Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степин, О спектральных свойствах несамосопряженного оператора $i\varepsilon \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$, УМН, 1998, том 53, выпуск 3, 205–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1615>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 15:24:51

**О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ
НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА $i\varepsilon \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$**

С. А. Стёпин

Рассмотрим в $L_2(a, b)$ семейство операторов Штурма–Лиувилля $A_\varepsilon = i\varepsilon \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$, $\varepsilon > 0$, с краевыми условиями $y(a) = y(b) = 0$ и вещественным потенциалом $q \in C[a, b]$. Спектр этого оператора дискретный и система его (нормированных) собственных и присоединенных функций в $L_2(a, b)$ образует базис Рисса, т.е. базис, эквивалентный ортонормированному (см. [1], [2]). Степень неортогональности базиса в гильбертовом пространстве измеряется числом обусловленности $\Upsilon = \|W\| \cdot \|W^{-1}\|$, где W – ортогонализатор базиса.

Цель настоящей работы – для определенного класса потенциалов q получить оценку снизу числа обусловленности $\Upsilon(\varepsilon)$ базиса в $L_2(a, b)$, составленного из собственных и присоединенных функций оператора A_ε (теорема 2). Предварительно, с помощью квазиклассических асимптотик решений уравнения

$$(1) \quad i\varepsilon y'' + (q(x) - \lambda)y = 0,$$

будет установлено нарушение нижней полунепрерывности спектра $\sigma(A_\varepsilon)$ в пределе $\varepsilon \downarrow 0$ по отношению к спектру оператора A_0 умножения на функцию q (теорема 1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Множество $\mathbb{C} \setminus \Pi$, где $\Pi = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \in q([a, b]), \operatorname{Im} \lambda \leq 0\}$, принадлежит области сильной сходимости семейства $R_\varepsilon(\lambda) = (A_\varepsilon - \lambda I)^{-1}$, $\varepsilon \downarrow 0$, и для произвольного $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Pi$ $s\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} R_\varepsilon(\lambda) = (A_0 - \lambda I)^{-1}$.

Всюду в дальнейшем предполагается, что вещественнозначный на $[a, b]$ потенциал q допускает аналитическое продолжение в некоторую комплексную окрестность U отрезка $[a, b]$. Обозначим через N множество $\{q(x) : x \in [a, b], q'(x) = 0\} \cup \{q(a), q(b)\}$ и будем использовать символ $\sqrt{}$ для обозначения арифметической ветви корня, отвечающей разрезу $i\mathbb{R}_+$.

ЛЕММА 1. Для произвольного $\lambda_0 \in q([a, b]) \setminus N$ существует число $r = r(\lambda_0) > 0$ и гладкий путь γ из a в b , лежащий в окрестности U , такие, что величина $\operatorname{Re}(e^{i\pi/4} S(a, z))$, где $S(a, z) = \int_a^z \sqrt{q(\zeta) - \lambda} d\zeta$ (интегрирование ведется вдоль γ), монотонно возрастает и, кроме того, $q(\zeta) \neq \lambda$, $\zeta \in \gamma$, если $|\lambda - \lambda_0| \leq r$.

В этой ситуации, согласно [3], [4], уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $y_j(z, \lambda)$, $j = 1, 2$, со следующими асимптотическими представлениями при $z \in \gamma$ и $\varepsilon \downarrow 0$:

$$(2) \quad y_1(z, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{q(z) - \lambda}} \exp\left(\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\varepsilon}} S(a, z)\right) [1 + O(\sqrt{\varepsilon})],$$

$$(3) \quad y_2(z, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{q(z) - \lambda}} \exp\left(\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\varepsilon}} S(z, b)\right) [1 + O(\sqrt{\varepsilon})],$$

где $S(z, b) = S(a, b) - S(a, z)$. Оценки остатков в асимптотиках (2)–(3) – равномерные по переменной $z \in \gamma$ и по параметру $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda - \lambda_0| \leq r$.

Спектр $\sigma(A_\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, расположен в полуполосе Π и совпадает с множеством нулей характеристического определителя $\Delta(\lambda) = y_1(b, \lambda)y_2(a, \lambda) - y_1(a, \lambda)y_2(b, \lambda)$. Формулы (2)–(3) позволяют найти асимптотику $\Delta(\lambda)$ при $\varepsilon \downarrow 0$:

$$\Delta(\lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{q(a) - \lambda}} \frac{1}{\sqrt[4]{q(b) - \lambda}} \left\{ \exp\left(2 \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\varepsilon}} S(a, b)\right) - 1 \right\} [1 + O(\sqrt{\varepsilon})],$$

где $\inf_{|\lambda - \lambda_0| \leq r} \operatorname{Re}(e^{i\pi/4} S(a, b)) > 0$ и оценка остатка – равномерная по $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda - \lambda_0| \leq r$. Таким образом устанавливается

ТЕОРЕМА 1. Для каждого $\lambda \in \sigma(A_0) \setminus N$ $\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A_\varepsilon)) > 0$; точнее, найдется число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A_\varepsilon)) > r(\lambda)$, если $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Число ε_0 в теореме 1 может быть выбрано не зависящим от $\lambda \in \sigma(A_0) \setminus N$, если значения λ отделены от N . Это позволяет выделить в Π область, примыкающую к $\sigma(A_0)$ и не содержащую точек спектра $\sigma(A_\varepsilon)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Деформируя кривую γ , эту область можно увеличивать до тех пор, пока величина $\operatorname{Re}(e^{i\pi/4} S(a, z))$ остается монотонно возрастающей вдоль γ . В предположении монотонности q с помощью линий Стокса уравнения (1) в [5] предложено другое описание подобласти в Π , не содержащей собственных значений операторов A_ε .

Ключевую роль при изучении числа обусловленности $\Upsilon(\varepsilon)$ играет оценка нормы резольвенты (см. [6]):

$$(4) \quad \|R_\varepsilon(\lambda)\| \leq \Upsilon(\varepsilon) \mu(\varepsilon) \min\{1, \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A_\varepsilon))\}^{-\mu(\varepsilon)};$$

здесь $\mu(\varepsilon)$ – максимальная кратность спектра $\sigma(A_\varepsilon)$.

ЛЕММА 2. Спектр оператора A_ε состоит из однократных собственных значений для всех $\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \setminus E$, где E – не более чем счетно.

Учитывая в неравенстве (4) резольвентную сходимость семейства A_ε при $\varepsilon \downarrow 0$, нарушение нижней полунепрерывности спектра $\sigma(A_\varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0$ и существенную ограниченность максимальной кратности $\mu(\varepsilon)$, приходим к заключению о неограниченности $\Upsilon(\varepsilon)$, точнее, $\operatorname{ess\,lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \Upsilon(\varepsilon) = +\infty$.

Для оценки снизу скорости роста числа обусловленности $\Upsilon(\varepsilon)$ при $\varepsilon \downarrow 0$ используется оценка (5) нормы $R_\varepsilon(\lambda)$ в точках $\lambda \in \sigma(A_0) \setminus N$. Рассмотрим семейство функций

$$\varphi_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \varphi\left(\frac{x-x_0}{\delta}\right), \quad \delta > 0,$$

где $x_0 \in q^{-1}(\lambda) \cap [a, b]$, $\varphi \in C_0^\infty(-1, 1)$ и $\int_{-1}^1 |\varphi(t)|^2 dt = 1$. При $\delta \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} \|(A_\varepsilon - \lambda I)\varphi_\delta\|^2 &\leq 2 \frac{\varepsilon^2}{\delta^5} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left| \varphi''\left(\frac{x-x_0}{\delta}\right) \right|^2 dx + \frac{2}{\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left| (q(x) - \lambda) \varphi\left(\frac{x-x_0}{\delta}\right) \right|^2 dx \\ &= 2 \frac{\varepsilon^2}{\delta^4} \int_{-1}^1 |\varphi''(t)|^2 dt + O(\delta^2). \end{aligned}$$

Полагая здесь $\delta = \varepsilon^{1/3}$, получаем неравенство $\|(A_\varepsilon - \lambda I)\varphi_\delta\| \leq \operatorname{const} \varepsilon^{1/3}$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$; поскольку $\|\varphi_\delta\| = 1$, то $\|R_\varepsilon(\lambda)\| \geq \operatorname{const} \varepsilon^{-1/3}$.

Сопоставляя оценки (4) и (5), с учетом теоремы 1 и леммы 2 приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $q: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ допускает аналитическое продолжение в некоторую комплексную окрестность отрезка $[a, b]$. Для базиса Рунса в $L_2(a, b)$, составленного из собственных и присоединенных функций оператора $A_\varepsilon = i\varepsilon \frac{d^2}{dx^2} + q(x)$, порожденного краевыми условиями $y(a) = y(b) = 0$, справедлива оценка числа обусловленности $\Upsilon(\varepsilon) \geq \operatorname{const} \varepsilon^{-1/3}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \setminus E$, где множество E не более чем счетно (с единственной предельной точкой в нуле).

Изложенный здесь подход применим к задаче Орра–Зоммерфельда об устойчивости плоскопараллельных течений вязкой жидкости. Для случая течения Пуазейля в [7] приведены результаты компьютерных вычислений, свидетельствующие о сильной неортогональности собственных функций соответствующей спектральной задачи при малой вязкости. Автор благодарен А. А. Шкаликову за возможность ознакомиться со статьей [7] и критические замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Михайлов В. П. // ДАН СССР. 1962. Т. 144. № 5. С. 981–984. [2] Кесельман Г. М. // Изв. вузов. Матем. 1964. № 2. С. 82–93. [3] Birkhoff G. D. // Bull. Amer. Math. Soc. 1933. V. 32. P. 681–700. [4] Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. [5] Шкаликов А. А. // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 6. С. 950–953. [6] Стёпин С. А. // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 1. С. 129–146. [7] Reddy S. C., Schmid P. J., Henningson D. S. // SIAM J. Appl. Math. 1993. V. 53. № 1. P. 15–47.