Общероссийский математический портал

Н. Г. Мощевитин, О τ -свойстве континуумов, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 3, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm162>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 10:59:00

О τ -СВОЙСТВЕ КОНТИНУУМОВ

Н. Г. Мошечитин

1. Определение τ -множества. Всюду ниже M – компактное, линейно связное метрическое пространство, состоящее более чем из одной точки, $d(\cdot, \cdot)$ – метрика.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\tau > 0$. Множество $A \subseteq M$ называется τ -множеством, если оно может быть получено из некоторого линейно связного компакта $C \subseteq M$ посредством выкидывания счетного (или конечного, или пустого) семейства непересекающихся открытых множеств $\Delta_j \subset C$ так, что $A = C \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} \Delta_j$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$, причем для каждого “подходящего” множества $A_\nu = C \setminus \bigcup_{j=1}^{\nu} \Delta_j$ в его разложении на непустые непересекающиеся компоненты линейной связности $A_\nu = \bigcup_{\alpha} \Sigma_{\alpha, \nu}$ выполняется $\text{diam } \Sigma_{\alpha, \nu} > \tau \text{ diam } \Delta_\nu \quad \forall \nu \in \mathbb{N}, \forall \alpha$.

Диаметр пустого множества полагается равным нулю, так что любой неодноточечный линейно связный компакт в M для каждого $\tau > 0$ будет τ -множеством.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. τ -множества на отрезке прямой рассматривались в работах [1]–[6].

2. Процесс получения A из C посредством выкидывания множеств Δ_j , вообще говоря, нельзя вполне упорядочить по убыванию диаметров Δ_j . В случае, когда M есть отрезок вещественной прямой, это сделать можно (см. лемму из работы [5]), значит канторовы множества из [1]–[6] удовлетворяют нашему общему определению.

2. Основная теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть $A^i = C^i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_j^i$, $i = 1, 2$, суть τ_1 - и τ_2 -множества соответственно и выполнены условия

(i) $\tau_1 \cdot \tau_2 \geq 1$,

(ii) C^i не лежит целиком в одной компоненте линейной связности дополнения $M \setminus A^k$, $i \neq k$.

Тогда $A^1 \cap A^2 \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим компакт $C = C^1 \cap C^2$. Предположим противное, полагая, что C допускает покрытие $C \subset (\bigcup_{j=1}^{\infty} \Delta_j^1) \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i^2)$. Из этого покрытия выделяем конечное:

$$(1) \quad C \subset (\Delta_{j_1}^1 \cup \dots \cup \Delta_{j_p}^1) \cup (\Delta_{i_1}^2 \cup \dots \cup \Delta_{i_q}^2).$$

Из условия (ii) следует, что $\min\{p, q\} \geq 1$. Будем считать, что из покрытия (1) нельзя выкинуть никакого Δ_j^i так, чтобы оставшиеся открытые множества составляли покрытие. Пусть

$$(2) \quad \mu = \min \left\{ \tau_2^{-1/2} \min_{1 \leq t \leq p} \text{diam } \Delta_{j_t}^1; \tau_1^{-1/2} \min_{1 \leq t \leq q} \text{diam } \Delta_{i_t}^2 \right\}.$$

Пусть для определенности $\mu = \tau_2^{-1/2} \text{diam } \Delta_{j_*}^1$. Рассмотрим разбиение на компоненты линейной связности $C^2 \setminus \bigcup_{t=1}^q \Delta_{i_t}^2 = \bigcup_{\alpha} \Sigma_{\alpha}$. Легко видеть, что

$$(3) \quad \text{diam } \Sigma_{\alpha} > \tau_2 \min_{1 \leq t \leq q} \text{diam } \Delta_{i_t}^2$$

(когда $\text{diam } \Delta_{j-1} < \text{diam } \Delta_j$, то в процессе выкидывания их можно поменять местами, не нарушая τ -свойства). Итак $\emptyset \neq C^1 \cap (\bigcup_{\alpha} \Sigma_{\alpha}) \subset \bigcup_{t=1}^p \Delta_{j_t}^1$. Имеем два случая:

1) $\exists \alpha: \Sigma_{\alpha} \cap C^1 \neq \emptyset, \Sigma_{\alpha} \not\subseteq C^1$, 2) $C^1 \cap \Sigma_{\alpha} \neq \emptyset \implies \Sigma_{\alpha} \subseteq C^1$.

В случае 1) $\partial C^1 \cap \Sigma_{\alpha} \neq \emptyset$, но никакая точка границы ∂C^1 не может принадлежать никакому Δ_j^1 и имеем противоречие. В случае 2) из минимальности покрытия (1) и линейной связности каждого Σ_{α} выводим: $\forall t = 1, \dots, p \quad \exists \alpha: \Sigma_{\alpha} \subset \Delta_{j_t}^1$. Теперь с учетом (3) получаем $\mu > \tau_2^{-1/2} \min_{1 \leq t \leq q} \text{diam } \Delta_{i_t}^2$. Используя определение величины μ (2), выводим, что $\tau_1 \cdot \tau_2 < 1$, что есть противоречие. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 96-01-00378, 96-15-96072).

3. τ -множества в экспоненциальном пространстве. Будем рассматривать линейно связное компактное пространство $\text{exp } M = \{C \subseteq M : C \text{ — компакт}\}$ с метрикой Хаусдорфа [7]. Обозначим

$$\mathfrak{T}_\tau = \{A \subseteq M : A \text{ является } \tau\text{-множеством}\}, \quad \mathfrak{T} = \bigcup_{\tau > 0} \mathfrak{T}_\tau.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. $\mathfrak{T}$ всюду плотно в $\text{exp } M$.

Утверждение 1 очевидно и легко проверяется.

Точку $x \in M$ будем называть *выводимой*, если найдется ее открытая окрестность $B \ni x$ такая, что для любого $y \in B$ существуют $z \in M \setminus B$ и непрерывная кривая $\gamma: [0; 1] \rightarrow M$ такие, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(1/2) = y$, $\gamma(1) = z$ и функция $t \mapsto d(\gamma(t), x)$ не убывает на отрезке $[0; 1]$. Множество всех выводимых точек из M будем обозначать $\mathcal{E}(M)$. Например, для куба $I = [0; 1]^d$ с евклидовой метрикой выполнено $\mathcal{E}(I) = I$. Отметим, что если $\mathcal{E}(M)$ всюду плотно в M , то $\mathfrak{T}$ не имеет внутренних точек.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{E}(M)$ всюду плотно в M . Тогда для любого $\tau > 0$ $\mathfrak{T}_\tau$ нигде не плотно в $\text{exp } M$, и следовательно, $\mathfrak{T}$ в пространстве $\text{exp } M$ имеет первую категорию Бэра.

Для доказательства утверждения 2 надо заметить, что в окрестности любого элемента $C \in \text{exp } M$ найдется элемент $C^* = \bigcup_{j=1}^t C_j$, представляющий собой объединение конечного числа компактов вида $C_j = (\overline{U_\varepsilon(x_j)} \setminus U_{\varepsilon/2}(x_j)) \cup \{x_j\}$, где x_j — выводимые точки, а через $U_\lambda(x_j)$ обозначена λ -окрестность точки x_j в M (λ мало). Ясно, что в малой окрестности множества C^* в экспоненциальном пространстве не может находиться никакое τ -множество с фиксированным τ .

В экспоненциальном пространстве $\text{exp } M$ также можно рассматривать τ -множества. Будем называть τ -множество $\mathfrak{W} \subset \text{exp } M$ *вырожденным*, если дополнение $\mathfrak{D} = \text{exp } M \setminus \mathfrak{W}$ линейно связно. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{T}$ может содержать в себе некоторые подмножества $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{T}$, которые являются вырожденными τ -множествами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $\mathcal{E}(M) = M$. Тогда $\mathfrak{T}$ не содержит в себе ни одного подмножества $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{T}$, которое являлось бы невырожденным τ -множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От противного. Невырожденность $\mathfrak{A}$ означает, что $\text{exp } M \setminus \mathfrak{A}$ содержит два непересекающихся открытых множества $\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1 \subset \text{exp } M \setminus \mathfrak{A}$, участвующих в образовании τ -структуры. Возьмем $C_j \in \mathfrak{D}_j$, $j = 0, 1$, которые представляют собой объединение конечного числа точек. C_0 можно непрерывно продеформировать в C_1 так, чтобы в каждый момент деформации компакт C_λ , $\lambda \in [0; 1]$, состоял из конечного числа точек. Отметим, что в M никакое τ -множество не может состоять из конечного числа точек (ибо $\mathcal{E}(M) = M$). С другой стороны, существует $\lambda^* \in [0; 1]$ такое, что $C_{\lambda^*} \in \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{T}$. Противоречие. Утверждение доказано.

Автор благодарит Д. И. Савельева и А. М. Райгородского за многократные обсуждения настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hall M. Jr. // Ann. of Math. (2). 1948. V. 48. P. 966–993. [2] Newhouse S. // Proc. Sympos. Pure Math. 1970. V. 14. P. 191–203. [3] Newhouse S. // Topology. 1974. V. 13. P. 9–18. [4] Newhouse S. // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1983. V. 50. P. 433–459. [5] Williams R. F. // Contemp. Math. 1991. V. 117. P. 163–175. [6] Мошевитин Н. Г. // УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 145–146. [7] Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.–Л.: ОНТИ, 1937.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
23.04.1999