Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. А. Богомолов, А. Л. Городенцев, В. А. Исковских, Ю. И. Манин, В. В. Никулин, Д. О. Орлов, А. Н. Паршин, В. Я. Пидстригач, А. С. Тихомиров, Н. А. Тюрин, И. Р. Шафаревич, Андрей Николаевич Тюрин (некролог), *УМН*, 2003, том 58, выпуск 3, 176–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1631>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 06:36:41

АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ ТЮРИН

27 октября 2002 г. на 63-м году жизни скоропостижно скончался член-корреспондент Российской академии наук, главный научный сотрудник отдела алгебры Математического института им. В. А. Стеклова РАН Андрей Николаевич Тюрин. Выдающийся математик, один из крупнейших специалистов в алгебраической и дифференциальной геометрии, Андрей Николаевич никогда не останавливался на достигнутом — он всегда жил еще не осуществленными планами и новыми идеями, которых у него было множество. Достаточно отметить, что только за последние 10 лет им написано более 25 работ. Широко образованный, интересующийся различными областями не только математики, но и математической физики и квантовой теории поля, Андрей Николаевич до самого последнего дня продолжал активно работать сразу в нескольких направлениях. Смерть пришла неожиданно и мгновенно — не выдержало сердце. Многие математические идеи остались нереализованными, остались незавершенными работы по калибровочным теориям на графах и по алгебраической лагранжевой геометрии, недописанными статьи о многообразиях Калаби–Яу и многообразиях Фано. Ушел из жизни человек, глубоко преданный своему делу, человек, искренне влюбленный в математику, понимающий и тонко чувствующий ее красоту, ученый, смотрящий далеко вперед, открытый всему новому, исследователь, мыслящий оригинально, находя нестандартные решения сложных задач.

Вся математическая жизнь Андрея Николаевича была связана с Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН, в котором он проработал ровно 40 лет. В 1962 г. он был принят в качестве аспиранта в отдел алгебры и с того времени до самого последнего дня оставался одним из самых активно работающих сотрудников этого отдела — отдела, который был для него родным.

Андрей Николаевич Тюрин родился в 1940 г. в Москве в семье военных инженеров. В 1957 г. он вслед за своей старшей сестрой Галиной (также ставшей впоследствии известным математиком) поступил на механико-математический факультет МГУ, где его научным руководителем стал Игорь Ростиславович Шафаревич. Его интерес сразу привлекла тогда еще новая область алгебраической геометрии — теория векторных расслоений. С появлением работ А. Вейля, Ж. П. Серра, а затем Д. Мамфорда векторные расслоения вошли в математическую жизнь в качестве мощного геометрического инструмента. Как потом оказалось, эта глубокая и богатая теория стала одной из центральных как в алгебраической геометрии, так и в математической жизни самого Андрея Николаевича.

Уже в первых своих работах [1], [2], [4] А. Н. Тюрин получил сильные результаты: им была решена универсальная задача для квазирасслоений (т.е. расслоений, оснащенных исключительным подрасслоением) на кривой произвольного рода и было доказано, что многообразие модулей

стабильных векторных расслоений на кривой является изотривиальным расслоением над рациональной базой с рациональным слоем. Эти результаты легли в основу его кандидатской диссертации, которую он защитил в 1965 г.

Продолжая исследование векторных расслоений на кривых, Андрей Николаевич доказал [5], [6], что сама кривая однозначно определяется многообразием модулей стабильных расслоений с фиксированным рангом и первым классом Черна. Теоремы такого рода о восстановлении по некоторым данным самого многообразия называются теоремами типа Торелли, имея в виду классический результат Торелли о восстановлении кривой по ее якобиану как главнополяризованному абелеву многообразию. Эти результаты А. Н. Тюриня произвели сильное впечатление и сейчас уже стали классическими. Они составили его докторскую диссертацию, которую он защитил в 1971 г.

Теоремы типа Торелли о восстановлении многообразия по некоторым данным всегда играли важную роль в математике. Одной из таких проблем была классическая задача о восстановлении 3-мерной кубики по ее поверхности Фано. Поверхность Фано, параметризующая прямые на кубике, изучалась еще в работах итальянских геометров и, в частности, в работах самого Фано. Эта проблема была блестяще решена А. Н. Тюриним. В работах [7] и [8] Андрей Николаевич показал, что поверхность Фано однозначно определяется своим многообразием Альбанезе (перiodами регулярных 1-форм) и сама кубика однозначно восстанавливается по этой поверхности. Можно сказать, что данные статьи предвосхитили первую часть знаменитой работы Клеменса и Гриффитса о нерациональности гладкой 3-мерной кубики.

Эти исследования были завершены яркой обзорной статьей [9], которая оказала существенное влияние на развитие бирациональной теории 3-мерных алгебраических многообразий в последующие годы. В этой работе, кроме очень ясного геометрического изложения теории многообразий Прима применительно к расслоениям на коники, было введено новое понятие, получившее в дальнейшем название многообразия Прима–Тюриня. Оно появилось в связи с изучением промежуточных якобианов 3-мерных многообразий Фано с одномерной группой Пикара. Оказалось, что введенное таким способом главнополяризованное абелево многообразие связано со многими другими геометрическими конструкциями, возникающими в различных смежных областях: в теории интегрируемых систем, в теории представлений алгебр Ли и во всех вопросах, где приходится использовать спектральные кривые.

Еще один блестящий результат, который вырос из классической алгебраической геометрии и сам стал классическим, был получен А. Н. Тюриним в работе [13]. Изучая связки квадрик, Андрей Николаевич доказал, что каждая такая связка однозначно определяется своей кривой вырождения и неэффективной ϑ -характеристикой на ней. Более того, он показал, что, и наоборот, любая гладкая кривая на проективной плоскости с неэффективной ϑ -характеристикой получается из некоторой связки квадрик. Эту теорему можно также назвать теоремой типа Торелли.

Работая с пространствами модулей кривых, в начале 70-х годов Андрей Николаевич начал интересоваться нестандартными проективными структурами на римановых поверхностях, т.е. такими структурами, которые не индуцируются с универсального накрытия. Различные проективные структуры, некоторые из которых соответствуют дискретным квазифуксовым группам в $PGL(2, \mathbb{C})$, могут быть получены добавлением квадратичного дифференциала.

Исследуя этот вопрос, Андрей Николаевич построил соответствие, которое проективной структуре и квадратичному мероморфному дифференциалу на римановой поверхности сопоставляет проективно плоское расслоение с сечением [16]. В частности, было показано, что проективно плоское расслоение с сечением фактически определяется главной частью квадратичного дифференциала.

В следующей работе [17] он описал пространство модулей проективно плоских структур на римановой поверхности рода $g > 1$ как аффинное расслоение над модулями комплексных структур, где слоем является пространство квадратичных дифференциалов. Фактически это аффинное расслоение ассоциировано с векторным кокасательным расслоением на пространстве модулей комплексных структур. Основным результатом было явное описание коцикла, определяющего данное аффинное расслоение.

Каждый цикл своих работ Андрей Николаевич завершал хорошей обзорной статьей. Работа [18] – одна из них: в ней излагается теория проективных связностей, квадратичных дифференциалов и их периодов, а также даются геометрические объяснения большинству вычислений, использующих шварцеву производную.

В 1981 г. Андрей Николаевич нашел замечательную конструкцию, которая дает локальные и глобальные инварианты четырехмерных псевдоримановых многообразий [21], [25]. Они получили название *инвариантов Тюрин*. Основная идея этой конструкции заключается в следующем. Для каждой точки x четырехмерного псевдориманова многообразия M рассматривается шестимерное векторное пространство $\Lambda^2 T(x)$, которое является внешним квадратом касательного пространства $T(x)$ в точке x . Внешний квадрат метрики $\Lambda^2 G(x)$, форма объема $\text{Vol}(x)$ и риманова форма кривизны $R(x)$ в точке x определяют три квадратичные формы на пространстве $\Lambda^2 T(x)$. Проективизация пересечения определяемых ими трех квадратик является поверхностью типа КЗ с естественной вещественной структурой (или некоторое вырождение поверхностей КЗ). Таким образом, каждой точке x четырехмерного псевдориманова многообразия M каноническим образом сопоставляется некоторая КЗ-поверхность $K3(x)$, и, следовательно, возникает естественное отображение многообразия M в пространство модулей поверхностей КЗ, называемое *индикатрисой Тюрин*. Андрей Николаевич показал, что известные типы метрик такие, как эйнштейнова, автодуальная и другие, соответствуют различным алгебро-геометрическим типам КЗ-поверхностей и их вырождений. Данная конструкция, которая сразу же вызвала огромный интерес, существенно уточняет и обобщает известный инвариант Петрова пространств Эйнштейна. Инвариант Тюрин имеет глубокую физическую природу, разбивая точки четырехмерного пространства-времени на различные типы подобно разбиению точек риманова многообразия на точки положительной, отрицательной или нулевой кривизны.

Огромный вклад внес Андрей Николаевич в теорию многомерных расслоений на алгебраических поверхностях и трехмерном проективном пространстве. Эта область алгебраической геометрии, исключительно глубокая и богатая, имеет многочисленные приложения в топологии и теоретической физике. Андрей Николаевич привнес в теорию векторных расслоений свое исключительно глубокое понимание классической алгебраической геометрии, что позволило ему стать одним из лидеров в этой области.

Используя описание Барта расслоений на $\mathbb{P}^3$ в терминах линейной алгебры, Андрей Николаевич в работе [22] дает явную геометрическую конструкцию для математических инстантов с $s_2 = 4$, показывая, что каждый такой инстант однозначно восстанавливается по кривой вырождения связки квадратик и “неэффективной” ϑ -характеристике (половине канонического класса) на ней. В работах [23], [24] вводится операция суперпозиции инстантов, которая позволила Андрею Николаевичу доказать унитарность многообразия модулей инстантов с зарядом s_2 , равным 4 и 5.

Одновременно с изучением расслоений на проективных пространствах А.Н.Тюрин получил ряд сильных результатов о многообразиях модулей расслоений ранга 2 на односвязных поверхностях общего типа и поверхностях КЗ [27], [37], [37]. В частности, он показал, что многообразия модулей таких расслоений обладают естественной пуассоновой структурой, но не одной, а зависящей от выбора универсального расслоения, что явилось существенным обобщением результатов Мукаи для расслоений на поверхностях КЗ. Кроме того, им было показано, что модули простых расслоений с фиксированными инвариантами на поверхности КЗ бирационально эквивалентны симметрической степени самой поверхности КЗ. Он также сформулировал ряд гипотез о структуре различных многообразий модулей расслоений на поверхностях, которые во многом определили дальнейшее развитие этой области алгебраической геометрии.

В первой половине 80-х годов геометрия и топология подверглись мощному воздействию идей и методов, пришедших из математической физики. Одним из примеров является применение калибровочной теории в четырехмерной топологии. Особенностью этого направления была его тесная связь с алгебраической геометрией, а именно с теорией векторных расслоений. Теория векторных расслоений долгое время являлась одним из основных методов вычисления инвариантов гладких структур на алгебраических поверхностях, по той причине, что структура стабильного расслоения по существу совпадает с наличием антиавтодуальной связности на расслоении. К этому же времени относится и серия гипотез о классификации алгебраических поверхностей как гладких четырехмерных многообразий, самой известной из которых является гипотеза Ван де Вена.

Как непревзойденный знаток векторных расслоений Андрей Николаевич сразу и с особым воодушевлением включился в работу над этими проблемами. В первой статье на эту тему [37] дан обзор существующей на то время техники при работе с модулями инстантов и полиномами До-

нальдсона. Особую роль играли наблюдения о влиянии геометрии поверхности на ее гладкие инварианты. Здесь, по-видимому, впервые обсуждается роль канонического класса как инварианта гладкой структуры, роль, ставшая впоследствии ведущей, как показала теория Зайберга–Виттена.

Обладая богатейшим опытом геометрического анализа, А. Н. Тюрин решил предпринять попытку доказать гипотезу Ван де Вена, утверждающую, что поверхности разной кодифицируемой размерности не могут быть диффеоморфны. В совместной статье с В. Пидстригачем [37] эту гипотезу удалось доказать в важном частном случае: для минимальных поверхностей. В ходе работы оказалось, что алгебро-геометрические вычисления заметно сложнее, чем можно было ожидать, и только изумительная изобретательность Андрея Николаевича позволила успешно завершить данный проект.

В работах [37], [38], [40] А. Н. Тюрин реализовал программу построения спин-полиномиальных инвариантов гладкости. В этих работах, как и в предыдущей, циклы на многообразии модулей, необходимые для определения инвариантов, задавались через условие подскока ядра скрученного с инстантоном оператора Дирака, что в переводе на алгебро-геометрический язык означает подскок размерности пространств когомологий расслоения и, вследствие этого, допускает подробный геометрический анализ. Этот подход значительно улучшил вычислимость спин-полиномиальных инвариантов по сравнению с полиномами Дональдсона, позволив использовать так называемый процесс геометрической аппроксимации пространств модулей. В работах [39], [41], [42] конструируются так называемые канонические спин-полиномы, которые при различии гладких структур оказываются эффективней всех остальных спин-полиномов. Основная проблема здесь состоит в том, что многообразия модулей оказываются аномально большой размерности. В данных работах было показано, как вычислять спин-полиномы и в такой ситуации. Кроме того, был существенно усовершенствован процесс геометрической аппроксимации.

Ландшафт теории гладких 4-мерных структур радикально изменился с появлением инвариантов Зайберга–Виттена. Неожиданно для многих оказалось, что добавление в систему уравнений из работы [37] нелинейного члена делает многообразия модулей решений и соответствующие инварианты достаточно чувствительными к гладкой структуре несмотря на абелевость калибровочной группы. Виттен предложил физические аргументы в пользу того, что новые инварианты эквивалентны полиномам Дональдсона. В работе [44] была предложена программа математического доказательства данного факта.

Как и прежде, завершая свою деятельность в данной области, Андрей Николаевич написал замечательный обзор [45], оформленный в виде цикла лекций, в котором основной акцент делается на взаимоотношении деформационных типов и гладких структур на алгебраических поверхностях.

В последние годы Андрей Николаевич очень успешно и плодотворно разрабатывал сразу два направления: алгебраическую лагранжеву геометрию и неабелевы ϑ -функции на римановых поверхностях.

Лагранжева геометрия приобрела особое значение с появлением в математике такого физического феномена, как зеркальная симметрия. В работе [50], изучая компактные гладко погруженные лагранжевы циклы $S \subset M$ фиксированного топологического типа в данном симплектическом многообразии M , Андрей Николаевич показал, что фиксация на M почти комплексной структуры, согласованной с симплектической формой, позволяет для каждого лагранжева подмногообразия $S \subset M$ определить фазу Маслова $m: S \rightarrow S^1$. Циклы, на которых она постоянна, называются специальными лагранжевыми. Специальные лагранжевы циклы составляют в бесконечномерном многообразии всех лагранжевых циклов $\mathcal{L}$ подмногообразие конечной размерности, равной $\dim H^1(S)$, и являются специальным случаем косооголоморфных циклов, отвечающим критическому (равному $\pi/2$) значению кэлерова угла. Основным содержанием этой работы является попытка соединить зеркальные – лагранжеву и голоморфную (с кэлеровым углом 0) – геометрии непрерывным семейством “косооголоморфных” геометрий и показать, что традиционные геометрические проблемы могут исследоваться средствами, в равной мере приложимыми к любому значению кэлерова угла.

С другой стороны, дополнительная фиксация на M данных геометрического предквантования выделяет в $\mathcal{L}$ подмногообразие бор-зоммерфельдовых циклов, которое имеет конечную ко-размерность, также равную $\dim H^1(S)$. Вопрос о его расположении по отношению к многооб-

разию специальных лагранжевых циклов представлялся А. Н. Тюрину крайне важным. В [50], [47], [51] исследуются пересечения подмногообразия бор-зоммерфельдовых циклов со специальными $\dim H^1(S)$ -мерными семействами лагранжевых циклов, возникающими при наличии на M комплексной или вещественной поляризации. В обоих случаях конечное число точек пересечения соответствует естественным специальным базисам в голоморфных линейных системах, в пространствах ϑ -функций, в конформных блоках и т. п. В статьях [48], [55] показано, что если на M зафиксировать $Mr^{\mathbb{C}}$ -структуру¹, то эта структура индуцирует на лагранжевых циклах полувеса (внешние формы “полустаршей степени”), и многообразие полувзвешенных бор-зоммерфельдовых циклов фиксированного объема снабжается канонической интегрируемой кэлеровой структурой и голоморфным линейным расслоением, оснащённым голоморфными данными геометрического предквантования.

Другое направление деятельности А. Н. Тюрин в последние годы связано с изучением пространства модулей $\mathfrak{A}$ классов эквивалентных представлений $\pi_1(\Sigma) \rightarrow SU(2)$ фундаментальной группы римановой поверхности Σ рода g . Это продолжение еще аспирантской деятельности А. Н. Тюрин, относящейся к изучению симплектической геометрии многообразия $\mathfrak{A}$. Разрезание Σ на стандартные 3-валентные штаны по $3g - 3$ петлям определяет на многообразии $\mathfrak{A}$ симплектическое действие $(3g - 3)$ -мерного тора: каждая нетривиальная петля $C \subset \Sigma$ задает на $\mathfrak{A}$ функцию Голдмана, сопоставляющую представлению ϱ число $\pi^{-1} \arccos(\text{tr}(\varrho(C))/2)$, и гамильтоново векторное поле этой функции определяет на $\mathfrak{A}$ действие окружности $U(1)$. Отображение моментов относительно этого действия расслаивает многообразие $\mathfrak{A}$ на симплектические торические орбиты над выпуклым многогранником Δ_{Γ} , который называется многогранником Дельдана. Комбинаторика данного многогранника описывает примыкание торических орбит.

Статьи [52], [57], [59] посвящены явному комбинаторному описанию $\mathfrak{A}$ как симплекто-торического многообразия. В частности, в работе [59] дано описание топологии $\mathfrak{A}$, не апеллирующее к комплексной геометрии, откуда сразу следует независимость разных характеристик $\mathfrak{A}$ от выбора комплексной структуры на кривой. В статье [57] доказана гипотеза Флорентино: построено явное взаимно однозначное и гладкое во внутренних точках отождествление многогранника Дельдана с унитарным пространством Шоттки uSg , которое является фактором прямого произведения g экземпляров $SU(2)$ по диагональному действию $SU(2)$.

Трудно описать должным образом все научные достижения А. Н. Тюрин, еще труднее оценить то влияние, которое он оказал на математиков, особенно молодых, кто так или иначе общался с ним. Андрей Николаевич имел большое число учеников и последователей. Неформальный в разговоре, живо интересующийся мнением собеседника он щедро делился своими мыслями и идеями. Его семинар, проходивший в Математическом институте РАН на протяжении многих лет, пользовался огромной популярностью. Жизнелюбивый, влюбленный в математику, Андрей Николаевич заряжал своей энергией всех окружающих.

Живой и открытый в общении, он имел огромное количество друзей по всему миру. Ему нравилось встречать новых людей, ему было интересно жить и работать.

*Ф. А. Богомолов, А. Л. Городенцев, В. А. Исковский,
Ю. И. Манин, В. В. Никулин, Д. О. Орлов, А. Н. Паршин,
В. Я. Пидстригач, А. С. Тихомиров, Н. А. Тюрин, И. Р. Шафаревич*

СПИСОК НАУЧНЫХ РАБОТ А. Н. ТЮРИНА

- [1] О классификации двумерных векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. № 1. С. 21–54
- [2] Классификация векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. № 3. С. 657–688
- [3] Алгебраические поверхности // Труды МИАН. 1965. Т. 75
- [4] О классификации n -мерных векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1966. Т. 30. № 6. С. 1353–1366

¹Это аналогичное $Spin^{\mathbb{C}}$ -структуре поднятие структурной группы касательного расслоения на M с симплектической до $U(1)$ -расширения ее двулистной накрывающей.

- [5] Аналог теоремы Торелли для двумерных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33. № 5. С. 1149–1170
- [6] Аналог теоремы Торелли для многомерных векторных расслоений над произвольной алгебраической кривой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. № 2. С. 338–365
- [7] О поверхности Фано неособой кубики в P^4 // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. № 6. С. 1200–1208
- [8] Геометрия поверхности Фано неособой кубики $F \in P^4$ и теоремы Торелли для поверхностей Фано и кубики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. № 3. С. 498–529
- [9] Пять лекций о трехмерных многообразиях // УМН. 1972. Т. 27. № 5. С. 3–50
- [10] О множестве особенностей дивизора Пуанкаре многообразия Пикара поверхности Фано неособой кубики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 5. С. 947–956
- [11] Геометрия модулей векторных расслоений // УМН. 1974. Т. 29. № 6. С. 59–88
- [12] О пересечении квадрик // УМН. 1975. Т. 30. № 6. С. 51–99
- [13] Об инварианте связки квадрик // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. № 1. С. 23–27
- [14] Геометрия дивизора Пуанкаре многообразия Прима // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. № 5. С. 1003–1043
- [15] Конечномерные расслоения на бесконечных многообразиях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. № 6. С. 1248–1268
- [16] Периоды и главные части квадратичных дифференциалов на оснащенной римановой поверхности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41. № 6. С. 1425–1442
- [17] Обобщение $\wp$ -функций Вейерштрасса и многообразие модулей оснащенных римановых поверхностей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 5. С. 1151–1161
- [18] О периодах квадратичных дифференциалов // УМН. 1978. Т. 33. № 6. С. 149–195
- [19] Средний якобиан трехмерных многообразий // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Т. 12. М.: ВИНТИ, 1979. С. 5–57
- [20] Геометрия особенностей общей квадратичной формы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 5. С. 1200–1211
- [21] Локальный инвариант риманова многообразия // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 4. С. 824–851
- [22] Структура многообразия пар коммутирующих пучков симметрических матриц // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 2. С. 409–430
- [23] On the superpositions of mathematical instantons // Progr. Math. 1983. V. 36. P. 433–450
- [24] The instanton equations for $(n + 1)$ -superpositions of marked $adTP^3 \oplus adTP^3$ // J. Reine Angew. Math. 1983. V. 341. P. 131–146
- [25] Локальный и глобальный инварианты четырехмерного псевдориманова многообразия // Труды МИАН. 1984. Т. 165. С. 205–219
- [26] Исследования по геометрии алгебраических многообразий в отделе алгебры МИАН // Труды МИАН. 1985. Т. 168. С. 98–109
- [27] Специальные 0-циклы на поляризованной поверхности типа $K3$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 1. С. 131–151
- [28] Инстантонная пленка для $(\mathbb{CP}^2, \text{can})$ // Доклады по математике и ее приложениям. Т. 1. № 1. Москва–Тула: МИАН СССР–Тульский политехнический институт, 1987. С. 123–147
- [29] Cycles, curves and vector bundles on an algebraic surface // Duke Math. J. 1987. V. 54. P. 1–26
- [30] Симплектические структуры на многообразии модулей векторных расслоений на алгебраических поверхностях с $p_g > 0$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 4. С. 813–851
- [31] Алгебро-геометрические аспекты гладкости. 1. Полиномы Дональдсона // УМН. 1989. Т. 44. № 3. С. 93–143
- [32] A slight generalization of the Mehta–Ramanathan theorem // Algebraic Geometry (Proceedings of the US–USSR Symposium, Chicago, IL, 1989). Berlin: Springer-Verlag, 1989. P. 258–272. (Lecture Notes in Math. V. 1479.)
- [33] The geometry of the special components of moduli space of vector bundles over algebraic surfaces of general type // Complex Algebraic Varieties (Proc. Conf., Bayreuth, 1990). Berlin: Springer-Verlag, 1990. P. 166–175. (Lecture Notes in Math. V. 1507.)
- [34] The moduli spaces of vector bundles on threefolds, surfaces and curves I // Erlangen, 1990
- [35] Метрика Вейля–Петерсона на пространстве модулей стабильных векторных расслоений и пучков над алгебраической поверхностью // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 3. С. 600–630

- [36] Инварианты гладкой структуры алгебраической поверхности, задаваемые оператором Дирака // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 2. С. 279–371 (совм. с В. Я. Пидстригачем)
- [37] A simple method of distinguishing the underlying differentiable structures of algebraic surfaces // Preprint. Universität Göttingen. Mathematica Gottingensis, Sonderforschungsbereichs “Geometry and Analysis”. Heft 25, 1992
- [38] Спин-полиномиальные инварианты гладких структур на алгебраических поверхностях // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 2. С. 125–164
- [39] Almost canonical polynomials of algebraic surfaces // Algebraic Geometry and its Applications (Proc. Conf., Yaroslavl, 1992 / ed. A. Tikhomirov, A. Tyurin. Braunschweig: Vieweg, 1993. P. 227–251. (Aspects Math. V. E 25.))
- [40] Canonical and almost canonical spin polynomials of an algebraic surface // Vector Bundles in Algebraic Geometry (Proceedings of the Symposium, Durham, England, 1993 / ed. N. J. Hitchin et al. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. P. 255–281. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 208.))
- [41] Spin canonical invariants of 4-manifolds and algebraic surfaces // Warwick Preprints № 38/1994. P. 1–23
- [42] Канонические спинполиномы алгебраической поверхности. 1 // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 6. С. 157–204
- [43] Application of geometric approximation procedure to computing the Donaldson polynomials for $\mathbb{CP}^2$ // Preprint. Universität Göttingen. Mathematica Göttingensis, Sonderforschungsbereichs “Geometry and Analysis”. Heft 12, 1994. P. 1–71 (with A. Tikhomirov)
- [44] Localisation of the Donaldson’s Invariants along Seiberg–Witten Classes // Preprint 95-075. Bielefeld: Univ. Bielefeld, Sonderforschungsbereich 343 “Diskrete Strukturen in der Mathematik”, 1995 (with V. Pidstrigach)
- [45] Six lectures on four-manifolds // Lecture Notes in Math. 1996. V. 1646. P. 186–246
- [46] The classical geometry of vector bundles // Algebraic Geometry (Ankara, 1995). New York: Dekker, 1997. P. 347–378. (Lecture Notes in Pure and Appl. Math. V. 193.)
- [47] Quantization and “theta function” // Preprint № 216. Paris: Université Paris VI–VII, 1999; math.AG/9904046
- [48] Complexification of Bohr–Sommerfeld conditions // Preprint № 15. Oslo: Inst. of Math., Univ. Oslo, 1999
- [49] Geometric quantization and mirror symmetry // Preprint № 22. Warwick, 1999; math.AG/9902027
- [50] Специальная лагранжева геометрия как малая деформация алгебраической геометрии (GQR и зеркальная симметрия) // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 2. С. 141–224
- [51] О базисах Бора–Зоммерфельда // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 5. С. 163–196
- [52] Three mathematical faces of $SU(2)$ -spin networks // Preprint № 35/2000. Lisboa: IST, 2000; math.DG/0011035
- [53] Analytical aspects of the theory of non abelian theta functions // Preprint. Lisboa: IST, 2000 (with C. Florentino, J. Mourao, J. Nunes)
- [54] Неабелевы аналоги теоремы Абеля // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 1. С. 123–180
- [55] Абелева лагранжева алгебраическая геометрия // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 3. С. 15–50 (совм. с А. Л. Городенцевым)
- [56] Quantization, classical and quantum field theory and theta-functions // 2002; math.AG/0210466
- [57] Решеточные калибровочные теории и гипотеза Флорентино // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 2. С. 205–224
- [58] On the Mumford–Narasimhan problem // Preprint № 129. Bonn: Max-Planck-Institute für Mathematik, 2002
- [59] Модели Дельзана пространств модулей // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. № 2. С. 167–180
- [60] Fano versus Calabi–Yau // Proceedings of the Fano Conference, Turin, Italy, 2002 (to appear)
- [61] Предисловие редактора перевода // Четырехмерная риманова геометрия (семинар Артура Бессе 1978/79). М.: Мир, 1985. С. 5–6
- [62] От редактора перевода // Ф. Клейн. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. М.: Наука, 1989. С. 3–8