Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Нежинский, Псевдогомотопические инварианты сингулярных зацеплений,
УМН, 1999, том 54, выпуск 3, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm164>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:37:09

ПСЕВДОГОМОТОПИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ СИНГУЛЯРНЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

В. М. НЕЖИНСКИЙ

Предмет работы – сингулярные зацепления нескольких сфер размерности k и одной сферы размерности p в $(2k + 1)$ -мерной сфере, где $k > 1$. Пусть t – число компонент сингулярного зацепления. В этой заметке для некоторых t, k и p построены полные наборы псевдогомотопических инвариантов таких сингулярных зацеплений и изучены свойства построенных инвариантов. Достоин внимания, что среди наших инвариантов имеются аналоги $\bar{\mu}$ -инвариантов Милнора одномерных зацеплений. (Более подробно об этом написано в [1]; см. [1; Добавление].)

1. Формулировка проблемы. Пусть r, k, p – натуральные числа. *Сингулярным (r, k, p) -зацеплением* называется последовательность непрерывных отображений $f_1: S^k \rightarrow S^{2k+1}, \dots, f_r: S^k \rightarrow S^{2k+1}, f: S^p \rightarrow S^{2k+1}$ с попарно непересекающимися образами. Сингулярные (r, k, p) -зацепления $(f_1, \dots, f_r, f)$ и $(g_1, \dots, g_r, g)$ называются *псевдогомотопными*, если существует последовательность непрерывных отображений $F_1: S^k \times I \rightarrow S^{2k+1} \times I, \dots, F_r: S^k \times I \rightarrow S^{2k+1} \times I, F: S^p \times I \rightarrow S^{2k+1} \times I$ с попарно непересекающимися образами, такая, что $F_i(x, 0) = (f_i(x), 0), F_i(x, 1) = (g_i(x), 1), F(y, 0) = (f(y), 0)$ и $F(y, 1) = (g(y), 1)$ (для $1 \leq i \leq r, x \in S^k$ и $y \in S^p$). Наша проблема – это проблема псевдогомотопической классификации сингулярных (r, k, p) -зацеплений. Мы ограничимся рассмотрением только случая $k > 1$.

2. Определения и свойства инвариантов. Пусть $L = (f_1, \dots, f_r, f)$ – сингулярное (r, k, p) -зацепление.

Инварианты $\mu(i, j)(L)$. Пусть $1 \leq i \neq j \leq r$. Мы определяем $\mu(i, j)(L)$ как коэффициент зацепления отображения f_i с f_j . Хорошо известно, что $\mu(i, j)(L) = (-1)^{k+1} \mu(j, i)(L)$.

Назовем сингулярное (r, k, p) -зацепление $(g_1, \dots, g_r, g)$ *типичным*, если $g_1, \dots, g_r$ – гладкие вложения. (Нетрудно доказать, что любое сингулярное (r, k, p) -зацепление псевдогомотопно типичному.) Предположим, что сингулярное (r, k, p) -зацепление L типично. Пусть $i \leq r$ – натуральное число. Положим $X = S^{2k+1} \setminus \text{Im } f_i$ и обозначим через h вложение $S^k \rightarrow X$ такое, что коэффициент зацепления подмногообразия $h(S^k)$ сферы S^{2k+1} с $\text{Im } f_i$ равен 1. Нетрудно проверить, что h – гомотопическая эквивалентность. Пусть $h': X \rightarrow S^k$ – отображение, гомотопическое обратное к h . Рассмотрим отображение $S^p \rightarrow S^k$, задаваемое формулой $x \mapsto h'(f(x))$, и обозначим через u его гомотопический класс. Мы полагаем $\mu(i, r+1)(L) = Eu$ (где E – гомоморфизм надстройки $\pi_p(S^k) \rightarrow \pi_{p+1}(S^{k+1})$).

Инварианты $\nu(i, j, r+1)(L)$. Пусть $1 \leq i \neq j \leq r$. Рассмотрим какое-нибудь сохраняющее ориентацию гладкое вложение $g: D^{2k+1} \rightarrow S^{2k+1}$ такое, что $g(0) \in \text{Im } f_i$ и $\text{Im } g \cap \text{Im } f_j = \emptyset$. Возьмем какую-нибудь точку $x_0 \in \text{Im } f_j$ и выберем гомотопическую эквивалентность $h: S^{2k+1} \setminus (g(0) \cup x_0) \rightarrow S^{2k}$ такую, что $h(g(x)) = x$ для $x \in S^{2k} (= \partial D^{2k+1})$. Мы определяем $\nu(i, j, r+1)(L)$ как гомотопический класс отображения $S^p \rightarrow S^{2k}$, задаваемого формулой $x \mapsto h(f(x))$.

Несложная проверка показывает, что если $p < 4k - 1$, то $\nu(r, j, r+1)(L) = -\nu(j, r, r+1)(L)$ и $\nu(i, j, r+1)(L) = \nu(i, r, r+1)(L) - \nu(j, r, r+1)(L)$ для $i \neq r$.

Пусть G – абелева группа и $\|a_{ij}\|$ – целочисленная квадратная матрица порядка r . Определим гомоморфизм $\varkappa(G, \|a_{ij}\|): \bigoplus^{r-1} G \rightarrow \bigoplus^{r(r-1)/2} G$ формулой

$$(u_1, \dots, u_{r-1}) \mapsto (a_{12}(u_1 - u_2), \dots, a_{1r-1}(u_1 - u_{r-1}), a_{1r}u_1, \\ a_{23}(u_2 - u_3), \dots, a_{2r-1}(u_2 - u_{r-1}), a_{2r}u_2, \dots, a_{r-1r}u_{r-1}).$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00832).

Оказывается, если $p < 3k - 2$, то $(\nu(1, r, r+1)(L), \dots, \nu(r-1, r, r+1)(L)) \in \text{Ker } \varkappa(\pi_p(S^{2k}), \|\mu(i, j)(L)\|)$, где мы положили $\mu(i, i)(L) = 0$.

Положим $B = \vee^r S^k$ и обозначим для $1 \leq i \leq r$ через in_i стандартное вложение $S^k \rightarrow B$. Пусть $(g_1, \dots, g_r, g)$ – типичное сингулярное (r, k, p) -зацепление. Положим $Y = S^{2k+1} \setminus (\text{Im } g_1 \cup \dots \cup \text{Im } g_r)$; назовем гладкое вложение $h: B \rightarrow Y$ *m-структурой* сингулярного (r, k, p) -зацепления $(g_1, \dots, g_r, g)$, если (при $i = 1, \dots, r$) композиция отображения $h \circ \text{in}_i$ и включения $Y \hookrightarrow Y \cup \text{Im } g_i$ гомотопна постоянному отображению и коэффициент зацепления многообразий $h(\text{in}_i(S^k))$ и $\text{Im } g_i$ равен 1. Типичное сингулярное (r, k, p) -зацепление $(g_1, \dots, g_r, g)$ называется *простым*, если существует такая его *m-структура* h , что $\text{Im } g \subset h(B)$. Оказывается, если $p < 3k - 2$, то сингулярное (r, k, p) -зацепление L псевдогомотопно простому тогда и только тогда, когда $\nu(1, r, r+1)(L) = \dots = \nu(r-1, r, r+1)(L) = 0$.

Инвариант $M(L)$. Пусть $p < 3k - 2$. Предположим, что сингулярное (r, k, p) -зацепление L просто. Выберем какую-нибудь его *m-структуру* h такую, что $\text{Im } f \subset h(B)$, и обозначим через u гомотопический класс отображения $S^p \rightarrow B$, задаваемого формулой $x \mapsto h^{-1}(f(x))$. Согласно теореме Хилтона о гомотопических группах букета сфер и тому, что $p < 3k - 2$, существуют элементы $\mu_i \in \pi_p(S^k)$, где $1 \leq i \leq r$, и $\mu(i, j, r+1) \in \pi_p(S^{2k+1})$, где $1 \leq i < j \leq r$, такие, что

$$u = \sum_{1 \leq i \leq r} \text{in}_i \circ \mu_i + \sum_{1 \leq i < j \leq r} [\text{in}_j, \text{in}_i] \circ \mu(i, j, r+1)$$

(знак $[\ , \]$ обозначает умножение Уайтхеда). Мы определяем $M(L)$ как класс смежности элемента $(\mu(1, 2, r+1), \dots, \mu(1, r, r+1), \mu(2, 3, r+1), \dots, \mu(r-1, r, r+1)) \in \bigoplus^{r(r-1)/2} \pi_p(S^{2k-1})$ по подгруппе $\text{Im } \varkappa(\pi_p(S^{2k-1}), \|\mu(i, j)(L)\|)$. (Замечу, что $E\mu_i = \mu(i, r+1)(L)$.)

3. Основные теоремы. Пусть: $\|a_{ij}\|$ – целочисленная квадратная матрица порядка r такая, что $a_{ij} = (-1)^{k+1} a_{ji}$ ($1 \leq i \neq j \leq r$); $b_1, \dots, b_r \in E\pi_p(S^k)$; $c_1, \dots, c_{r-1}$ – элементы группы $\pi_p(S^{2k})$ такие, что $(c_1, \dots, c_{r-1}) \in \text{Ker } \varkappa(\pi_p(S^{2k}), \|a_{ij}\|)$; $d \in \text{Coker } \varkappa(\pi_p(S^{2k-1}), \|a_{ij}\|)$.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ. Если $p < 3k - 2$, то: существует типичное сингулярное (r, k, p) -зацепление L такое, что $\mu(i, j)(L) = a_{ij}$, где $1 \leq i \neq j \leq r$, $\mu(i, r+1)(L) = b_i$, где $1 \leq i \leq r$, и $\nu(i, r, r+1)(L) = c_i$, где $1 \leq i \leq r-1$; существует простое сингулярное (r, k, p) -зацепление L' такое, что $\mu(i, j)(L') = a_{ij}$, где $1 \leq i \neq j \leq r$, $\mu(i, r+1)(L') = b_i$, где $1 \leq i \leq r$, и $M(L') = d$.

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ. Если $p < 2k - 1$ ($c \ k > 1$), $p = 2k + 4$ $c \ k > 6$ или $r = 1$ $c \ p \leq 3k - 2$, то типичные сингулярные (r, k, p) -зацепления L и L' псевдогомотопны тогда и только тогда, когда $\mu(i, j)(L) = \mu(i, j)(L')$, где $1 \leq i < j \leq r+1$. Если $p = 2k + 3$ $c \ k > 5$ или $p = 2k + 11$ $c \ k > 13$, то типичные сингулярные (r, k, p) -зацепления L и L' псевдогомотопны тогда и только тогда, когда $\mu(i, j)(L) = \mu(i, j)(L')$, где $1 \leq i < j \leq r+1$, и $\nu(i, r, r+1)(L) = \nu(i, r, r+1)(L')$, где $1 \leq i \leq r-1$. Если $p < 3k - 2$, то простые сингулярные (r, k, p) -зацепления L и L' псевдогомотопны тогда и только тогда, когда $\mu(i, j)(L) = \mu(i, j)(L')$, где $1 \leq i < j \leq r+1$, и $M(L) = M(L')$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Нежинский В. М. // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1998. Т. 252. С. 175–190.