас называют корегулярными). В 50-х годах этого века Шевалле, Шепард и Тодд обнаружили, что конечные корегулярные группы над полем нулевой характеристики характеризуются как группы, порожденные отражениями, и нашли их полную классификацию. Более сложная проблема классификации бесконечных редуктивных корегулярных групп оставалась открытой вплоть до 1976 года, когда в работе [34] был найден

метод ее решения и, в качестве иллюстрации, получена полная классификация связных простых неприводимых корегулярных групп над полем нулевой характеристики. Эта работа имела значительный резонанс. Ее метод, основанный на исследовании слайс-представлений, в настоящее время стал стандартным инструментом исследования в теории инвариантов.

Работа [17] лежит у истоков характерной для современной теории инвариантов идеологии выделения исключительных в том или ином отношении классов линейных действий алгебраических групп. В ней найдены все связные простые комплексные неприводимые линейные алгебраические группы с бесконечным стабилизатором общего положения (с.о.п.). Она дала толчок к дальнейшим исследованиям в этом направлении. К этой же линии исследований следует отнести и более раннюю работу [3], где была получена классификация локально транзитивных представлений простых групп Ли.

Работы [31], [33], [35], [39], [41] образуют по существу единый цикл, посвященный открытию, исследованию и приложениям важного класса линейных действий редуктивных групп, обладающих замечательными геометрическими и алгебраическими свойствами.

В [31], [35] Э. Винберг развил общую теорию, включающую присоединенное действие и группы изотропии симметрических пространств как весьма частный случай. В этой теории рассматривается произвольная циклическая градуировка $\mathfrak{G} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_m} \mathfrak{G}_i$ комплексной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{G}$ (где $\mathbb{Z}_m$ — группа вычетов по модулю m , если $m < \infty$, и $\mathbb{Z}$, если $m = \infty$). Присоединенное действие односвязной алгебраической группы G с алгеброй Ли $\mathfrak{G}$ определяет (путем ограничения) действие на $\mathfrak{G}_1$ связной подгруппы G_0 в G с алгеброй Ли $\mathfrak{G}_0$. Такие действия G_0 на $\mathfrak{G}_1$ и являются объектом теории Э. Б. Винберга (линейные группы, определенные такими действиями, названы в ней θ -группами). Случаи, рассмотренные Б. Костантом и С. Раллисом, получаются, соответственно, при $m = 1$ и $m = 2$. Как показал Э. Б. Винберг, при $m < \infty$ имеются замечательные аналогии между θ -группами и присоединенными группами: для θ -групп имеются естественные аналоги картановского подпространства и группы Вейля (последняя, как и в присоединенном случае, порождена отражениями, но не обязательно второго порядка), их алгебры инвариантов и модули ковариантов свободны, их многообразия уровня инвариантов содержат только конечное число орбит (θ -группа содержит при $m = \infty$ гомотетии и вместо нее обычно рассматривают т.н. приведенную θ -группу). Э. Б. Винберг показал, что для элементов θ -групп имеет место аналог разложения Жордана и что метод Е. Б. Дынкина классификации нильпотентных элементов в полупростых алгебрах Ли может быть приспособлен для классификации нильпотентных элементов в пространствах действий θ -групп. В [39] эти результаты применены для получения классификации 3-векторов 9-мерного пространства.

Работы [26], [27] стоят у истоков теории алгебраических многообразий с плотной орбитой алгебраической группы преобразований (иногда называемых квазиоднородными многообразиями), которая сейчас бурно развивается и к которой относится столь популярная ныне теория торических многообразий и более богатая и сложная теория сферических многообразий.

В [26] Э. Б. Винберг описал с точностью до бирациональной эквивалентности связные алгебраические группы преобразований G , редуктивный ранг r которых равен размерности d многообразия X , на котором действует G (это — предельный возможный случай в том смысле, что всегда $r \leq d$).

В работе [27] введен в рассмотрение и детально исследован важный специальный класс аффинных квазиоднородных алгебраических многообразий X — замыканий орбит сумм старших весовых векторов в пространствах конечномерных представлений связных редуктивных алгебраических групп G . Эта работа является одной из первых публикаций, с которых началась теория торических многообразий: если G — тор, то многообразия X — это в точности аффинные торические многообразия (не обязательно номальные), а используемый в [27] метод перевода рассматриваемых проблем на комбинаторно-геометрический язык полиэдральных выпуклых конусов и решеток, — это в точности тот метод, которых стал позже основой общей теории торических многообразий.

В работе [53] Э. Б. Винберг ввел в теорию алгебраических групп преобразований общее понятие сложности $c(X, G)$ действия связной редуктивной алгебраической группы G на неприводимом алгебраическом многообразии X . В [53] доказано, что $c(X, G)$ совпадает с модальностью

действия на X борелевской подгруппы группы G в смысле В. И. Арнольда. Как показало дальнейшее развитие теории алгебраических групп преобразований, $c(X, G)$ правильно отражает меру сложности действия, отделяя “ручные” случаи от “диких” и оправдывая свое название.

В работах [72], [73] Э. Б. Винберг дал яркое приложение методов теории алгебраических групп преобразований к построению теории редуктивных алгебраических полугрупп.

В работе [78] Э. Б. Винберг обращается к задаче, имеющей классические истоки. Как было обнаружено еще в начале этого века, алгебра инвариантов конечного набора $n \times n$ -матриц порождена следами их произведений. В [78] рассмотрена связная редуктивная подгруппа H группы унимодулярных $n \times n$ -матриц над алгебраически замкнутым полем k характеристики нуль и диагональное действие нормализатора группы H на $H \times \cdots \times H$ (p сомножителей) сопряжениями. Доказано, что алгебра инвариантов этого действия при $p \geq 2$ является нормализацией алгебры, порожденной всевозможными функциями $H \times \cdots \times H \rightarrow k, (X_1, \dots, X_p) \mapsto \text{tr } X_{i_1} \dots X_{i_s}$. В качестве приложения отсюда выводится, что для любой конечно порожденной абстрактной группы Γ , редуктивной группы G и ее редуктивной подгруппы H естественный морфизм многообразия H -характеров группы Γ в многообразие ее G -характеров является конечным.

Общая картина вклада Э. В. Винберга в современную теорию инвариантов и теорию алгебраических групп преобразований безусловно не будет полной, если не сказать о выросшем под его влиянием поколении математиков, работающих или работавших в этой области. Многие из них начинали в семинаре по теории инвариантов, которым Э. Б. Винберг бесценно руководит (с начала 70-х годов – вместе с В. Л. Поповым). С начала шестидесятых, наряду с теорией инвариантов, Эрнест Борисович активно и очень успешно занимается геометрической теорией дискретных групп преобразований.

Э. Б. Винберг первым начал систематически изучать дискретные кристаллографические группы, порожденные отражениями (*гиперболические группы отражений*, как их сейчас принято называть). “Открыв” эту науку он является ее признанным мировым лидером [50]. Основопологающая работа Э. Б. Винберга [13] состоит из двух частей. Первая часть – геометрическая. В ней дано определение гиперболического C -многогранника как выпуклого многогранника конечного объема в пространстве Лобачевского Λ^n , у которого все углы между ограничивающими его гиперплоскостями не превосходят $\frac{\pi}{2}$. Здесь же объясняется, каким образом матрица Грама C -многогранника кодирует его комбинаторное строение. Канонический фундаментальный многогранник гиперболической группы отражений является C -многогранником с углами вида π/m , $m = 2, \dots, \infty$. Он называется *многогранником Кокстера группы отражений*, а его матрицу Грама удобно “изображать” схемой Кокстера. Так в этой статье родилась изящная диаграммная техника, которая совершенствовалась с каждой следующей работой. С ее помощью Э. Б. Винберг доказал в 1983 году трудную теорему с простой формулировкой: “в пространствах Лобачевского размерности ≥ 30 отсутствуют гиперболические группы отражений компактного типа (т. е. с компактным факторпространством)” [42], [46], [49], [51]. Вскоре М. Н. Прохоров и А. Г. Хованский показали, что гиперболические группы отражений с факторпространством конечного объема отсутствуют в пространствах Лобачевского размерностей ≥ 996 .

Обратимся к алгебраической части [13]. Здесь содержатся два очень важных результата, первый из которых – теорема о том, что арифметическая гиперболическая группа отражений является арифметической группой простейшего типа, т. е. соизмерима с группой единиц подходящей гиперболической квадратичной решетки. Второй результат – критерий арифметичности гиперболической группы отражений.

В связи с первым из них в статье [25] была поставлена задача классификации гиперболических квадратичных решеток над $\mathbb{Z}$, группа единиц которых содержит подгруппу конечного индекса, порожденную отражениями. Такие решетки были названы в [25] рефлексивными. В этой же статье доказана оригинальная лемма о наследственной рефлексивности: если L – рефлексивная гиперболическая решетка, а x – ее примитивный вектор, то евклидова решетка $x^\perp / \mathbb{Z}x$ рефлексивна.

Для исследования групп единиц гиперболических $\mathbb{Z}$ -решеток Э. Б. Винбергом был придуман алгоритм [24], [30], позволяющий для любой дискретной группы Γ движений пространства Λ^n построить многогранник Кокстера – фундаментальную область группы, порожденной всеми отражениями, принадлежащими Γ .

До этого примеры гиперболических групп отражений были известны только либо в пространствах Лобачевского размерностей ≤ 5 (в основном в работах В. С. Макарова), либо с фундаментальным многогранником простого комбинаторного строения. Применение алгоритма позволило найти множество новых примеров. Лемма о наследственности и алгоритм были успешно применены самим автором для классификации рефлексивных нечетных унимодулярных гиперболических $\mathbb{Z}$ -решеток [24], [38], и с тех пор взяты на вооружение исследователями гиперболических рефлексивных решеток.

Сильные результаты в направлении классификации арифметических гиперболических групп отражений получены в статье [49]. В ней Э. Б. Винберг доказал, что не существует арифметических дискретных групп отражений некомпактного типа в пространствах Лобачевского размерности ≥ 30 .

В [49] также доказано, что в пространствах Лобачевского размерности ≥ 22 не существует арифметических групп отражений компактного типа с полем определения, отличным от $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ и $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{7})$.

Результаты этой работы вместе с теоремами конечности В. В. Никулина позволяют надеяться на то, что в недалеком будущем будет получена полная классификация гиперболических рефлексивных решеток. Пока же эта задача не решена даже над $\mathbb{Z}$. Но ей уже активно занимаются многие математики.

Изучению произвольных дискретных линейных групп, порожденных конечным числом отражений, посвящена фундаментальная статья [23].

Статьи [22], [70] касаются арифметической теории дискретных групп. В первой исследуется вопрос о наименьшем поле, над которым в некотором базисе могут быть одновременно записаны элементы плотной по Зарисскому подгруппы связной полупростой алгебраической группы присоединенного типа. Во второй статье дается алгоритм нахождения такого поля для плотной конечнопорожденной подгруппы группы $PSL_2(\mathbb{C})$, и в терминах этого поля формулируется критерий арифметичности дискретной решетки в $PSL_2(\mathbb{R})$ или $PSL_2(\mathbb{C})$.

На этом закончим. Сознаться, что не исчерпали всего списка работ Эрнеста Борисовича. Нам, его ученикам и друзьям, приятно, что он по-прежнему неутомимо и плодотворно занимается математикой, пишет книги и преподает. И дай Вам Бог здоровья, Мастер!

*Д. В. Алексеевский, В. О. Бугаенко,
Г. И. Ольшанский, В. Л. Попов, О. В. Шварцман*

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ Э. Б. ВИНБЕРГА

- [1] Об инвариантных линейных связностях // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128. № 4. С. 653–654
- [2] Однородные конусы // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. № 1. С. 9–12
- [3] Инвариантные линейные связности в однородном пространстве // Труды ММО. 1960. Т. 9. С. 191–210
- [4] Теорема Морозова–Бореля для вещественных групп Ли // Докл. АН СССР. 1961. Т. 141. С. 270–273
- [5] Выпуклые однородные области // Докл. АН СССР. 1961. Т. 141. С. 521–524
- [6] Автоморфизмы однородных выпуклых конусов // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143. С. 265–268
- [7] Группы Ли и однородные пространства // Итоги науки. Алгебра. Топология. М.: ВИНТИ, 1962. С. 5–32
- [8] Теория однородных выпуклых конусов // Труды ММО. 1963. Т. 12. С. 303–358
- [9] Классификация и каноническая реализация комплексных однородных ограниченных областей // Труды ММО. 1963. Т. 12. С. 359–388 (совм. с Гиндикиным С. Г., Пятецким-Шапиро И. И.)
- [10] О теореме, касающейся бесконечномерности ассоциативной алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. С. 209–214
- [11] Структура группы автоморфизмов однородного выпуклого конуса // Труды ММО. 1965. Т. 13. С. 56–83
- [12] Конструкция особых простых алгебр Ли // Труды семинара по вектор. и тензор. анализу. 1966. Т. 13. С. 7–9

- [13] Дискретные группы, порожденные отражениями, в пространствах Лобачевского // Матем. сб. 1967. Т. 72 (114). С. 471–488
- [14] Квазиоднородные конусы // Матем. заметки. 1967. Т. 1. С. 347–354 (совм. с Кац В. Г.)
- [15] Кэлеровы многообразия, допускающие транзитивную разрешимую группу автоморфизмов // Матем. сб. 1967. Т. 74 (116). С. 357–377 (совм. с Гиндикиным С. Г.)
- [16] Компактные группы Ли. М.: Изд-во МГУ, 1967
- [17] Орбиты наибольшей размерности полупростых линейных групп Ли // Функц. анализ и его прилож. 1967. Т. 1. № 4. С. 3–7 (совм. с Андреевым Е. М., Элашвили А. Г.)
- [18] Инвариантные нормы в компактных алгебрах Ли // Функц. анализ и его прилож. 1968. Т. 2. № 2. С. 89–90
- [19] Homogeneous Kähler manifolds // C.I.M.E., 3. Ciclo 1967. Geom. homogen. bounded Domains. Rome: Edizioni Cremonese, 1968. P. 1–87 (with Gindikin S. G., Pjateckii-Sapiro I. I.)
- [20] Некоторые примеры кристаллографических групп в пространствах Лобачевского // Матем. сб. 1969. Т. 78 (120). С. 633–639
- [21] Геометрические представления групп Кокстера // УМН. 1970. Т. 25. № 2 (152). С. 267–268
- [22] Кольца определения плотных подгрупп полупростых линейных групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. С. 45–55
- [23] Дискретные линейные группы, порожденные отражениями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. С. 1072–1112
- [24] О группах единиц некоторых квадратичных форм // Матем. сб. 1972. Т. 87 (129). С. 18–36
- [25] Унимодулярные целочисленные квадратичные формы // Функц. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. № 2. С. 24–31
- [26] Алгебраические группы преобразований максимального ранга // Матем. сб. 1972. Т. 88 (130). С. 493–503
- [27] Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. С. 749–764 (совм. с Поповым В. Л.)
- [28] Теория фуксовых групп; О фуксовых функциях // Пуанкаре, Анри. Избранные труды в трех томах. Том III. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественно научных работ Анри Пуанкаре. Серия “Классики науки”. М.: Наука, 1974. С. 715–717; 717–720
- [29] Некоторые свойства корневого разложения полупростых алгебр Ли над неалгебраически замкнутым полем // Функц. анализ и его прилож. 1975. Т. 9. № 1. С. 20–24
- [30] Some arithmetical discrete groups in Lobachevsky spaces // Discrete subgroups of Lie Groups and Applications to Moduli (Internat. Colloq., Bombay, 1973). Bombay: Oxford Univ. Press, 1975. P. 323–348
- [31] Линейные группы, связанные с периодическими автоморфизмами полупростых алгебраических групп // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. № 4. С. 767–770
- [32] Теорема Шефли–Бибераха // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. С. 1013–1015 (совм. с 4)
- [33] Классификация нильпотентных элементов градуированных алгебр Ли // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 4. С. 745–748
- [34] Sur les groupes linéaires algébriques dont l’algèbre des invariants est libre // C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. A. 1976. V. 283. № 12. P. 875–878 (with Kac V. G., Popov V. L.)
- [35] Группа Вейля градуированной алгебры Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. С. 488–526
- [36] Римановы поверхности // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 16. М.: ВИНТИ, 1978. С. 191–245 (совм. с Шварцманом О. В.)
- [37] Однородные области на флаговых многообразиях и сферические подгруппы полупростых групп Ли // Функц. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. № 3. С. 12–19 (совм. с Кимельфельд Б. Н.)
- [38] О группах $O_{18,1}(\mathbb{Z})$ и $O_{19,1}(\mathbb{Z})$ // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238. № 6. С. 1273–1275 (совм. с Каплинской И. М.)
- [39] Классификация тривекторов девятимерного пространства // Труды семинара по вект. и тенз. анализу. 1978. Т. 18. С. 197–233 (совм. с Элашвили А. Г.)
- [40] Spinors of 13-dimensional space // Adv. in Math. 1978. V. 30. № 2. P. 137–155 (with Gatti V.)

- [41] Классификация однородных нильпотентных элементов полупростой алгебры Ли // Труды семинара по вект. и тенз. анализу. 1979. Т. 19. С. 137–155
- [42] Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности // Функц. анализ и его прилож. 1980. Т. 15. № 2. С. 67–68
- [43] Инвариантные выпуклые конусы и упорядочения в группах Ли // Функц. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. № 1. С. 1–13
- [44] Рациональность поля инвариантов треугольной группы // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1982. № 2. С. 23–24
- [45] Эффективная теория инвариантов // Алгебра. М.: Изд-во МГУ, 1982. С. 27–33
- [46] Дискретные группы отражений в пространствах Лобачевского больших размерностей. Модули и алгебраические группы, 2 // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1983. Т. 132. С. 62–68
- [47] Рефлективные гиперболические решетки // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 6. С. 1298–1301
- [48] The two most algebraic $K3$ surfaces // Math. Ann. 1983. V. 265. № 1. P. 1–21
- [49] Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности // Труды ММО. 1984. Т. 47. С. 68–102
- [50] Discrete reflections groups in Lobachevsky spaces // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. (Warsaw, 1983). V. 1. Warsaw: PWN, 1984. P. 593–601
- [51] Гиперболические группы отражений // УМН. 1985. Т. 40. № 1 (241). С. 29–66
- [52] Линейные представления групп. М.: Наука, 1985
- [53] Сложность действия редуктивных групп // Функц. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. № 1. С. 1–13
- [54] Группы отражений в группах Бьянки // Проблемы теории групп и гомологической алгебры, 7. Ярославль, 1987. С. 121–127
- [55] Основы теории групп Ли // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 20. М.: ВИНТИ, 1988. С. 5–101 (совм. с Онищиком А. Л.)
- [56] Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988 (совм. с Онищиком А. Л.)
- [57] Объем многогранников на сфере и пространстве Лобачевского // Алгебра и анализ. Кемерово, 1988
- [58] Геометрия пространств постоянной кривизны // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундамент. направления. Геометрия-2. Т. 29. М.: ВИНТИ, 1988. С. 5–146 (совм. с Алексеевским Д. В., Солодовниковым А. С.)
- [59] Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундамент. направления. Геометрия-2. Т. 29. М.: ВИНТИ, 1988. С. 147–259 (совм. с Шварцманом О. В.)
- [60] Дискретные подгруппы групп Ли // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 21. М.: ВИНТИ, 1988. С. 5–20 (совм. с Горбачевичем В. В., Шварцманом О. В.)
- [61] Действительные целые функции с заданными критическими значениями // Проблемы теории групп и гомологической алгебры, 9. Ярославль, 1989. С. 127–138
- [62] Теория инвариантов // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137–309 (совм. с Поповым В. Л.)
- [63] Обобщенные производные алгебр // Алгебра и анализ. Иркутск. 1989. С. 185–188
- [64] Некоторые коммутативные подалгебры универсальной обертывающей алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 1. С. 3–25
- [65] Структура групп Ли и алгебр Ли // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 41. М.: ВИНТИ, 1990. С. 5–259 (совм. с Горбачевичем В. В., Онищиком А. Л.)
- [66] Some open problems in invariant theory // Contemp. Math. 1992. V. 131. № 3. P. 485–497 (with Popov V. L.)
- [67] Лекции по алгебре. Первый курс. Второй семестр. М.: МК НМУ, 1993
- [68] Лекции по алгебре. Первый курс. Первый семестр. М.: МК НМУ, 1993
- [69] Объемы неевклидовых многогранников // УМН. 1993. Т. 48. № 2 (290). С. 17–46

- [70] Наименьшее поле определения подгруппы группы PSL_2 // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 10. С. 53–66
- [71] The asymptotic semigroup of a semisimple Lie group // Semigroups in algebra, geometry and analysis. Oberwolfach, 1993. P. 293–310
- [72] On reductive algebraic semigroups // Lie groups and Lie algebras: E.B. Dynkin seminar. V. 169. Providence, RI: Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, AMS., 1995. P. 145–182
- [73] Asymptotic semigroup of a semisimple Lie group // Semigroups in algebra, geometry, analysis (Oberwolfach, 1993). V. 20. Berlin: de Gruyter Exp. Math., 1995. P. 293–310
- [74] Начала алгебры. Первый курс. Первый семестр. М.: МК НМУ, 1995
- [75] Лекции по алгебре. Второй курс. Первый и второй семестры. М.: МК НМУ, 1995
- [76] On the work of E.B. Dynkin in the theory of Lie Groups // Lie groups and Lie algebras: E. B. Dynkin seminar. V. 169. Providence, RI: Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, AMS., 1995. P. 1–13 (with Karpelevich F. I., Onishchik A. L.)
- [77] On invariants of a set of matrices // J. Lie Theory. 1996. V. 6. № 2. P. 249–269
- [78] Сборник задач по алгебре. Учебное пособие. М.: Наука, 1997 (совм. с Артамоновым В. А., Бахтуриным Ю. А., Голодом Е. С. и др. под ред. Кострикина А. И.)