Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Мощевитин, О цепных дробях и почти арифметических прогрессиях, *УМН*, 2000, том 55, выпуск 1, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1623>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 18:32:48

О ЦЕПНЫХ ДРОБЯХ И ПОЧТИ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ

Н. Г. Мошевитин

1. Формулировки. Почти арифметической прогрессией длины l назовем множество вещественных положительных чисел $a_1 < a_2 < \dots < a_l$, удовлетворяющее условию $\exists w > 0$: $w \leq a_{j+1} - a_j \leq 3w$, $\forall j = 1, \dots, l-1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть натуральные числа $a_1, \dots, a_l < q$, $(a_j, q) = 1$, образуют почти арифметическую прогрессию длины l . Положим $a_\nu/q = [0; b_{\nu,1}, \dots, b_{\nu,s(\nu)}]$. Тогда найдутся индексы ν, μ такие, что $b_{\nu,\mu} \gg l^{1/2}$.

Теорема 1 усиливает результат работы [1].

ТЕОРЕМА 2. Пусть вещественные иррациональные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in (0; 1)$ образуют почти арифметическую прогрессию длины l . Положим $\alpha_\nu = [0; b_{\nu,1}, \dots, b_{\nu,\mu}, \dots]$. Тогда найдутся индексы ν, μ такие, что $b_{\nu,\mu} \gg l^{1/2}$.

Теорема 1 доказана ниже в пп. 2–4. Теорема 2 доказывается аналогично.

С. В. Конягин сообщил автору следующий пример.

ПРИМЕР Конягина. Рассматривается ряд Фарея порядка m , полагаем $x_i = 10i/m$, $i = 1, \dots, [(m-1)/10]$. Каждое x_i попадает в свой интервал Фарея $x_i \in [p_1/q_1, p_2/q_2]$. Пусть $y_i = (\sqrt{2}p_1 + p_2)/(\sqrt{2}q_1 + q_2)$. Теперь рассматривается последовательность $z_{j,i} = 1/(j + y_i)$, $9m/10 < j \leq m$, $i = 1, \dots, [(m-1)/10]$. Числа $z_{j,i}$ образуют почти арифметическую прогрессию длины $\gg m^2$, и вместе с тем все неполные частные имеют порядок $\ll m$. Таким образом, оценка теоремы 2 является точной по порядку.

2. Полигоны Клейна. Рассматривается плоскость $\mathbb{R}^2$, отнесенная к координатам (x, y) и целочисленная решетка $Z^2 \subset \mathbb{R}^2$. Пусть $(q; a) \in Z^2$ – примитивная точка, т.е. $(q, a) = 1$, и пусть $q, a > 0$. Рассмотрим углы φ_+ и φ_- , определяемые условиями

$$\varphi_+ = \left\{ Z = (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq \frac{a}{q}x \right\}, \quad \varphi_- = \left\{ Z = (x; y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y \leq \frac{a}{q}x \right\}.$$

Полигонами Клейна $\mathcal{K}_+(a, q)$ и $\mathcal{K}_-(a, q)$ будем называть те куски бесконечных ломаных $\partial(\text{conv}(\varphi_+ \cap (Z^2 \setminus \{0\})))$ и $\partial(\text{conv}(\varphi_- \cap (Z^2 \setminus \{0\})))$, соответственно, которые состоят из конечных отрезков. (Здесь и в дальнейшем $\text{conv}(\Omega)$ обозначает выпуклую оболочку множества Ω .) Определим область $\Delta(a, q)$, расположенную между $\mathcal{K}_+(a, q)$ и $\mathcal{K}_-(a, q)$:

$$\Delta(a, q) = \left\{ Z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, Z \notin \text{conv}(\varphi_+ \cap (Z^2 \setminus \{0\})), Z \notin \text{conv}(\varphi_- \cap (Z^2 \setminus \{0\})) \right\}.$$

Следующий факт известен в геометрической теории цепных дробей (см. [2] и [3; с. 101]).

ЛЕММА 1. 1. Вершинами $\mathcal{K}_-(a, q)$, отличными от точки $(q; a)$, являются целые точки $(q_{2\mu}, p_{2\mu})$, где $q_{2\mu}$ и $p_{2\mu}$ суть знаменатель и числитель подходящей к a/q дроби с четным номером 2μ .

2. Вершинами $\mathcal{K}_+(a, q)$, отличными от точки $(q; a)$, являются целые точки $(q_{2\nu+1}, p_{2\nu+1})$, где $q_{2\nu+1}$ и $p_{2\nu+1}$ суть знаменатель и числитель подходящей к a/q дроби с нечетным номером $2\nu+1$.

3. Если $(u; v) \in (\mathcal{K}_+(a, q) \cup \mathcal{K}_-(a, q)) \cap Z^2$ – целая точка, то u и v суть знаменатель и числитель либо подходящей, либо промежуточной дроби для a/q .

4. $\Delta(a, q) \cap Z^2 = \emptyset$.

3. Леммы. Рассмотрим области

$$\begin{aligned} \Omega(a, q; \sigma) &= \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq q-1; \left| y - \frac{a}{q}x \right| \leq \frac{1}{\sigma x} \right\} \\ &\cup \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1; \left(\frac{a}{q} - \frac{1}{\sigma} \right)x \leq y \leq \left(\frac{a}{q} + \frac{1}{\sigma} \right)x \right\}, \quad (a, q) = 1, \sigma > 0, \\ \tau(i, j; t) &= \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < t; \frac{ix}{q} < y < \frac{jx}{q} \right\}, \quad i < j - \text{целые}, t > 0. \end{aligned}$$

Следующая лемма модифицирует лемму 3 из [1].

ЛЕММА 2. Пусть числа $a_0, \dots, a_l$ образуют почти арифметическую прогрессию с разностью $w \geq 1$. Тогда

$$\tau(a_0, a_l; t^*) \subset \bigcup_{\nu=0}^l \Omega(a_\nu, q; k+2), \quad \text{где} \quad t^* \asymp \left(\frac{q}{w(k+2)} \right)^{1/2}.$$

ЛЕММА 3. Пусть неполные частные несократимой дроби a/q ограничены величиной k и пусть $t^*/4 \geq 2$. Тогда найдется целая точка

$$Z = (x^*, y^*) \in (\mathcal{K}_-(a_0, q) \cup \mathcal{K}_+(a_l, q)) \cap \mathbb{Z}^2$$

такая, что $t^*/4 \leq x^* \leq t^*/2$.

Для доказательства леммы 3 надо рассмотреть разделенный (относительно прямых $y = (a_0/q)x$ и $y = (a_l/q)x$) параллелограмм [2], натянутый на векторы OZ_+, OZ_- , где

$$Z_+ = (x_+, y_+) \in \mathcal{K}_+(a_l, q) \cap \mathbb{Z}^2, \quad Z_- = (x_-, y_-) \in \mathcal{K}_-(a_0, q) \cap \mathbb{Z}^2$$

с максимально возможным значением $\min\{x_+, x_-\}$.

Из разделенности параллелограмма, фигурировавшего в лемме 3, вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Точка (x^*, y^*) – общая точка для полигонов $\mathcal{K}_\sigma(a_0, q)$, $\mathcal{K}_\sigma(a_l, q)$, где $\sigma = +$ или $-$.

ЛЕММА 4. Пусть все неполные частные числа a/q ограничены величиной k . Пусть (x, y) – целая точка на одном из полигонов $\mathcal{K}_\pm(a, q)$. Тогда $|(a/q)x - y| < (k+1)/x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. y/x – подходящая или промежуточная дробь для a/q . Если это подходящая дробь, то $|(a/q)x - y| < 1/x$, и все доказано. Если же промежуточная, то $q_\nu < x = q_\nu + bq_{\nu+1} < q_{\nu+2} \leq (k+1)q_{\nu+1}$, ибо $1 \leq b \leq k-1$. Имеем $|(a/q)x - y| < |(a/q)q_\nu - p_\nu| < 1/q_{\nu+1} < (k+1)/x$. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1. В силу следствия леммы 3 и леммы 4 имеем

$$(a_l - a_0)t^*/4q < \max\{|(a_l/q)x^* - y^*|, |(a_0/q)x^* - y^*|\} < (k+1)/x^* \leq 4(k+1)/t^*.$$

Теперь получается, что $k \gg (t^*)^2 lw/q \gg (q/wk)lw/q = l/k$. Итак, $k^2 \gg l$, и теорема доказана.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 99-01-00357 и 00-15-96109) и фонда ЕФАКОД.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мощевитин Н. Г. // Диофантовы приближения. Математические записки. Т. 2, 1996. С. 99–109. [2] Делоне Б. Н. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1947. Т. 11. №6. С. 505–538. [3] Erdős P., Gruber P. M., Hammer J. Lattice Points. Harlow/New York: Longman/Wiley, 1989.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
22.12.1999