Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Лагно, Характеризация мнимых корней гиперболических алгебр Каца–Муди, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 3, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm161>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 11:25:58

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МНИМЫХ КОРНЕЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ АЛГЕБР КАЦА–МУДИ

Д. В. ЛАГНО

1. Введение. Рассмотрим неразложимую симметризуемую обобщенную матрицу Картана A типа (Ind). Возьмем ассоциированную с ней алгебру Каца–Мули $g(A)$ и фактор ее коммутанта по центру $g'(A)/z$. Пусть h – подалгебра Картана, а Δ_+^{im} – множество положительных мнимых корней (включая 0) алгебры $g'(A)/z$. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – простые корни, Q – группа, порожденная ими, Q_+ – полугруппа, порожденная ими, $Q_+^{i_1 \dots i_s}$ – полугруппа, порожденная $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s}$, $C = \{\alpha \in h^* : \forall i (\alpha, \alpha_i) \leq 0\}$ – камера Вейля, $C^* = \mathbb{R}^+ Q_+$ – многогранный конус, двойственный C . Будем предполагать, что стандартная инвариантная форма в h^* гиперболична. Пусть K – замкнутый конус будущего в h^* . Проективизация PK дает нам модель пополненного пространства Лобачевского. В ней действует группа Вейля W . Мы будем рассматривать важный случай, когда фундаментальный многогранник (ф.м.) этого действия имеет конечный объем. Это эквивалентно любому из условий $C \subset K$ и $K \subset C^*$, причем ограниченность ф.м. эквивалентна любому из условий $C \setminus \{0\} \subset \text{int } K$ и $K \setminus \{0\} \subset \text{int } C^*$.

Известно (см. [1; гл. 5], [2]), что если матрица A невырождена (т.е. ф.м. есть симплекс), то $\Delta_+^{\text{im}} = Q_+ \cap K = Q \cap K$. Для произвольного ф.м. конечного объема это неверно. Мы доказываем следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1. Если ф.м. имеет конечный объем, то отыщется такое $\lambda \in \mathbb{N}$, что $\lambda Q \cap K \subset \Delta_+^{\text{im}}$.

ТЕОРЕМА 2. Если ф.м. ограничен, то $(Q \cap K) \setminus \Delta_+^{\text{im}}$ содержит лишь конечное число W -орбит и, следовательно, найдется такое T , что $\{\alpha \in Q \cap K : (\alpha, \alpha) \leq T\} \subset \Delta_+^{\text{im}}$.

ТЕОРЕМА 3. Если ф.м. имеет конечный объем, то следующие условия эквивалентны: (1) $\Delta_+^{\text{im}} = Q \cap K$; (2) $\Delta_+^{\text{im}} = Q_+ \cap K$; (3) $Q_+ \cap K$ W -инвариантно; (4) $Q \cap K \subset Q_+$; (5) $Q \cap C \subset Q_+$.

Автор благодарен своему научному руководителю Э. Б. Винбергу за постановку задачи и внимание к работе.

2. Вспомогательные утверждения. Пусть Σ – схема Дынкина матрицы A . Ее подсхему, соответствующую $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s}$, обозначим $\Sigma_{i_1 \dots i_s}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 ([1; леммы 1.6 и 5.3]). Пусть $x \in C$. Тогда $x \in \Delta_+^{\text{im}}$, если и только если x представим в виде $x = k_1 \alpha_{i_1} + \dots + k_s \alpha_{i_s}$, где $k_i \in \mathbb{N}$ и схема $\Sigma_{i_1 \dots i_s}$ связна.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. $C \cap Q_+ \cap \text{int } K \subset \Delta_+^{\text{im}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $x \in C \cap Q_+ \cap \text{int } K$. Пусть $x = k_1 \alpha_{i_1} + \dots + k_s \alpha_{i_s}$, где $k_i \in \mathbb{N}$. Тогда, в силу утверждения 1, достаточно показать, что схема $\Sigma_{i_1 \dots i_s}$ связна. Так как $x \in \text{int } K$, то одна из ее связных компонент имеет тип (Ind). Тогда ни одна из оставшихся не может иметь тип (Ind) или (Aff) из соображений сигнатуры. Также ни одна из компонент не может иметь тип (Fin), так как $x \in C$.

ЛЕММА. Пусть X – конечно-порожденная подполугруппа в $\mathbb{Q}^n$, Y – группа, натянутая на X . Тогда полугруппа $Q^+ X \cap Y$ конечно порождена, и найдется такое $x \in X$, что $x + Q^+ X \cap Y \subset X$. (Первая часть этой леммы известна как лемма Гордана.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\{v_i\}$ – конечная система порождающих полугруппы X , то в качестве конечной системы порождающих полугруппы $Q^+ X \cap Y$ можно взять $Y \cap \{\sum t_i v_i : t_i \in [0, 1]\}$. Пусть $y_1, \dots, y_m$ – эти порождающие. Отыщется такое $N \in \mathbb{N}$, что $N y_i \in X$ для всех i . Для любого конечного множества $\{\varepsilon_i\} \subset Y$ отыщется такое $x \in X$, что $x + \varepsilon_i \in X$ для всех i . Взяв в качестве $\{\varepsilon_i\}$ множество $\{\sum m_i y_i : 0 \leq m_i \leq N - 1\}$, получим искомым $x \in X$.

3. Доказательство теорем 1 и 2. Докажем теорему 1. По лемме полугруппа $Q \cap C^*$ конечно порождена. Поэтому найдется такое $\mu \in \mathbb{N}$, что $\mu Q \cap C^* \subset Q_+$. Значит, $\mu Q \cap C \cap \text{int } K \subset Q_+$, и по утверждению 2 $\mu Q \cap C \cap \text{int } K \subset \Delta_+^{\text{im}}$. Рассмотрим $(Q \cap C \cap \partial K) \setminus \{0\} = \bigcup_{i=1}^k \mathbb{N} v_i$, где k – число бесконечно удаленных вершин ф.м. Пусть $v = v_i$. Как известно, $v \in \mathbb{Q}^+ Q_+^{i_1 \dots i_s}$, где $\Sigma_{i_1 \dots i_s}$ – связная параболическая схема. Значит, найдется такое $\nu \in \mathbb{N}$, что $\nu v_i \in \Delta_+^{\text{im}}$ для всех i . Следовательно, $\nu Q \cap C \cap \partial K \subset \Delta_+^{\text{im}}$. Таким образом, найдется такое $\lambda \in \mathbb{N}$, что $\lambda Q \cap C \subset \Delta_+^{\text{im}}$. Так как $Q \cap K = W(Q \cap C)$, то $\lambda Q \cap K \subset \Delta_+^{\text{im}}$.

Приведем пример, когда ф.м. ограничен и $Q_+ \cap K \not\subset \Delta_+^{\text{im}}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{матрица Грама} \quad G = \begin{pmatrix} 8 & -20 & 0 & 0 \\ -20 & 40 & -20 & 0 \\ 0 & -20 & 40 & -20 \\ 0 & 0 & -20 & 5 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\dim h^* = 3$ и $-5\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 + 4\alpha_4 = 0$; $x = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 \in Q_+ \cap \text{int } K$, но $r_1 r_2 x = -\alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_4 \notin Q_+$, где r_i – отражение относительно α_i . Значит $x \notin \Delta_+^{\text{im}}$.

Докажем теорему 2. По лемме найдется такое $x \in Q_+$, что $(x + C^*) \cap Q \subset Q_+$. Если ф.м. ограничен, то $K \setminus (x + C^*)$ имеет конечный евклидов диаметр и, значит, содержит лишь конечное число элементов Q . Значит $(Q \cap C) \setminus Q_+$ конечно. По утверждению 2 $(Q \cap C) \setminus \Delta_+^{\text{im}}$ конечно. Так как $W(Q \cap C) = Q \cap K$, мы видим, что $(Q \cap K) \setminus \Delta_+^{\text{im}}$ содержит лишь конечное число W -орбит.

4. Доказательство теоремы 3.

(1) $\Rightarrow$ (2) Очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (3) Следует из W -инвариантности Δ_+^{im} .

(3) $\Rightarrow$ (4) Возьмем $\alpha \in Q \cap K$. По лемме найдется $x \in Q_+$ такой, что $(x + C^*) \cap Q \subset Q_+$. Докажем, что $W\alpha \cap (x + C^*) \neq \emptyset$. Первый случай: $\alpha \in \text{int } K$. Рассмотрим гиперboloид $L = \{y \in K : (y, y) = (\alpha, \alpha)\}$ и множество Ω , состоящее из тех точек $P(\text{int } K)$, для которых соответствующая прямая не пересекается с $L \cap (x + C^*)$. Бесконечно удаленные предельные точки Ω – это в точности бесконечно удаленные вершины PC , но любая точка $P(\partial K)$ является предельной для $P(W\alpha)$. Значит, $W\alpha \cap (x + C^*) \neq \emptyset$. Второй случай: $\alpha \in \partial K$. Возьмем в h^* евклидов шар B с центром в 0. Рассмотрим множество Ω , состоящее из тех точек $P(\partial K)$, для которых соответствующий луч в ∂K не покрывается $B \cup (x + C^*)$. Оно представляет собой объединение окрестностей бесконечно удаленных вершин PC . $P(W\alpha)$ плотно в $P(\partial K)$. Возьмем B настолько большим, чтобы замыкание Ω строго содержалось в $P(\partial K)$. Тогда имеется бесконечное число элементов $P(W\alpha)$, для которых соответствующие лучи в ∂K покрыты $B \cup (x + C^*)$. Лишь конечное число элементов $W\alpha$ может лежать в B . Значит, $W\alpha \cap (x + C^*) \neq \emptyset$. Следовательно, $W\alpha \cap Q_+ \neq \emptyset$, и в силу W -инвариантности $Q_+ \cap K$ имеем $\alpha \in Q_+$.

(4) $\Rightarrow$ (5) Очевидно.

(5) $\Rightarrow$ (1) Так как $Q \cap K = W(Q \cap C)$, то достаточно доказать, что $Q_+ \cap C \subset \Delta_+^{\text{im}}$. Пусть $\alpha \in Q_+ \cap C$. Если $\alpha \in \text{int } K$, то $\alpha \in \Delta_+^{\text{im}}$ согласно утверждению 2. Пусть $\alpha \in \partial K$. Можно считать α неделимым элементом решетки Q . Имеем $\alpha = k_1 \alpha_{i_1} + \dots + k_s \alpha_{i_s}$, где $k_i \in \mathbb{N}$, $\Sigma_{i_1 \dots i_s}$ есть параболическая схема. Сгруппировав члены, относящиеся к каждой связной компоненте, получим $\alpha = \sum \delta_i$, причем $\alpha \in Q_+ \delta_i$ для всех i . Если схема несвязна, то $\alpha = \frac{p}{q} \delta_1$, где $\frac{p}{q} > 1$, $(p, q) = 1$. Возьмем такие $a, b \in \mathbb{Z}$, что $ap + bq = 1$. Имеем $\frac{1}{p} \alpha = a\alpha + b\delta_1 \in Q \cap C \cap \partial K$, откуда $p = 1$, что невозможно. Следовательно, $\alpha \in \Delta_+^{\text{im}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кап В. Г. Бесконечномерные алгебры. Ли. М.: Мир, 1993. [2] Moody R. V. // Adv. Math. 1979. V. 33. № 2. P. 144–160.

Принято редколлегией
07.05.1999