Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ан. А. Мучник, С. Е. Посицельский, Об одном классе перечислимых множеств,
УМН, 1999, том 54, выпуск 3, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm163>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:12:42

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ

Ан. А. Мучник, С. Е. Посицельский

Начиная с Э. Л. Поста [12], специалистов по теории алгоритмов интересовала возможность построения “естественного” класса перечислимых неразрешимых множеств, который был бы не пуст и целиком состоял бы из неполных по Тьюрингу множеств. Оказалось, однако, что предлагавшиеся в качестве кандидатов классы простых, гиперпростых, гипергиперпростых и даже максимальных множеств содержат полные по Тьюрингу множества.

Естественный класс для проблемы Поста был впервые построен А. Н. Дегтевым и С. С. Марченковым (в 1973 году Дегтев [2] доказал непустоту класса, в 1976 году Марченков [5] доказал, что в этом классе нет полных множеств). В 1985 году М. М. Арсланов [1] построил еще один пример естественного класса. В примерах Дегтева–Марченкова и Арсланова используется введенное К. Джокушем [8] в 1968 году понятие полуразрешимого множества. Для каждого из этих классов доказательства довольно сложны, особенно доказательства непустоты класса.

В настоящей статье вводится свойство перечислимых множеств, называемое упругостью. Это свойство является (слабой) эффективизацией исследованного А. А. Мучником [6] и Г. Н. Кобзевым [3] понятия r -отделимости. Оказывается, что перечислимые *полуразрешимые не упругие* множества неразрешимы и не полны по Тьюрингу. Этот класс целиком содержит классы Дегтева–Марченкова и Арсланова, и, в отличие от них, содержит представителей всех промежуточных перечислимых степеней неразрешимости.

Тот же класс можно описать иначе. Для этого вводится понятие слабо творческого множества. Класс перечислимых полуразрешимых неупругих множеств совпадает с классом перечислимых *полуразрешимых неразрешимых не слабо творческих* множеств.

Не определяемые в дальнейшем изложении понятия можно найти в монографии [13].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (А. А. Мучник, 1956). Перечислимое множество A называется r -отделимым, если для любого перечислимого множества B , которое не пересекается с A , существует разрешимое множество C , которое отделяет A от B (т.е. $A \subset C$ и $B \cap C = \emptyset$).

К классу r -отделимых множеств, очевидно, относятся разрешимые множества и простые множества. М. Куммер и Ф. Стефан [10] доказали, что перечислимые частотно разрешимые (и, в частности, перечислимые полуразрешимые) множества являются r -отделимыми. Кобзев [3] доказал, что перечислимое множество, btt -сводящееся к r -отделимому, является r -отделимым. Следовательно, btt -полные множества не являются r -отделимыми. Последнее утверждение можно усилить.

ТЕОРЕМА 1. *Никакое r -отделимое множество не является bT -полным (bT -сводимостью мы называем сводимость с оракулом, который отвечает на ограниченное число вопросов).*

Интересно отметить, что для bT -сводимости не справедлив аналог теоремы Кобзева, то есть из того, что перечислимое множество bT -сводится к r -отделимому, вообще говоря, не следует, что оно является r -отделимым. Теорема 1 является усилением теоремы Поста о том, что простое множество не может быть btt -полным.

Следующее определение строится по традиционной для общей теории алгоритмов схеме эффективизации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Перечислимое множество A называется *эффективно r -отделимым*, если по каждой программе, перечисляющей какое-нибудь множество B , не пересекающееся с A , можно эффективно построить программу, разрешающую множество C , которое отделяет A от B .

ТЕОРЕМА 2. *Класс эффективно r -отделимых множеств совпадает с классом разрешимых множеств.*

Более продуктивной оказалась ослабленная эффективизация понятия r -отделимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Перечислимое множество A называется *упругим*, если по каждой программе, перечисляющей какое-нибудь множество B , не пересекающееся с A , можно эффективно построить программу, перечисляющую разрешимое множество C , которое отделяет A от B .

Про алгоритм, который по программе перечисления B строит программу перечисления C , мы будем говорить, что он обеспечивает упругость A .

Примером упругого неразрешимого множества может служить надграфик функции Колмогоровской энтропии (введенной в работе [4]). В 1996 году Куммер [9] доказал, что надграфик функции энтропии не является частотно разрешимым.

ТЕОРЕМА 3. а) *Класс r -отделимых множеств замкнут относительно объединения, пересечения и прямого произведения.*

б) *Класс упругих множеств эффективно замкнут относительно объединения, пересечения и прямого произведения (т.е. по алгоритмам, обеспечивающим упругость двух множеств, эффективно строятся алгоритмы, обеспечивающие упругость их объединения, пересечения и прямого произведения).*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Перечислимое множество A называется *слабо творческим*, если по каждой программе, перечисляющей какое-нибудь множество B , не пересекающееся с A , можно эффективно построить программу, перечисляющую множество C , которое строго содержит A и не пересекается с B .

Легко заметить, что неразрешимое упругое множество является слабо творческим.

По теореме Майхилла [11], каждое творческое множество является m -полным.

ТЕОРЕМА 4. *Каждое слабо творческое множество является T -полным.*

СЛЕДСТВИЕ. *Каждое упругое множество или разрешимо, или T -полно.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (К. Джокш, 1968). Множество называется *полуразрешимым*, если оно вычислимо изоморфно начальному отрезку некоторого разрешимого линейного порядка.

Из конструкции Дж. Деккера [7] 1954 года следует, что во всех перечислимых степенях неразрешимости есть перечислимые полуразрешимые множества.

ТЕОРЕМА 5. *Каждое перечислимое полуразрешимое T -полное множество является упругим (и, тем более, слабо творческим).*

Теоремы 4 и 5 позволяют выделить среди перечислимых полуразрешимых множеств в точности те, которые не являются T -полными.

Авторы признательны участникам Колмогоровского семинара кафедры математической логики и теории алгоритмов Московского государственного университета, с которыми всегда могли обсуждать данную научную тему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арсланов М. М. // Матем. заметки. 1985. Т. 38. №6. С. 872–874. [2] Дегтев А. Н. // Алгебра и логика. 1973. Т. 12. №2. С. 143–161. [3] Кобзев Г. Н. // Исследования по матем. логике и теории алгоритмов. Тбилиси: Тбилисский ун-т, 1975. С. 19–30. [4] Колмогоров А. Н. // Пробл. передачи информ. 1965. Т. 1. №1. С. 3–11. [5] Марченков С. С. // Матем. заметки. 1976. Т. 20. №4. С. 473–478. [6] Мучник А. А. // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109. С. 29–32. [7] Dekker J. // Proc. Amer. Math. Soc. 1954. V. 5. P. 791–796. [8] Jockush C. G. // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 131. P. 420–436. [9] Kummer M. // 13-th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, 1996. Lecture Notes in Computer Science. V. 1046. P. 25–36. [10] Kummer M., Stephan F. // Information and Computation. 1995. V. 120. P. 59–77. [11] Myhill J. // Z. Math. Logik Grundl. Math.. V. 1. P. 97–108. [12] Post E. L. // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. V. 50. P. 284–316. [13] Роджерс Х., мл. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.