Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Сенашов, А. И. Созутов, В. П. Шунков, Исследования групп с условиями конечности в Красноярске, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 5, 3–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1641>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:16:29

УДК 512.54

**ИССЛЕДОВАНИЯ ГРУПП С УСЛОВИЯМИ
КОНЕЧНОСТИ В КРАСНОЯРСКЕ**

В. И. Сенашов, А. И. Созутов, В. П. Шунков

Сделан обзор результатов по бесконечным группам с условиями конечности, полученных в Красноярской школе по теории групп за последние 40 лет.
Библиография: 195 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	3
2. Обобщения теоремы Фробениуса	5
3. Группы с нормальной компонентой расщепления	8
4. Группы с системами фробениусовых подгрупп	10
5. Локально разрешимые группы	12
6. Локально конечные группы	13
7. Слоисто конечные группы	14
8. Черниковские группы	15
9. Равномерные произведения	17
10. Группы с инволюциями	18
11. Существование подгрупп с некоторыми свойствами	20
12. Дважды транзитивные группы	24
13. Группы с заданной подгруппой	26
14. Группы с условием минимальности	28
15. Группы с условием примарной минимальности	31
16. Группы, насыщенные конечными группами	32
17. M_p -группы	35
18. T_0 -группы	37
19. Φ -группы	38
Список литературы	39

1. Введение

Изучение групп с разного рода условиями конечности началось еще в 30-х–40-х годах в школе О. Ю. Шмидта. Это было связано с попытками обобщить некоторые результаты по конечным группам на бесконечные группы. В те годы было введено очень

важное условие конечности в группах: обрыв убывающих цепочек подгрупп (условие минимальности). Кроме этого были выделены следующие классы групп:

- 1) периодические группы;
- 2) локально конечные группы;
- 3) локально разрешимые группы.

В это же время С. Н. Черниковым было доказано, что класс бесконечных локально разрешимых групп с условием минимальности совпадает с классом конечных расширений прямых произведений конечного числа квазициклических групп. Позднее такие группы были названы черниковскими.

Очевидно, группа с условием минимальности (даже для абелевых подгрупп) является периодической. В течение длительного времени оставался нерешенным вопрос: будет ли группа с условием минимальности черниковской? Для многих классов периодических групп он решался положительно. Например, сам О. Ю. Шмидт решил его в классе 2-групп, а в предлагаемом обзоре он решен даже при условии минимальности для абелевых подгрупп в классе сопряженно бипримитивно конечных групп (в частности, для 2-групп).

Сформулированный выше вопрос в известной программе Куроша–Черникова получил название “проблема минимальности”. Однако он еще не играл ведущей роли в теории периодических групп, так как в этой теории тогда не была решена знаменитая проблема Бернсайда о периодической группе конечного периода. Более того, еще не было найдено примера периодической не локально конечной группы. Наконец, в 1959 г. было объявлено [68] об отрицательном решении проблемы Бернсайда и в 1968 г. опубликовано полное доказательство этого решения. Доказано, что свободная бернсайдовская группа $B(m, n)$ с числом порождающих $m \geq 2$ и нечетным периодом $n \geq 4381$ бесконечна [57], [69] и удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп [1]. Позднее С. И. Алян понизил период до $n \geq 665$. Доказательство этой теоремы оказалось обоснованно длинным и естественно затрудняло почувствовать разницу между условиями периодичности и локальной конечности группы. Но, к счастью, в 1964 г. Е. С. Голодом [28] был построен простой пример не локально конечной p -группы.

Примеры групп ограниченного периода остаются, к сожалению, громоздкими для изложения (они опубликованы в монографиях их создателей [1], [74]).

Выше было сказано, что группа типа $B(m, n)$, $m \geq 2$, $n \geq 665$, удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп. Однако она не удовлетворяет условию минимальности для всех подгрупп. Таким образом, “проблема минимальности” оставалась открытой, и лишь в 1979 г. А. Ю. Ольшанским она была решена отрицательно [71]. Более того, в [71] была наконец-то решена знаменитая проблема Шмидта о существовании бесконечной некоммутативной группы, у которой все собственные подгруппы конечны.

В свете ситуации, возникшей в теории периодических групп (см. выше), становится понятной важность результатов, изложенных в предлагаемом обзоре.

Ряд результатов из данного обзора вошли в [52] и [163].

В г. Красноярске начиная с 1965 г. под руководством профессора В. П. Шункова начала формироваться известная теперь как у нас в стране, так и за рубежом, алгебраическая школа. Школа включает в себя следующие направления исследований: группы Фробениуса, строение групп Фробениуса и некоторых расщепляемых групп,

признаки непрототипности бесконечных групп, локально разрешимые группы, локально конечные группы, слойно конечные группы, квазислойно конечные группы, почти слойно конечные группы, черниковские группы, обобщенно черниковские группы, группы конечного ранга, группы с конечными элементами, финитно-аппроксимируемые группы, бесконечные группы с сильно вложенной подгруппой, группы с условием минимальности, группы с условием минимальности для абелевых подгрупп, группы с условием примарной минимальности, группы, насыщенные конечными простыми неабелевыми группами, T_0 -группы, M_p -группы, Φ -группы.

Авторы благодарны Российскому фонду фундаментальных исследований (гранты 02-01-07034 и 05-01-00576), Красноярскому краевому фонду науки (грант 8F0019), шестому конкурсу-экспертизе 1999 г. научных проектов молодых ученых (грант 9) за финансовую поддержку.

2. Обобщения теоремы Фробениуса

Напомним, что конечная группа G называется *группой Фробениуса*, если в ней найдется собственная подгруппа H , совпадающая со своим нормализатором и взаимно простая со своими сопряженными подгруппами, отличными от H [179]. В подстановочном представлении по указанной подгруппе G есть транзитивная группа подстановок с неединичным стабилизатором точки H , в которой лишь единичная подстановка оставляет на месте две точки. Согласно теореме Фробениуса, все регулярные подстановки группы G вместе с единицей составляют нормальную в G подгруппу F , называемую *ядром*. При этом G распадается в полупрямое произведение ядра и подгруппы H , называемой *дополнением*. С помощью диаграмм Эйлера–Венна строение группы G можно представить в виде “ромашки” с желтым ядром и белыми лепестками-дополнениями, в которой любая пара указанных подгрупп пересекается по общей виртуальной единице [91].

Конечные группы Фробениуса обладают рядом замечательных свойств. Ядро и дополнение – холловские подгруппы, ядро единственно, а все дополнения сопряжены. Произвольная собственная подгруппа либо содержится в ядре или в одном из дополнений, либо сама является группой Фробениуса [179]. Характеристическая подгруппа дополнения, порожденная всеми его элементами простых порядков, либо циклическая, либо есть прямое произведение одной из групп $SL_2(3)$, $SL_2(5)$ на циклическую холловскую подгруппу (возможно, единичную). Ядро конечной группы Фробениуса нильпотентно, и его степень нильпотентности ограничена некоторой функцией от простых делителей порядка дополнения. Каждая собственная подгруппа группы Фробениуса обладает нильпотентной характеристической подгруппой. Это позволяет эффективно контролировать пересечения фробениусовых подгрупп в группе и применять нормализаторный процесс. Имея в конечном случае прозрачное строение, группы Фробениуса встречаются в качестве секций во всех конечных ненильпотентных группах, что делает их мощным инструментом исследования групп с различными условиями конечности.

Теорема Фробениуса в полном объеме переносится на классы локально конечных и даже бинарно конечных групп (В.М. Бусаркин, А.И. Старостин [7], [179]). Ядра локально конечных групп Фробениуса, согласно известным теоремам Томпсона и Хигмана [190], [36], нильпотентны; дополнения, в силу теорем Бернсайда и Цассенхауза [194], допускают исчерпывающее описание. Отметим важное для бесконечных

групп доказательство В. Д. Мазурова [66] теоремы Цассенхауза, свободное от теории характеров. Во всех известных до недавнего времени группах Фробениуса ядра были нильпотентными. Следующая теорема вытекает из результатов Ю. М. Горчакова [30].

ТЕОРЕМА 2.1. *Если $G = F \rtimes H$, подгруппа H локально конечна и обособлена в G , а подгруппа F локально нильпотентна, то G есть группа Фробениуса с ядром F и дополнением H в том и только том случае, когда F – π -полная группа, где $\pi = \pi(H)$.*

Необходимость обобщений фундаментальной теоремы Фробениуса на бесконечные группы очевидна и отмечалась уже О. Ю. Шмидтом [122]. Но даже в классе всех периодических групп теорема Фробениуса не верна. С разнообразием возникающих при этом ситуаций можно ознакомиться по примерам, приведенным в главе 2 монографии [91].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [173]. Группа G называется *группой Фробениуса* (*фробениусовой группой*) с дополнением (неинвариантным множителем) H и ядром (инвариантным дополнением) F , если F и H – такие ее собственные подгруппы, что

- 1) $H \cap H^g = 1, g \in G \setminus H$;
- 2) $F = \bigcap_{x \in G} (G \setminus H^x) = G \setminus \bigcup_{x \in G} (H \setminus \{1\})^x$;
- 3) $G = F \rtimes H$.

Если G и H удовлетворяют условию 1) определения, то по В. П. Шункову (см. [173]) они составляют *пару Фробениуса* (G, H) ; Ю. М. Горчаков [30] предложил называть в этом случае подгруппу H *обособленной* в G . Отметим, что наше определение отличается от определения группы Фробениуса, которое используют, например, П. Нойман и П. Роули [67]. Дело в том, что во многих классах бесконечных групп теорема Фробениуса неверна, и не только потому, что множество F не всегда подгруппа. Уже в классе бесконечных периодических групп все три условия определения независимы. Так, для черниковской p -группы $G = F \rtimes H$ с конечным центром $Z(G)$, полной абелевой подгруппой F и циклической подгруппой H порядка p выполняются условия 2), 3) определения и нарушается условие 1). В группе Новикова–Адяна [1] $G = B(2, n) = \langle a, b \rangle$ периода $n \geq 665$ каждая подгруппа H порядка n обособлена, при этом для подгруппы $H = \langle a \rangle$ есть нормальные дополнения F ($G = F \rtimes H$), но не для какого из них не выполняется равенство $F = \bigcap_{x \in G} (G \setminus H^x)$. Наконец, для бесконечной группы А. Ю. Ольшанского [73], все собственные подгруппы которой сопряжены и являются циклическими простого порядка, множество $F = \bigcap_{x \in G} (G \setminus H^x)$ есть подгруппа, равная единичной, но нарушено условие 3) определения.

Для смешанных групп и групп без кручения аналогичные примеры легко получить из свободных групп и свободных произведений, ряд их указан в [173], [179], [91]. Среди них выделим пример, принадлежащий В. П. Шункову [173]. Он имеет вид $G = B(m, n) \rtimes \langle a \rangle$, где $B(m, n)$ – группа Новикова–Адяна, a – элемент порядка 2, индуцирующий нетривиальный автоморфизм подгруппы $B(m, n)$, и $H = C_G(a)$. Используя свойства групп $B(m, n)$ [1], В. П. Шунков доказал, что (G, H) – пара Фробениуса, но подгруппа H не обладает в G нормальным дополнением.

Пусть $G = F \rtimes H$ – группа Фробениуса. В бесконечном случае она может иметь очень сложное строение. В периодической группе G дополнение H не обязано быть локально конечной группой. Приведем теорему 5.1 из [91].

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть m, n, q – натуральные числа, q – простое, $(q, n) = 1$, $m \geq 2$ и $n = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ – каноническое разложение n , $\alpha_0 \geq 0$, $p_1^{\alpha_1-1} \cdots p_s^{\alpha_s-1} \geq 665$. При этих условиях существует m -порожденная бесконечная слабо бипримитивно конечная группа Фробениуса периода nq .

В.В. Блудовым в [6] (см. комментарии к вопросам 6.53 и 13.54 б) из Коуровской тетради [189]) получены следующие результаты.

ТЕОРЕМА 2.3. Любая группа может быть изоморфно вложена в ядро F подходящей группы Фробениуса $G = F \rtimes H$ с бесконечным циклическим дополнением H .

ТЕОРЕМА 2.4. Для любой правоупорядоченной группы H существует группа Фробениуса $G = F \rtimes H$ с дополнением H .

Интересные результаты о строении групп Фробениуса, порожденных элементами малых порядков, были недавно получены А. Х. Журтовым и В. Д. Мазуровым [45]–[47].

В [126] была доказана теорема, допускающая следующую формулировку.

ТЕОРЕМА 2.5. Периодическая группа с конечной обособленной подгруппой четного порядка локально конечна.

Эта теорема – предтеча знаменитых результатов о группах с регулярными инволюциями [127], [131], [139]. Ее доказательство существенно использовало конечность обособленной подгруппы и конечность подгрупп периодической группы, порожденных парой инволюций. Оценив важность последнего свойства, вскоре В. П. Шунков вводит понятие бипримитивно конечных групп [134], [140], а затем и (слабо) сопряженно бипримитивно конечных [141]. Не обязательно периодическая бесконечная группа называется *слабо (сопряженно) бипримитивно конечной*, если в ней любая пара (сопряженных) элементов одного и того же простого порядка порождает конечную подгруппу [173]. Если это свойство наследуют все сечения группы по конечным подгруппам, то такая группа называется *(сопряженно) бипримитивно конечной*. Сейчас эти группы называются *группами Шункова*. С целью унификации терминологии в [166] элемент a группы G с конечными подгруппами вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$ был назван *конечным*, и H -*конечным*, если указанное условие выполняется для $g \in G \setminus H$. Очевидно, что слабо сопряженно бипримитивная конечность группы G равносильна конечности в G всех элементов простых порядков. Если в теореме В. П. Шункова из [126] условие периодичности группы заменить на условие существования в ней конечной инволюции, то теорема останется верной [5]. Следующее обобщение теоремы Фробениуса было получено в [173].

ТЕОРЕМА 2.6 (А. И. Созутов, В. П. Шунков [173]). Если (G, H) – пара Фробениуса и H содержит H -конечный элемент a простого порядка $p > 2$, то $G = F \rtimes H$, $F \rtimes \langle a \rangle$ – периодическая группа Фробениуса и либо $H = N_G(\langle a \rangle)$, либо $p = 3$ или $p = 5$, H содержит единственную инволюцию и F – абелева группа.

Для случая $H = \langle a \rangle$ теорему доказать просто. Ввиду условий, любая подгруппа $L_g = \langle a, a^g \rangle$, где $g \in G$, есть конечная группа Фробениуса вида $F_g \rtimes \langle a \rangle$, при этом подгруппы $\langle a \rangle$ и $\langle a^g \rangle$ сопряжены в L_g . Отсюда выводим, что $g \in L_g$ и $\bigcap (G \setminus H^\#)^x = F = \bigcup F_g$. Очевидно, что $N_G(F) = G$. Если для элементов $b, c \in F$ произведение $bc^{-1} \in \bigcup H^x$, то с точностью до сопряженности можно считать, что $bc^{-1} \in \langle a \rangle$. Как

и выше, $b, c \in L_b = \langle a, a^b \rangle$, значит, $b, c \in F_b = F_c$ и $bc^{-1} = 1$. Следовательно, $G = F \rtimes H$ – группа Фробениуса с ядром F и дополнением H .

Основное утверждение теоремы 2.6 – существование к подгруппе H нормального периодического дополнения F . Ввиду примера В. П. Шункова условие $|a| > 2$ здесь необходимо, от простоты $|a|$ можно отказаться (А. И. Созутов [167]). В [173] теорема Фробениуса в классической формулировке была перенесена на классы периодических (слабо) (сопряженно) бипримитивно конечных групп.

Если обособленная подгруппа H периодической группы G содержит инволюцию i , то i – единственная инволюция в H , а силовская 2-подгруппа в H либо (локально) циклическая, либо (обобщенная) группа кватернионов (конечная или бесконечная) [126], [173]. Если при этом в G найдется элемент a порядка > 2 , который с любой инволюцией из i^G порождает конечную подгруппу (равносильно $|\langle i, a^g \rangle| < \infty \ \forall g \in G$), то $G = F \rtimes H$ – группа Фробениуса с абелевым ядром F и дополнением H [167]. Когда при тех же условиях G – смешанная группа, т.е. содержит и элементы бесконечного порядка, то нормальное дополнение F к H также существует и инволюция i в H единственна, но периодичной и абелевой может оказаться только подгруппа $\langle a^G \rangle$ [167]. Отметим, наконец, что теорема 2.6 верна и в случае, когда неединичные элементы пересечений $H \cap H^g$, $g \in G \setminus H$, имеют бесконечный порядок.

Следующая теорема В. П. Шунковым была вначале доказана для конечных групп и опубликована в [151].

ТЕОРЕМА 2.7 (В. П. Шунков [152]). *Пусть G – группа, H – ее собственная подгруппа, $V = \langle x, y^H \rangle$, где x, y – некоторые нетривиальные элементы конечных порядков из H , по крайней мере один из которых имеет четный порядок и по крайней мере один из которых не является элементом порядка два, удовлетворяющие следующим дополнительным условиям:*

- а) $V \cap V^g = 1$ (для любого $g \in G \setminus H$);
- б) почти для всех (т.е. кроме, быть может, конечного числа) элементов вида y^g ($g \in G \setminus H$) подгруппы $\langle x, y^g \rangle$ конечны;
- в) если для некоторого $s \in G \setminus H$ подгруппа $\langle x, y^s \rangle$ конечна, то

$$H \cap \langle x, y^s \rangle \leq V, \quad H \cap \langle x^{s^{-1}}, y \rangle \leq V.$$

Тогда $G = F \rtimes C_G(i)$, где i – элемент порядка два из V , $H = C_G(i)$, F – периодическая абелева подгруппа и $(F \rtimes V, V)$ – пара Фробениуса.

Отметим теорему 2.9 из [91], которая обобщает теорему 2 из [153].

ТЕОРЕМА 2.8. *Пусть множество инволюций J группы G содержит конечную инволюцию и обособленную подгруппу H с инволюцией, причем для некоторого смежного класса $Hg \neq H$ пересечение $J^2 \cap Hg$ конечно. Тогда все инволюции в G сопряжены, инволюция в H единственна, $\langle J \rangle$ – локально конечная группа Фробениуса с абелевым ядром F и $G = F \rtimes H$.*

3. Группы с нормальной компонентой расщепления

Группа Фробениуса $G = F \rtimes H$ расщепляема по определению, а ее ядро F и дополнения H^g – компоненты расщепления. Подгруппа H действует свободно на F при

сопряжении, т.е. $f^h = f$ для $f \in F, h \in H$, только если $f = 1$ или $h = 1$; H действует *косвободно*, т.е. для каждого неединичного элемента $h \in H$ отображение $\alpha_h : F \rightarrow F$, где $\alpha_h(f) = f^h f^{-1}$, биективно [47], [164]. В частности, для любой собственной подгруппы $K < H$ группа $F \rtimes K$ также есть группа Фробениуса. И если H содержит инволюцию i , то i необходимо инвертирует F и потому единственна в H , а ядро F при этом – абелева группа. Если H содержит элемент порядка 3, то F нильпотентна класса 2 [45]. Строение дополнения H может быть существенно ограничено известной теоремой Бернсайда. Если в F найдется абелева H -допустимая подгруппа, то по этой теореме каждая подгруппа порядка pq из H , где p и q не обязательно различные простые числа, является циклической группой. О строении дополнения в (слабо) (сопряженно) бипримитивно конечных группах Фробениуса А.И. Созутовым [165], [167] получены следующие результаты.

ТЕОРЕМА 3.1 [91], [165]. *Слабо сопряженно бипримитивно конечная группа тогда и только тогда изоморфно вложима в группу регулярных автоморфизмов абелевой группы, когда все ее элементы простых порядков порождают локально конечную подгруппу T одного из типов:*

- 1) T – локально циклическая группа;
- 2) T изоморфна $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$;
- 3) $T = C \times S$, где C – группа типа 1), S – группа типа 2) и $\pi(C) \cap \pi(S) = \emptyset$.

ТЕОРЕМА 3.2 [91], [165], [167]. *В неинвариантном множителе слабо сопряженно бипримитивно конечной группы Фробениуса элементы простых порядков порождают либо абелеву подгруппу, либо подгруппу типов 2)–3) из теоремы 3.1, а в слабо бипримитивно конечной – подгруппу типов 1)–3).*

ТЕОРЕМА 3.3 [91], [165], [167]. *Неинвариантный множитель H сопряженно бипримитивно конечной группы Фробениуса обладает локально конечной периодической частью T . Если, дополнительно, T содержит инволюцию, то T – локально конечная группа регулярных автоморфизмов абелевой группы. Если T не содержит инволюций, то ее коммутант T' – локально нильпотентная группа.*

Отметим, что известны примеры разрешимых сопряженно бипримитивно конечных групп, не обладающих периодической частью [10].

ТЕОРЕМА 3.4 [91], [165], [167]. *Неинвариантный множитель бипримитивно конечной группы Фробениуса обладает локально конечной периодической частью, изоморфно вложимой в группу регулярных автоморфизмов абелевой группы.*

Отметим также следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.5 (А.А. Череп [11]). *Если в группе Фробениуса с неинвариантным множителем простого порядка множество элементов, порождающих с неинвариантным множителем бесконечную подгруппу, непусто, то оно бесконечно.*

Полная классификация конечных неразрешимых расщепляемых групп была завершена М. Судзуки [185]–[187]. В разрешимом случае исследования пока далеки от завершения [54]. Среди бесконечных расщепляемых групп находятся свободные группы, свободные произведения групп, группы без кручения с однозначным извлечением корня [55] и др. Даже класс периодических расщепляемых групп, как показывают при-

меры групп из [1], [2], [69], [72]–[74] и др. практически необозрим. В работах [60], [175] изучались периодические расщепляемые группы с конечными элементами.

Пусть группа $G = F \rtimes \langle a \rangle$, $|a| = p > 2$ – простое число и каждый элемент из разности $G \setminus F$ имеет порядок p . Следуя терминологии конечных групп, назовем такие группы *НТ-группами*. Для $T \leq F$ обозначим $F(T) = \langle T, T^a, \dots, T^{a^{p-1}} \rangle$, $D(T) = T \cap T^a \cap \dots \cap T^{a^{p-1}}$.

ТЕОРЕМА 3.6 [60]. *Если $T \triangleleft F(T)$, то $F(T)/D(T)$ – RI^* -группа.*

СЛЕДСТВИЕ 3.7 [60]. *Пусть $G = B(n, p)$ – свободная группа периода p с n порождающими, F – пересечение всех подгрупп конечного индекса в G и T – собственная нормальная в F подгруппа. Тогда нормальное замыкание в G подгруппы T является собственной подгруппой в F .*

Если группа $G = F \rtimes \langle a \rangle$ конечна, то по известной теореме Кегеля [50] $F = O_p(F) \times O'_p(F)$. Получено такое обобщение теоремы Кегеля.

ТЕОРЕМА 3.8 [60]. *Пусть a – конечный элемент группы G , P и Q – подгруппы из F , порожденные соответственно всеми p -элементами и p' -элементами. Тогда $P \cap Q \leq Z(F)$, $Q = O_{p'}(F)$ и $[P, Q] = 1$.*

Следующая теорема обобщает результат Бэра (см. [9; теорема 8]).

ТЕОРЕМА 3.9 [175]. *Если периодическая расщепляемая с нормальной компонентой группа слабо бипримитивно конечна, то она либо p -группа, либо группа Фробениуса, либо НТ-группа.*

А. И. Созутовым и А. К. Шлёпкиным в [175] изучались свойства контрпримера F к гипотезе В. П. Шункова о локальной конечности ядра группы Фробениуса $F \rtimes \langle a \rangle$ с конечным элементом a (вопрос 6.56 из [189]). Контрпример F можно подобрать таким:

- 1) F – бесконечная конечно порожденная простая группа и некоторая ее конечная подгруппа вместе с элементом a порождает бесконечную группу;
- 2) каждая конечная примарная a -допустимая подгруппа из F содержится в бесконечной нильпотентной a -допустимой примарной подгруппе ограниченного периода из F ;
- 3) в случае, когда F содержит не локально конечную a -допустимую подгруппу с нетривиальным локально конечным радикалом или когда F – бинарно конечная группа, можно считать F примарной группой ограниченного периода;
- 4) если все не локально конечные a -допустимые подгруппы F имеют тривиальный локально конечный радикал, то множество максимальных локально конечных a -допустимых подгрупп группы F составляет ее расщепление и каждый неединичный элемент в F имеет простой порядок.

4. Группы с системами фробениусовых подгрупп

В данном разделе представлены результаты о строении группы G и нормального замыкания ее элемента a при условии, что в G достаточно много фробениусовых или близких к фробениусовым подгрупп, порожденных парой элементов из a^G . Как правило, в них утверждается существование в G нормальной подгруппы – ядра некоторой глобальной группы Фробениуса. Подобные теоремы в школе В. П. Шункова принято

называть признаками непростоты, и они близки по содержанию к теореме Фробениуса. В значительной мере их появление было продиктовано потребностями развиваемой В. П. Шунковым и его учениками “положительной теории периодических групп”. Например, если простая квазичерниковская группа G – контрпример к проблеме минимальности Черникова – обладает бесконечной максимальной подгруппой H , то нет достаточных оснований утверждать, что (G, H) обязательно пара Фробениуса. Понятно, что в этом случае H – черниковская группа, т.е. конечное расширение прямого произведения $\tilde{H}$ квазициклических групп, взятых в конечном числе, и легко показать, что $\tilde{H} \cap \tilde{H}^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$ (А. Н. Остыловский, В. П. Шунков [80]), поэтому подгруппа $H \cap H^g$ конечна. Более того, если $\tilde{H}$ не содержит инволюций, то $H \cap H^g = 1 \ \forall g \in G \setminus H$, а если инволюций нет в самой группе G , то для элемента a простого порядка из $\tilde{H}$ каждая конечная подгруппа $L_g = \langle a, a^g \rangle$, где $g \in G \setminus H$, есть группа Фробениуса с дополнением $\langle a \rangle$ (А. Н. Остыловский, В. П. Шунков [80]).

Выделим ситуацию в чистом виде. В группе G есть собственная подгруппа H , а в ней элемент a простого порядка $p > 2$ такие, что для каждого элемента $g \in G \setminus H$ подгруппа $L_g = \langle a, a^g \rangle$ – (конечная) группа Фробениуса с дополнением $\langle a \rangle$. Что можно сказать о строении G , H и $\langle a^G \rangle$? Верно ли, что $\langle a^G \rangle = F \rtimes \langle a \rangle$ – группа Фробениуса?

Частные случаи этого вопроса для конечных групп были разобраны Б. Фишером [25], [26] и М. Ашбахером [3]. А. И. Созутов в 1974 г. подтвердил гипотезу в случае $H = N_G(\langle a \rangle)$, $|L_g| < \infty \ \forall g \in G$ (см. введение работы [142]). В 1975 г. В. П. Шунков доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.1 [142]. Пусть G – группа, H – ее собственная подгруппа, a – элемент простого порядка $p \neq 2$ из H , удовлетворяющие следующему условию: для всякого $g \in G \setminus H$ подгруппа $\langle a, g^{-1}ag \rangle$ есть группа Фробениуса с неизменяемым множителем $\langle a \rangle$. Тогда

- 1) $H = T \rtimes N_G(\langle a \rangle)$ и $K = T \rtimes \langle a \rangle$ – либо группа Фробениуса с неизменяемым множителем $\langle a \rangle$ и ядром T , либо $K = \langle a \rangle$;
- 2) $F_a = T \cup \mathfrak{M}$ – подгруппа в G и $G = F_a \rtimes N_G(\langle a \rangle)$, где $\mathfrak{M}$ – множество всех p -вещественных элементов из $G \setminus H$ относительно a ;
- 3) $E = T \setminus L$ – инвариантное множество в G , где L – множество всех таких элементов из T , каждый из которых p -веществен относительно некоторого элемента из

$$\mathfrak{L} = \bigcup_{x \in G} [(a^x) \setminus \{1\}].$$

Как показывают примеры групп $L_2(Q)$, $Sz(Q)$ или $U_3(Q)$ над (локально) конечным полем Q характеристики 2, условие $a^2 \neq 1$ в теореме В. П. Шункова существенно. Условие простоты элемента a в теореме Шункова было заменено А. И. Созутовым на условие $|a| > 2$ в работах [164], [168].

С целью компактности формулировок дальнейших теорем обозначим через Φ_a класс групп Фробениуса с дополнением $\langle a \rangle$, а через K – класс коммутативных групп.

ТЕОРЕМА 4.2 [168]. Пусть G – группа, H – ее собственная подгруппа, a – конечный элемент группы G , $|a| > 2$, и α – бесконечное кардинальное число. Если мощность множества элементов a^g , где $g \in G \setminus H$, для которых $\langle a, a^g \rangle \notin \Phi_a$, меньше α , то либо $|a^G| < \alpha$, либо $G = F \rtimes N_G(\langle a \rangle)$ и $\langle a^G \rangle \in \Phi_a$.

Напомним, что выражение “почти для всех” означает “для всех, кроме, быть может, конечного числа”.

ТЕОРЕМА 4.3 [174]. Пусть G – группа, H – ее собственная подгруппа, $a \in G$ и $|a| > 2$. Если почти для всех элементов a^g , где $g \in G \setminus H$, подгруппа $\langle a, a^g \rangle \in \Phi_a$, то либо $|a^G| < \infty$, либо $G = F \rtimes N_G(\langle a \rangle)$ и $\langle a^G \rangle \in \Phi_a$.

ТЕОРЕМА 4.4 [168]. Пусть G – группа, $a \in G$, $|a| > 2$ и $\langle a, a^g \rangle \in \Phi_a \cup K$ для любого $g \in G$. Тогда либо $\langle a^G \rangle \in K$, либо G обладает единственной максимальной по включению подгруппой $L \in \Phi_a$ и $\langle a^G \rangle$ – прямое произведение всех сопряженных с L подгрупп группы G .

В случае $|a| = 2$ конечные группы, удовлетворяющие условиям теоремы 4.4, были описаны Б. Фишером [27] и М. Ашбахером [4] (см. также [32; теоремы 2.58, 2.64]). Список композиционных факторов таких групп включает в себя Σ_n , $Sp(n, q)$, $U_n(q)$, $O^+_n(q)$, $O^-_n(q)$, $Sz(q)$, $L_2(q)$, $O^-_n(3)$, $O^+_n(3)$, $O^-_n(5)$, $O^+_n(5)$, $M(22)$, $M(23)$, $M(24)$, где $q = 2^n$. Теорема 4.4 еще раз подчеркивает исключительность инволюций в группе.

ТЕОРЕМА 4.5 [168]. Пусть G – группа, $a \in G$, $|a| > 2$ и $\langle a, b \rangle \in \Phi_a \cup K$ почти для всех $b \in a^G$. Тогда либо $\langle a^G \rangle$ – FC-группа, либо среди подгрупп группы G , принадлежащих классу Φ_a , есть максимальная L по включению и $\langle a^G \rangle$ – прямое произведение всех сопряженных с L подгрупп группы G .

Хорошо известно, что дополнительный множитель конечной группы Фробениуса вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$ может быть и не циклическим. В связи с этим А. И. Созутовым в [189] был поставлен вопрос 10.61 о возможном обобщении теоремы 4.1. Элемент a группы G назовем *H-фробениусовым*, если все подгруппы вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$, где $g \in G \setminus H$, а H – собственная подгруппа, являются группами Фробениуса с дополнениями, содержащими элемент a . Группы с *H-фробениусовыми* элементами изучались А. М. Поповым и А. И. Созутовым [87]–[89]. Приведем теоремы 3.8, 3.9 из [91].

ТЕОРЕМА 4.6. Если группа G содержит *H-фробениусов* элемент a четного порядка > 2 , то $G = F \rtimes C_G(i)$, где i – инволюция из $\langle a \rangle$, F – абелева периодическая подгруппа.

ТЕОРЕМА 4.7. Пусть G – группа, H – ее собственная подгруппа, a – конечный *H-фробениусов* элемент порядка > 2 из H . Если $|a| \neq 3, 5$, то объединение F всех ядер фробениусовых подгрупп группы G с дополнением, содержащим элемент a , является периодической нормальной в G подгруппой и $G = FH$.

5. Локально разрешимые группы

В. П. Шунковым совместно с А. А. Шафиро в [112], [113] установлено, что если в локально конечной группе, содержащей инволюции, централизатор любой инволюции является черниковской группой, то сама группа почти локально разрешима. Е. И. Седовой доказано [92], что критерием локальной разрешимости периодической группы конечного ранга является ее бинарная разрешимость и конечность рангов ее абелевых подгрупп.

Еще один критерий локальной разрешимости группы есть в работе А. Н. Остыловского [79].

В. О. Гомер доказал [29], что в бесконечной бинарно разрешимой периодической группе каждый элемент содержится в бесконечной локально разрешимой подгруппе. Приведем еще два его результата по бинарно разрешимым группам.

ТЕОРЕМА 5.1 [29]. *Пусть G – периодическая бинарно разрешимая группа с конечными силовскими p -подгруппами по данному $p \in \pi(G)$, имеющая конечный период, и $O_{p'}(G) = 1$. Если G обладает p -элементом конечного ранга, то она конечна.*

ТЕОРЕМА 5.2 [29]. *Пусть G – периодическая бинарно разрешимая группа с черниковскими силовскими p -подгруппами по данному $p \in \pi(G)$, причем в G существует хотя бы один p -элемент конечного ранга в G , не лежащий ни в одной полной абелевой p -подгруппе. Тогда: 1) $O_p(G)$ – черниковская группа; 2) $G/O_{p'}(G)$ – конечная разрешимая группа.*

6. Локально конечные группы

В 1967 г. В. П. Шунков установил счетность локально конечной группы при условии счетности всех ее собственных подгрупп [128]. В этой же работе показана счетность локально конечной группы с условием минимальности для подгрупп и счетность простой локально конечной группы, в которой централизатор любого неединичного элемента счетен. В 1969 г. В. П. Шунковым доказана счетность локально конечной группы с условием минимальности для абелевых подгрупп [132]. Им же в следующих теоремах раскрывается структура локально конечных групп с условием минимальности для подгрупп.

ТЕОРЕМА 6.1 [128]. *Простая локально конечная группа с условием минимальности для подгрупп является объединением возрастающей последовательности конечных простых групп.*

S_pF -группой называется локально конечная группа с черниковскими примарными силовскими p -подгруппами по некоторому простому числу p . SF -группой называется локально конечная группа с черниковскими примарными силовскими подгруппами.

В. П. Шунков в [128] доказал, что бесконечная S_pF -группа не проста, если она обладает нетривиальным p -элементом конечного ранга.

Им же установлено [128], что S_pF -группа тогда и только тогда p -экстремально аппроксимируема, когда ранг любого p -элемента конечен в ней.

Приведем еще ряд результатов В. П. Шункова, касающихся S_2F -группы и SF -групп.

СЛЕДСТВИЕ 6.2 [128]. *Если в SF -группе любой примарный элемент имеет конечный ранг, то группа является расширением полной абелевой подгруппы с помощью подпрямого произведения конечных подгрупп.*

СЛЕДСТВИЕ 6.3 [128]. *SF -группа, обладающая нормальной системой с конечными факторами, является расширением полной абелевой подгруппы с помощью подпрямого произведения конечных подгрупп.*

ТЕОРЕМА 6.4 [136]. *SF -группа является расширением абелевой группы с помощью SF -группы с конечными силовскими 2-подгруппами.*

ТЕОРЕМА 6.5 [128]. S_2F -группа тогда и только тогда является конечным расширением локально разрешимой группы, когда ранг любого 2-элемента конечен в ней.

ТЕОРЕМА 6.6 [136]. Пусть G – S_2F -группа с бесконечной силовой 2-подгруппой, удовлетворяющая следующему условию: если H – подгруппа нечетного порядка и $N_G(H)$ содержит квазициклическую 2-подгруппу Q , то $Q \subset C_G(H)$. Тогда максимальная полная абелева 2-подгруппа из G инвариантна в G .

В. П. Шунков доказал [136], что если бесконечная простая локально конечная группа конечного ранга существует, то в ней силовые 2-подгруппы конечны.

По теореме Силова [49] в конечных группах силовые примарные подгруппы сопряжены. В бесконечных группах это в общем случае неверно. В локально конечных группах и даже в S_pF -группах силовые p -подгруппы могут быть не только не сопряжены, но и неизоморфны [193]. В. П. Шунков установил [136], [138] сопряженность силовских p -подгрупп в SF -группах. Отсюда вытекает следующий результат: если в S_pF -группе G с конечной силовой 2-подгруппой любая локально разрешимая подгруппа обладает p -полной частью, то силовые p -подгруппы сопряжены в G .

ТЕОРЕМА 6.7 [131]. Пусть G – периодическая группа, k – ее инволюция. Тогда либо инволюция k содержится в бесконечном централизаторе некоторой инволюции из G , либо группа G локально конечна.

В качестве следствия этой теоремы можно вывести критерий локальной конечности группы [131]: наличие у периодической группы без инволюций почти регулярно автоморфизма второго порядка. Еще один критерий локальной конечности группы установлен А. Н. Остыловским [78]: бинарно конечная группа со слабым условием минимальности для ненильпотентных подгрупп локально конечна.

В работах [29], [92], [111], [125], [136], [137], [82] найден еще ряд свойств локально конечных групп.

7. Слоино конечные группы

Группа называется *слоино конечной*, если она имеет не более чем конечное число элементов каждого порядка. Это понятие впервые было введено С. Н. Черниковым в работе [15]. Теория таких групп в развернутом виде изложена в монографиях [96], [21]. Слоино конечные группы были детально изучены С. Н. Черниковым, Р. Бэром, Х. Х. Мухамеджаном, Я. Д. Половицким и др. (см., например, [32], [96], [98], [16], [21]).

В этом разделе получает применение и дальнейшее развитие техника работы с группами, удовлетворяющими условиям конечности, наложенным на системы подгрупп. В частности, эти условия накладываются на некоторые двупорожденные подгруппы и на слои элементов в периодических локально разрешимых подгруппах.

В следующей теореме охарактеризованы группы со слоино конечной периодической частью.

ТЕОРЕМА 7.1 [93], [94], [101], [108]. Группа тогда и только тогда обладает слоино конечной периодической частью, когда она сопряженно бипрimitивно конечна и в ней любая периодическая локально разрешимая подгруппа слоино конечна.

Еще ряд критериев слойной конечности периодической части группы можно найти в работах [39], [41]. Критерии слойной конечности группы имеются в [29], [39], [40], [92].

Конечное расширение слойно конечной группы называется *почти слойно конечной группой*, если множество ее элементов данного порядка конечно. Почти слойно конечные группы представляют собой существенно более широкий класс групп, чем слойно конечные группы, в него, в частности, входят все черниковские группы.

Подобно проблеме Шмидта (будет ли конечной всякая группа, у которой любая собственная подгруппа конечна) правомерно поставить вопрос: какие свойства переносятся на всю группу с некоторой системы ее подгрупп? Здесь вопрос решается для условия почти слойной конечности.

Сначала этот вопрос решается в классе локально конечных групп.

ТЕОРЕМА 7.2 (В. П. Шунков [110]). *Локально конечная группа G тогда и только тогда почти слойно конечна, когда в G выполняется условие: нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы из G – почти слойно конечная группа.*

Затем для смешанных групп без инволюций с условием сопряженно бипримитивной конечности:

ТЕОРЕМА 7.3 (В. И. Сенашов [95], [105], [110]). *Пусть G – сопряженно бипримитивно конечная группа без инволюций. Если в G нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы почти слойно конечен, то и сама группа G почти слойно конечна.*

Согласно [109], верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7.4 [109]. *Пусть периодическая группа Шункова G содержит сильно вложенную подгруппу. Если в G нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы почти слойно конечен, то и сама группа G почти слойно конечна.*

Признаки почти слойной конечности группы содержатся в работах [39], [99], [104].

8. Черниковские группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Черниковской группой* называется конечное расширение прямого произведения конечного числа квазициклических групп.

В. П. Шунков установил ряд критериев, когда группа является черниковской:

- если в бипримитивно конечной p -группе централизатор некоторого элемента простого порядка – черниковская группа, то сама группа черниковская [134];
- если в локально конечной группе силовские 2-подгруппы черниковские и подгруппы нечетного порядка конечны, то сама группа черниковская [136];
- если в локально конечной группе G существует элементарная абелева подгруппа L четвертого порядка такая, что централизатор любой инволюции из L в G является черниковской группой, то G – черниковская группа [113];
- всякая сопряженно бипримитивно конечная группа с условием минимальности для подгрупп является черниковской группой [150];
- группа с условием минимальности тогда и только тогда является черниковской группой, когда она конечно-редуцирована [150];

- если бипримитивно конечная p -группа (а при $p = 2$ произвольная 2-группа) обладает конечной максимальной элементарной абелевой подгруппой, то группа черниковская [136], [134].

Из последнего критерия можно вывести два следствия:

- если бипримитивно конечная p -группа (а при $p = 2$ произвольная 2-группа) удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, то она черниковская [134];
- бипримитивно конечная p -группа (а при $p = 2$ – произвольная 2-группа) тогда и только тогда конечна, когда она порождается конечным числом образующих и некоторая ее максимальная элементарная абелева подгруппа конечна [134].

В работах [80], [81], [75], [87], [191], [111]–[113], [150] также устанавливаются признаки черниковости бесконечных групп.

Одним из перспективных в теории групп является развиваемое с 60-х годов направление характеристик некоторых известных классов групп в других классах групп, т.е. наложение наиболее слабых достаточных условий, при которых группы широкого класса попадают в более узкие классы групп. Выше рассмотрены с этой точки зрения класс слойно конечных групп, т.е. групп, у которых множество элементов любого данного порядка конечно, и класс конечных расширений слойно конечных групп – почти слойно конечные группы. Следующий естественный шаг в этом направлении – описание обобщенно черниковских групп, которые являются расширением слойно конечной группы, при помощи слойно конечной группы. Именно этот класс групп и рассматривается в этом разделе.

При исследовании бесконечных групп одним из основных методов является наложение на группу условия обрыва цепочек подгрупп. К таким условиям относятся условие примарной минимальности, условие минимальности для абелевых подгрупп и, наконец, просто условие минимальности для подгрупп. Немного позднее появились условия конечности, не связанные с обрывом цепочек подгрупп: бинарная конечность, бипримитивная конечность, сопряженно бипримитивная конечность. Эти условия касаются конечности тех или иных двупорожденных подгрупп в группе или ее сечениях.

Связь между условиями конечности этих двух типов исследовалась С. Н. Черниковым, В. П. Шунковым, М. И. Каргаполовым и другими авторами.

Здесь также удается связать условия указанных типов, а именно, доказать простотрансформированность условия первого типа с системы подгрупп на всю группу (см. теоремы 8.1, 8.2) при наложении на группу условия второго типа.

Периодическая почти локально разрешимая группа, удовлетворяющая условию примарной минимальности, называется *обобщенно черниковской группой*.

Использование термина “обобщенно черниковские группы” можно обосновать тем, что по теореме Я. Д. Половицкого [86] обобщенно черниковская группа G является расширением прямого произведения A квазициклических p -групп с конечным числом множителей для каждого простого числа p при помощи локально нормальной группы B , причем каждый элемент из G поэлементно не перестановочен лишь с конечным числом силовских примарных подгрупп из A . Для сравнения, черниковская группа является конечным расширением прямого произведения квазициклических групп, взятых в конечном числе.

В. И. Сенашов охарактеризовал группы с обобщенно черниковской периодической частью в классе групп без элементов порядка 2.

ТЕОРЕМА 8.1 [97], [100], [106]. Пусть G – группа без элементов второго порядка. Группа G тогда и только тогда обладает обобщенно черниковской периодической частью, когда она сопряженно бипримитивно конечна и нормализатор любой ее конечной нетривиальной подгруппы обладает обобщенно черниковской периодической частью.

Также В. И. Сенашовым они охарактеризованы в классе всех групп.

ТЕОРЕМА 8.2 [100], [106]. Группа тогда и только тогда обладает обобщенно черниковской периодической частью, когда она сопряженно бипримитивно конечна и нормализатор любой ее конечной нетривиальной подгруппы обладает обобщенно черниковской периодической частью.

Примеры периодических групп из [1] и [74] показывают, что условие сопряженно бипримитивной конечности в теоремах 8.1, 8.2 существенно и его отбрасывание приводит к потере справедливости утверждений теорем.

Еще один критерий обобщенной черниковости периодической части группы содержится в статье [102].

9. Равномерные произведения

В теории групп большую роль играют представления групп в виде различного рода произведений их подгрупп. В. П. Шунковым изучено представление группы в виде произведения ее подгрупп, в котором попарно перестановочны циклические подгруппы двух различных множителей. Задача изучения таких групп была поставлена С. Н. Черниковым (он предложил называть такие произведения равномерными). В. П. Шунков доказал ряд теорем, описывающих строение таких групп.

Строение групп, разложимых в равномерное произведение своих силовских p -групп, описывает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 9.1 (В. П. Шунков [123]). Периодическая группа G тогда и только тогда разлагается в равномерное произведение своих силовских p -подгрупп, когда она является полупрямым произведением холловской абелевой подгруппы A , все подгруппы которой инвариантны в G , и некоторой S -группы B .

Напомним, что периодическая группа называется S -группой, если она разлагается в прямое произведение своих силовских подгрупп [58].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Группа G называется квазиравномерным произведением своих подгрупп $\{A_i \mid i \in M\}$, если:

- 1) группа G порождается подгруппами $\{A_i \mid i \in M\}$;
- 2) в каждой подгруппе A_i существует такая система образующих $\{a_{i,k} \mid k \in M_i\}$, что подгруппы $\langle a_{i,k} \mid k \in M_i \rangle$, $\langle a_{j,k'} \mid k' \in M_j \rangle$, где $i \neq j$, перестановочны.

ТЕОРЕМА 9.2 (В. П. Шунков [123]). Конечная группа тогда и только тогда сверхразрешима, когда она разлагается в квазиравномерное произведение своих силовских p -подгрупп.

СЛЕДСТВИЕ 9.3 (В. П. Шунков [123]). Конечная сверхразрешимая группа с абелевыми силовскими p -подгруппами разлагается в равномерное произведение циклических p -подгрупп.

В. П. Шункову принадлежит следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Группа G называется *обобщенно равномерным* произведением своих подгрупп Q_i , $i \in I$, если: $G = \langle Q_i \mid i \in I \rangle$, где Q_i — q_i -подгруппы, и выполняются условия:

- 1) $Q_i Q_j = Q_j Q_i$, $i, j \in I$;
- 2) если Q_i обладает элементарной абелевой подгруппой R_i порядка $\geq q_i^2$, то R_i перестановочна с любой нециклической элементарной абелевой подгруппой из Q_j , $i \neq j$;
- 3) группа, порожденная всеми Q_j , не содержащими элементарных абелевых подгрупп порядка $\geq q_j^2$, является равномерным произведением подгрупп Q_j .

Можно привести пример группы, разложимой в обобщенно равномерное произведение своих подгрупп, которая не может быть представлена в виде полупрямого произведения двух нильпотентных холловых подгрупп. Этот пример показывает, что для обобщенно равномерных произведений не выполняется аналог теоремы Шункова [123], дающей конструктивное описание равномерных произведений. Таким образом, разделены класс групп, разложимых в равномерное произведение, и класс групп, разложимых в обобщенно равномерное произведение.

О. В. Пашковской построен [84] пример группы, разложимой в равномерное произведение своих подгрупп, в которой элементарные абелевы подгруппы из одного множителя перестановочны с элементарными абелевыми подгруппами из другого множителя, но абелевы подгруппы этих множителей не перестановочны между собой. Кроме того, этот пример показывает, что класс групп, разложимых в обобщенно равномерное произведение, не замкнут относительно взятия фактор-групп. О. В. Пашковская дала описание групп, разложимых в обобщенно равномерное произведение силовских подгрупп [83].

10. Группы с инволюциями

До публикации в семидесятых годах результатов этого раздела о вложимости инволюций в бесконечной периодической группе был известен только один очевидный и фундаментальный факт, что любые две инволюции порождают конечную подгруппу. Эти результаты положили начало теории изучения строения групп с инволюциями, которая получила затем дальнейшее развитие в [154], [157], [161]. Это фундаментальное ограничение порождаемости двумя элементами конечной группы не случайно, так как первые примеры периодических не локально конечных групп Новикова–Адяна [1] и Ольшанского [74] показывают, что это условие не выполняется в периодических группах без инволюций, т.е. условие, что в бесконечной периодической группе любые два элемента порядка p порождают конечную подгруппу, для простого нечетного числа p неверно.

ТЕОРЕМА 10.1 (В. П. Шунков [131]). *Если в бесконечной периодической группе G с инволюциями любая инволюция почти регулярна, то группа G является конечным расширением локально конечной группы R без инволюций, причем в фактор-группе G/R — единственная инволюция.*

ТЕОРЕМА 10.2 (В. П. Шунков [139]). *Если периодическая группа обладает почти регулярной инволюцией, то она локально конечна, почти разрешима и обладает полной частью.*

ТЕОРЕМА 10.3 (В. П. Шунков [161]). *Если группа G обладает почти регулярной инволюцией i и для каждого $g \in G$ подгруппа $\langle i, i^g \rangle$ конечна, то группа G почти нильпотентная и периодическая.*

Периодичность и почти разрешимость группы G фактически доказана в [139]. Впоследствии Б. Хартли в работе [34] удалось несколько сократить первоначальный объем доказательства этого результата. Он опирался на те же идеи из [139]. В дальнейшем В. В. Беляев [5] предложил новое доказательство результата, в котором применялась лемма Неймана. Это позволило сделать доказательство более простым и изящным.

Пусть G – группа, i – ее инволюция и $\mathfrak{L}_i = \{i^g \mid g \in G\}$. Инволюция i называется *конечно вложенной* в G , если для любого элемента g из G пересечение $(\mathfrak{L}_i \cdot \mathfrak{L}_i) \cap gC_G(i)$ конечно, где $\mathfrak{L}_i \cdot \mathfrak{L}_i = \{i^{g_1} \cdot i^{g_2} \mid g_1, g_2 \in G\}$.

Приведем наиболее простые примеры групп с конечно вложенной инволюцией.

ПРИМЕР 10.4 [107]. Если в группе G существует инволюция i с конечным $C_G(i)$, то i – конечно вложенная инволюция в G .

ПРИМЕР 10.5 [107]. Если в некоторой группе G инволюция i содержится в конечной нормальной подгруппе из G , то i – конечно вложенная инволюция в G .

ПРИМЕР 10.6 [107]. Пусть G – группа Фробениуса с периодическим ядром и бесконечным инвариантным множителем H , содержащим инволюцию i . Тогда i – конечно вложенная инволюция в G .

ТЕОРЕМА 10.7 [155]. *Пусть G – группа, i – ее конечно вложенная инволюция, $\mathfrak{L}_i = \{i^g \mid g \in G\}$, $B = \langle \{i^g \mid g \in G\} \rangle$, $R = \langle \mathfrak{L}_i, \mathfrak{L}_i \rangle$, Z – подгруппа, порожденная всеми 2-элементами из R , и пара (G, i) удовлетворяет условию*

() подгруппы вида $\langle i, i^g \rangle$ ($g \in G$) конечны.*

Тогда B , R , Z – нормальные подгруппы в G и имеет место одно из утверждений:

- 1) B – конечная подгруппа;
- 2) подгруппа B локально конечна, $B = R \rtimes \langle i \rangle$ и Z является конечным расширением полной абелевой 2-подгруппы A_2 с условием минимальности, причем $ici = c^{-1}$ ($c \in A_2$).

СЛЕДСТВИЕ 10.8. *Если группа G обладает инволюцией i с конечным $C_G(i)$ и пара (G, i) удовлетворяет условию (*), то G локально конечна.*

Все известные характеристики простых групп, связанные со свойствами централизаторов, с помощью конечно вложенной инволюции переносятся на класс периодических групп. Если иметь в виду теорему Файта–Томпсона, то на языке конечно вложенной инволюции в следствии фактически получена характеристика любой некоммутативной конечной простой группы в классе периодических групп.

Так как в любой периодической группе с инволюциями любые две инволюции порождают конечную подгруппу, то из теоремы 10.7 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 10.9 [155]. *Пусть G – периодическая группа, H – ее подгруппа, содержащая инволюцию i , и (G, H) – пара Фробениуса. Группа G тогда и только*

тогда является группой Фробениуса с дополнением H , когда i – конечно вложенная инволюция в G .

Приведем ряд результатов для групп с абелевыми централизаторами инволюций [64], [65], [177], [22].

ТЕОРЕМА 10.10. Пусть группа G содержит инволюцию i такую, что $|ii^g| < \infty$ при любом $g \in G$, и централизатор каждой инволюции из G является элементарной абелевой группой. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- 1) G – расширение элементарной абелевой 2-группы с помощью группы без инволюций;
- 2) $G = A \rtimes \langle i \rangle$, где A – периодическая абелева $2'$ -группа и инволюция i инвертирует A ;
- 3) G локально конечна и изоморфна группе $L_2(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2.

ТЕОРЕМА 10.11 [170]. Пусть G – периодическая группа 2-ранга > 1 . Если в G централизатор каждого неединичного элемента абелев, то либо $C_G(i) \triangleleft G$ для некоторой инволюции $i \in G$, либо G изоморфна $L_2(P)$ над подходящим локально конечным полем P характеристики 2 и порядка ≥ 4 .

ТЕОРЕМА 10.12 [170]. Пусть группа G содержит конечную инволюцию i и централизатор каждой инволюции из G является абелевой 2-группой. Тогда выполняется хотя бы одно из следующих утверждений:

- 1) $C_G(i)$ – квазициклическая группа;
- 2) $C_G(i)$ нормален в G ;
- 3) $G = A \rtimes C_G(i)$, где A – периодическая абелева $2'$ -подгруппа, $C_G(i)$ – циклическая 2-подгруппа и инволюция i инвертирует A ;
- 4) G изоморфна группе $L_2(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2.

Заметим, что если выполняется утверждение 1 теоремы 10.12, то пока неизвестно, является ли группа G локально конечной (см., например, вопрос 4.75 из [189]).

ТЕОРЕМА 10.13 [182]. Пусть G – периодическая группа, содержащая инволюцию, S – силовская 2-подгруппа из G и централизатор любой инволюции из S абелев. Тогда либо S – локально циклическая группа, либо $S \triangleleft G$, либо $G = R \times L_2(Q)$, где R – абелева группа без инволюций, Q – локально конечное поле характеристики 2.

В связи с результатами о группах с почти регулярной инволюцией и группах с конечно вложенной инволюцией В. П. Шунковым поставлена глобальная проблема о переносе классификации конечных простых неабелевых групп в класс периодических групп с инволюциями.

11. Существование подгрупп с некоторыми свойствами

В данном разделе устанавливаются условия, при которых в группе существует бесконечная подгруппа с теми или иными свойствами: либо абелева, либо с нетривиальным центром, либо локально конечная, либо сильно вложенная бесконечно изолированная подгруппа, либо абелева подгруппа бесконечного ранга.

Для локально разрешимых групп отрицательное решение упомянутой ранее проблемы Шмидта вытекало уже из описания локально разрешимых групп с условием минимальности, полученного С. Н. Черниковым в 1939 г. (доказательство его теоремы опубликовано в [13], [14]). Сам О. Ю. Шмидт решил отрицательно свою проблему для $p = 2$ [122]. Однако уже в случае локально конечных групп указанная проблема долгое время оставалась открытой, и лишь в 1963 г. М. И. Каргаполов решил ее отрицательно [48].

Для некоторых классов групп проблема Шмидта тесным образом связана с вопросом о существовании бесконечной абелевой подгруппы в произвольных группах. В [48] доказано, что любая бесконечная локально конечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой. П. С. Новиковым и С. И. Адяном доказано [70], что эта теорема не имеет места даже в периодических группах ограниченного нечетного периода (отрицательное решение вопроса 1.24 [189]: всякая ли бесконечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой?). Еще раньше С. Н. Черниковым вопрос 1.24 [189] был решен положительно для локально разрешимых групп [17], а в [19] – для локально конечных групп, обладающих нормальной системой с конечными факторами. Позднее в [180] метод доказательства из [48] был обобщен на группы, в которых любые два элемента порождают конечную подгруппу, и для таких групп вопрос 1.24 [189] решен положительно. Там же доказано, что в случае положительного решения проблемы Шмидта всякая бесконечная некоммутативная группа, все собственные подгруппы которой конечны, порождается двумя элементами. В [127], [126] доказано, что в бесконечной группе, в которой все собственные подгруппы конечны, 2-элементы принадлежат ее центру. Этот результат является принципиальным обобщением упомянутого выше результата О. Ю. Шмидта для $p = 2$, так как он позволяет при решении проблемы Шмидта исключить из рассмотрения не только 2-группы, но и произвольные группы, обладающие элементами 2-го порядка.

Вопрос о существовании в группах бесконечных собственных подгрупп эквивалентен известной проблеме О. Ю. Шмидта о бесконечной группе с конечными собственными подгруппами. По этому вопросу наиболее существенные результаты были получены С. Н. Черниковым [13], [14] и М. И. Каргаполовым [48]. Проблема Шмидта решена положительно и проблема минимальности решена отрицательно А. Ю. Ольшанским (см. [59]).

ТЕОРЕМА 11.1 [141]. *Бесконечная периодическая группа с инволюциями либо совпадает с централизатором некоторой своей инволюции, либо обладает собственной бесконечной подгруппой с нетривиальным центром.*

Этим самым решение проблемы О. Ю. Шмидта сводится к аналогичной проблеме для периодической группы, не содержащей инволюций.

ТЕОРЕМА 11.2 [131]. *Если бесконечная периодическая группа обладает почти регулярной инволюцией, то в ней существует бесконечная абелева подгруппа, все элементы которой строго вещественны относительно этой инволюции.*

ТЕОРЕМА 11.3 [140]. *Пусть G – бесконечная периодическая группа, i – некоторый ее элемент простого порядка p . Если в G любой элемент порядка p и элемент i порождают конечную подгруппу, то G обладает бесконечной подгруппой с нетривиальным центром.*

Вопрос 1.24 [189] решается положительно В. П. Шунковым для бипримитивно конечных групп.

ТЕОРЕМА 11.4 [140]. *Бесконечная бипримитивно конечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой.*

Из этой теоремы вытекает отрицательное решение проблемы Шмидта для бипримитивно конечных групп.

Так как в произвольной периодической группе с инволюциями любые две инволюции порождают конечную группу, то с помощью предыдущей теоремы получаем следующий результат.

Если проблема Шмидта решается положительно, то всякая бесконечная некоммутативная группа G , все собственные подгруппы которой конечны, обладает следующими свойствами:

- 1) в группе автоморфизмов группы G нет элементов порядка 2;
- 2) для любого $p \in \pi(G/Z(G))$ группа $G/Z(G)$ порождается двумя элементами порядка p , один из которых можно считать произвольным, но фиксированным элементом порядка p .

ТЕОРЕМА 11.5 [140]. *Если периодическая группа обладает конечной максимальной 2-подгруппой, то сама группа конечна.*

СЛЕДСТВИЕ 11.6 [174]. *Во всякой сопряженно бипримитивно конечной группе без инволюций с бесконечным множеством элементов конечного порядка каждый элемент простого порядка содержится в бесконечной локально конечной подгруппе.*

ТЕОРЕМА 11.7 [174]. *Пусть G – бесконечная периодическая группа и a – элемент простого порядка p такие, что почти для всех ($\equiv$ кроме, быть может, конечного числа) элементов вида $g^{-1}ag$ ($g \in G$) подгруппы $L_g = \langle a, g^{-1}ag \rangle$ конечны и разрешимы. Тогда либо элемент a содержится в бесконечной локально разрешимой подгруппе, либо $C_G(a)$ бесконечен.*

СЛЕДСТВИЕ 11.8 [174]. *Во всякой бесконечной периодической сопряженно бипримитивно конечной группе, в которой любая конечная подгруппа разрешима, каждый элемент простого порядка содержится в бесконечной локально разрешимой подгруппе.*

Дальнейшее развитие в этом направлении (см. также [143], [156], [157]) связано с введением новых понятий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G – произвольная бесконечная группа. Любая ее бесконечная подгруппа с нетривиальным локально конечным радикалом называется f -*локальной подгруппой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Произвольное множество X конечных подгрупп группы G называется *веером* с основанием T , если T – пересечение всех подгрупп из множества X , причем $T \neq 1$ (основание пустого веера считается произвольным). Веер называется конечным или бесконечным в зависимости от конечности или бесконечности множества X . Произвольное подмножество $Y \subseteq X$ называется *подвеером* веера X . Бесконечный веер X с основанием T называется *почти правильным*, если основание любого бесконечного подвеера из X совпадает с T .

Амальгамой $\Sigma(X)$ веера X называется теоретико-множественное объединение подгрупп веера X . Бесконечный почти правильный веер X с основанием T называется *правильным*, если $T \notin X$ и для любой подгруппы $V \leq T$ такой, что $|N_G(V) \cap \Sigma(X)| < \infty$, имеет место включение $N_G(V) \cap \Sigma(X) \leq T$.

Полурешеткой $L(X)$ веера X называется нижняя полурешетка всех подгрупп, содержащихся в подгруппах веера X . Множество $J(X)$ оснований всевозможных бесконечных подвееров бесконечного веера X называется основной полурешеткой веера X . Веер X называется *ограниченным*, если все цепи из полурешетки $L(X)$ имеют конечную длину, и *неограниченным* в противном случае.

Веер X ограничен тогда и только тогда, когда все цепи основной полурешетки $J(X)$ конечны. Любой подвеер ограниченного веера ограничен. Если X – ограниченный бесконечный веер группы G , то существует разбиение

$$X = Y \cup X_1 \cup \dots \cup X_\gamma$$

веера X на конечный (или пустой) подвеер Y и бесконечные правильные подвееры X_i с различными основаниями T_i [168].

ТЕОРЕМА 11.9 [168]. *Бесконечная группа тогда и только тогда обладает f -локальной подгруппой, содержащей бесконечно много элементов конечного порядка, когда она содержит бесконечный веер из конечных подгрупп, не являющихся группами Фробениуса.*

Пусть X – бесконечный веер группы G , T – его основание и a – неединичный элемент из T . Элемент a называется *ручкой веера* X , если для любой основной подгруппы V веера X из $a \in N_G(V)$ следует $|N_G(V) \cap \Sigma(X)| < \infty$.

ТЕОРЕМА 11.10 [168]. *Пусть X – ограниченный бесконечный веер группы G с ручкой a простого порядка p . Тогда существует разбиение*

$$X = Y \cup X_1 \cup \dots \cup X_n$$

веера X на конечный (или пустой) подвеер Y и конечное число n бесконечных правильных подвееров X_i с основаниями T_i , удовлетворяющих одному из следующих условий:

- 1) X_i состоит из простых изоморфных между собой групп;
- 2) X_i состоит из изоморфных групп H с простой обобщенной подгруппой Фиттинга $F(H)$;
- 3) X_i состоит из групп H с нетривиальной подгруппой Фиттинга $F(H)$ и изоморфными неразрешимыми фактор-группами $H/F(H)$, причем $H = LN_H\langle a \rangle$, где $L = \langle a^H \rangle$, $L/F(H)$ – простая группа и $T_i \cap F(H) = 1$;
- 4) X_i состоит из групп $H = F(H) \rtimes T_i$, причем $L = \langle a^{T_i} \rangle$ – квазипростая группа и $T_i = LN_{T_i}(\langle a \rangle)$;
- 5) X_i состоит из разрешимых групп $H = F(H) \rtimes T_i$, не являющихся группами Фробениуса, и $T_i = O_2(T_i)N_H(\langle a \rangle)$;
- 6) X_i состоит из квазифробениусовых групп вида $H = F(H) \rtimes T_i$, где $T_i = N_H(\langle a \rangle)$;
- 7) X_i состоит из групп Фробениуса с инвариантным множителем T_i .

ТЕОРЕМА 11.11 [168]. Пусть G – бесконечная группа без инволюций, a и b – элементы простых порядков из G такие, что почти для всех элементов вида b^g подгруппы $L_g = \langle a, b^g \rangle$ конечны. Тогда хотя бы один из элементов a, b содержится в бесконечной f -локальной подгруппе. Если в G конечны все подгруппы $L_g = \langle a, b^g \rangle$, то либо группа G обладает конечной периодической частью, либо хотя бы один из элементов a, b содержится в f -локальной подгруппе, содержащей бесконечно много элементов конечного порядка.

ТЕОРЕМА 11.12 [168]. Если в квазичерниковской простой группе G найдутся неединичные элементы a и b такие, что почти для всех элементов вида b^g подгруппы $\langle a, b^g \rangle$ конечны, то G обладает бесконечной абелевой подгруппой.

Напомним, что квази- σ -группой называется не- σ -группа, все собственные подгруппы которой обладают свойством σ . С помощью техники вееров в [172] описано строение квазислойно конечных групп. Согласно результатам А. Ю. Ольшанского [74], существует континуум простых квазислойно конечных групп G и их центральных расширений, а при условии существования асферического представления строения фактор-группы $G/Z(G)$ и центра $Z(G)$ независимы. Пусть G не локально конечна и проста. Тогда любые две бесконечные максимальные подгруппы группы G пересекаются по единичной подгруппе, в частности, (G, H) – пара Фробениуса для любой бесконечной максимальной подгруппы $H < G$. Если G не расщепляема, то она действует вершинно и реберно-транзитивно на бесконечном однородном локально конечном графе. Пока не известно, может ли G содержать инволюции. Но если G содержит инволюцию i , то $C_G(i) = H$ – бесконечная максимальная подгруппа группы G , инволюция в H единственна, все инволюции в G сопряжены, силовские 2-подгруппы в G сопряжены и являются либо (локально) циклическими, либо конечными группами кватернионов.

Если в G есть бесконечный веер максимальных подгрупп, то все подгруппы веера, за исключением, быть может, одной, конечны и почти все они суть группы Фробениуса с тривиальными попарными пересечениями ядер. Опираясь на последнее, очень важное свойство *изолированности ядер*, доказано, что для любой пары элементов $a, b \in G^\#$, хотя бы один из которых не является инволюцией, найдется бесконечно много элементов $c \in b^G$, для которых $G = \langle a, c \rangle$. В частности, для квазислойно конечных групп положительно решаются вопросы 13.53 и 14.83 из Коуровской тетради.

12. Дважды транзитивные группы

Г. Пассенхауз [194], [195] связал с каждым *почти полем* (универсальной алгеброй с двумя бинарными операциями – сложением и умножением, отличающейся от тела отсутствием одного из законов дистрибутивности) точно дважды транзитивную группу с регулярной абелевой нормальной подгруппой и описал строение конечных почти полей одновременно с характеристикой конечных точно дважды транзитивных групп.

Старая гипотеза о том, что в каждой точно дважды транзитивной группе есть регулярная абелева нормальная подгруппа (см. также [189; вопросы 11.52, 12.48]), остается недоказанной. С произвольной точно 2-транзитивной группой G можно связать алгебраическую систему с операциями сложения и умножения – так называемую *почти область* (Fastbereich), на которой G действует как афинная группа, и отмеченную гипотезу переформулировать так: каждая почти область является почти полем.

Кэрби и Вефельшайд [53] показали, что почти область с мультипликативной группой, конечной над центром, является почти полем. В. Д. Мазуров в [62], [63] доказал то же самое в более общем случае, когда мультипликативная группа есть группа с конечными классами сопряженных элементов. Каждая точно дважды транзитивная группа G имеет свою *характеристику* $\text{char } G$ [192], [63]. С характеристикой тесно связано понятие диагонального элемента.

ТЕОРЕМА 12.1 [91]. Пусть G – точно дважды транзитивная группа конечной характеристики p , H – ее стабилизатор точки, a – диагональный элемент из H и при $p \neq 3$ выполняется неравенство $|a| > 2$. Если подгруппа $\langle a \rangle$ нормальна в H , то G обладает регулярной абелевой нормальной подгруппой F .

ТЕОРЕМА 12.2 [91]. Пусть G – точно дважды транзитивная группа подстановок, H – ее стабилизатор точки и в H есть инволюция. Если некоторый смежный класс $Hg \neq H$ содержит конечное множество регулярных подстановок, то все регулярные подстановки группы G вместе с единицей составляют регулярную абелеву нормальную подгруппу F и $G = F \rtimes H$.

ТЕОРЕМА 12.3 [181]. Пусть G – точно дважды транзитивная группа и ее стабилизатор точки – 2-группа. Тогда G конечна и изоморфна группе Фробениуса порядка $3^2 \cdot 2^3$ или $p \cdot 2^n$, где $p = 2^n + 1$ – простое число Ферма.

ТЕОРЕМА 12.4 [170]. Пусть G – точно трижды транзитивная группа, H – ее стабилизатор двух точек. Если H – периодическая группа, то G изоморфна группе $\text{PGL}_2(P)$ над подходящим локально конечным полем P .

Транзитивная группа *примитивна*, если стабилизатор точки является максимальной подгруппой. Группа G *дважды примитивна* на Ω , если при любом $\alpha \in \Omega$ стабилизатор G_α примитивен на $\Omega \setminus \{\alpha\}$.

ТЕОРЕМА 12.5 [172], [177]. Пусть G – дважды примитивная группа подстановок и ее стабилизатор точки изоморфен подгруппе Бореля группы $L_2(P)$ над локально конечным полем P . Тогда G изоморфна $L_2(P)$.

Дважды транзитивная группа G называется *Z-группой* (группой Цассенхауза), если стабилизатор каждых трех точек из Ω тривиален.

СЛЕДСТВИЕ 12.6 [172], [177]. Пусть G – Z-группа и ее стабилизатор точки изоморфен подгруппе Бореля группы $L_2(P)$ над локально конечным полем P . Тогда G изоморфна $L_2(P)$.

ТЕОРЕМА 12.7 [172], [177]. Пусть G – Z-группа и ее стабилизатор точки изоморфен подгруппе Бореля группы $\text{Sz}(P)$ над локально конечным полем P . Тогда G изоморфна $\text{Sz}(P)$.

ТЕОРЕМА 12.8 [170]. Пусть G – Z-группа, B – ее стабилизатор точки и B является группой Фробениуса, ядро U которой есть абелева 2-подгруппа, а дополнительный множитель H – периодическая локально циклическая группа. Тогда G изоморфна группе $L_2(P)$ над некоторым локально конечным полем P характеристики 2 порядка ≥ 4 .

13. Группы с заданной подгруппой

Собственная подгруппа H группы G называется *сильно вложенной*, если H содержит элемент порядка 2 (*инволюцию*) и для любого элемента $g \in G \setminus H$ подгруппа $H \cap H^g$ не содержит инволюций. Конечные группы с сильно вложенной подгруппой изучены. В случае, когда силовская 2-подгруппа содержит единственную инволюцию, их строение определяется теоремами Бернсайда и Брауэра–Судзуки, а когда ранг силовской 2-подгруппы ≥ 2 – теорией дважды транзитивных групп [31; с. 157–180]. Хорошо известно, что $L_2(Q)$ и $Sz(Q)$, где Q – локально конечное поле характеристики 2, являются Z -группами. Стабилизатор точки в них сильно вложен, совпадает с нормализатором силовской 2-подгруппы S и является группой Фробениуса с ядром S и локально циклическим дополнением. В $L_2(Q)$ силовская 2-подгруппа S элементарна, а в $Sz(Q)$ – одна из 2-групп Судзуки. В 1986 г. В. П. Шунков поставил в Коуровской тетради вопрос 10.76, вошедший в 14-е издание [189] в следующей редакции.

10.76. Пусть G – периодическая группа, обладающая бесконечной силовской 2-подгруппой S , которая либо

- а) элементарная абелева, либо
- б) 2-группа Судзуки,

причем нормализатор $N_G(S)$ сильно вложен в G и является группой Фробениуса с локально циклическим дополнением. Должна ли группа G быть локально конечной?

Бесконечные периодические группы с сильно вложенной подгруппой изучались В. П. Шунковым и А. Н. Измайловым [42]–[44]. Но лишь в последние годы здесь произошел определенный сдвиг, благодаря работам Т. Петерфалви [85], В. Д. Мазурова [62]–[64], А. И. Созутова и Н. М. Сучкова [172], [177], [169], [178], [170], [171], [181], [182]. Для случая, когда S – ядро группы Фробениуса $N_G(S)$, положительное решение вопроса 10.76 а) вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 13.1 [169]. Пусть группа G содержит конечную инволюцию и бесконечную элементарную абелеву 2-подгруппу S , причем нормализатор $H = N_G(S) = S \rtimes T$ сильно вложен в G и является группой Фробениуса с локально циклическим дополнением T и ядром S . Тогда G изоморфна $L_2(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2.

Вопрос 10.76 был решен положительно в [178].

Собственная подгруппа H группы G называется *сильно изолированной*, если для любого неединичного элемента $g \in G$ из $C_G(g) \cap H \neq 1$ следует $C_G(g) \leq H$, и *2-изолированной*, если это условие выполняется для $C_G(g)$, содержащих инволюции [8]. Подгруппа H группы G называется *бесконечно изолированной*, если для любого неединичного элемента $h \in H$ из бесконечности $C_H(h)$ и того, что он обладает инволюцией, следует включение $C_G(h) \leq H$ [44]. Результаты из [44], [42] обобщены в [170].

ТЕОРЕМА 13.2 [170]. Пусть группа G содержит конечную инволюцию, сильно вложенную бесконечно изолированную подгруппу H и выполняются следующие условия:

- 1) централизатор $C_G(k)$ некоторой инволюции $k \in G$ не содержит бесконечных подгрупп, в которых каждый неединичный элемент почти регулярен;

- 2) хотя бы одно из пересечений $H \cap H^g$, где $g \in G \setminus H$, бесконечно;
- 3) существует элемент $b \in H$, инвертируемый некоторой инволюцией j из G , централизатор $C_G(b)$ которого не содержится в H .

Тогда инволюции в G сопряжены, $B = \langle b^G \rangle$ – периодическая абелева подгруппа, инвертируемая каждой инволюцией из G , и $G = C_G(B)C_G(k)$.

Конечные группы с сильно изолированными подгруппами были изучены в 60-х годах (см. [23], [35], [188]).

ТЕОРЕМА 13.3 [181]. Пусть группа G содержит 2-изолированную локально конечную подгруппу H четного периода и конечную инволюцию i . Тогда справедливо хотя бы одно из следующих утверждений:

- 1) все 2-элементы группы G содержатся в H ;
- 2) (G, H) – пара Фробениуса, H совпадает с централизатором своей единственной инволюции и все инволюции в G сопряжены;
- 3) $G = F \rtimes C_G(i)$ – локально конечная группа Фробениуса с абелевым ядром F ;
- 4) $H = V \rtimes D$ – группа Фробениуса с локально циклическим инвариантным множителем D и сильно изолированным ядром V , $U = O_2(V)$ – силовская 2-подгруппа группы G и $G = Z$ -группа подстановок множества $\Omega = \{U^g \mid g \in G\}$.

ТЕОРЕМА 13.4 [170]. Пусть бесконечная группа G содержит сильно изолированную 2-подгруппу U периода ≤ 4 , конечную инволюцию и подгруппу порядка 6. Тогда либо $G = F \rtimes U$ – локально конечная группа Фробениуса с периодическим абелевым ядром F , либо G изоморфна группе $L_2(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2.

ТЕОРЕМА 13.5 [170]. Пусть бесконечная группа G с конечной инволюцией содержит сильно изолированную подгруппу U , изоморфную 2-группе Судзуки $S(P, x)$. Тогда либо подгруппа U нормальна в G , либо G изоморфна группе Судзуки $Sz(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2.

СЛЕДСТВИЕ 13.6 [170]. Пусть G – периодическая группа, S – ее сильно изолированная абелева силовская 2-подгруппа, содержащая более одной инволюции и элемент порядка 4. Тогда S нормальна в G .

ТЕОРЕМА 13.7 [170]. Пусть группа G содержит конечную инволюцию и сильно изолированную 2-подгруппу U , которая либо элементарная абелева ранга ≥ 2 , либо 2-группа Судзуки. Тогда либо подгруппа U нормальна в G , либо G изоморфна одной из групп $L_2(P)$, $Sz(P)$ над локально конечным полем P характеристики 2. В частности, если подгруппа U несчетна, то она нормальна в G .

ТЕОРЕМА 13.8 [170]. Пусть периодическая группа G содержит сильно изолированную абелеву подгруппу U 2-ранга > 1 . Тогда либо U нормальна в G , либо G изоморфна $L_2(P)$ над подходящим локально конечным полем P характеристики 2 и порядка ≥ 4 .

СЛЕДСТВИЕ 13.9 [170]. Пусть G – периодическая группа, S – ее сильно изолированная абелева подгруппа, содержащая четверную подгруппу и элемент порядка больше 2. Тогда S нормальна в G .

14. Группы с условием минимальности

Группы с условием минимальности, как правило, изучались при некоторых дополнительных ограничениях. Наиболее важным из таких ограничений является локальная разрешимость группы, которая позволила построить теорию локально разрешимых групп с условием минимальности. В этом решающая роль принадлежит С. Н. Черникову и его школе.

Группы с условием минимальности изучались также при других ограничениях, более общих, чем локальная разрешимость. Однако методы, созданные для локально разрешимого случая, являлись определяющими в такого рода обобщениях.

Дальнейшее продвижение в теории групп с условием минимальности было приостановлено трудностями, которые возникли при попытках обобщить известную теорему Черникова [12]–[14] на произвольные группы с условием минимальности. В связи с этим в известном обзоре А. Г. Куроша и С. Н. Черникова [59] в 1947 г. была поставлена проблема, получившая название проблемы минимальности, которая формулируется в следующей форме.

Будет ли бесконечная группа с условием минимальности (в частности, локально конечная группа с условием минимальности [18]) конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп?

Как уже отмечалось выше, только сравнительно недавно эта проблема была решена отрицательно А. Ю. Ольшанским.

Первый результат принципиального характера был получен в 1963 г. М. И. Каргаполовым [48]. Опираясь на теорему Файта–Томпсона [24] и теорему Брауэра о централизаторе инволюции в конечной группе четного порядка [37], М. И. Каргаполов решил отрицательно проблему Шмидта в классе локально конечных групп, являющуюся частным случаем проблемы минимальности (позднее этот результат передоказывался в работах [180], [126], [33]).

Если проблема минимальности решается отрицательно, то нетрудно доказать существование такой бесконечной группы G , что G не является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп, а любая ее собственная бесконечная подгруппа является таковой, причем, как легко показать, группу G можно считать простой.

Ввиду теоремы 6.1 группа G является бесконечным объединением конечных простых групп и, следовательно, по теореме Файта–Томпсона содержит инволюции.

Таким образом, решение проблемы минимальности обусловливается существованием бесконечной серии неизвестных конечных простых групп. Разумеется, такая редукция не может быть удовлетворительной, так как открывать новые бесконечные серии простых групп и проверять, будет ли их объединение удовлетворять условию минимальности, – занятие не из легких.

В [124] доказано, что силовская 2-подгруппа из G конечна. В доказательстве этого факта существенно использовалась абстрактная характеристика простой группы $PGL(2, K)$ полем K нечетной характеристики, полученная в [124].

ТЕОРЕМА 14.1 [129]. Пусть G – бесконечная простая локально конечная квазичерниковская группа; S – силовская 2-подгруппа группы G ; Q – подгруппа, порожденная всеми инволюциями из S .

Тогда имеет место одно из следующих двух утверждений 1) и 2):

1) подгруппа S является одной из групп:

- (a) $a^{2^n} = t^2 = 1$, $tat = a^{-1+2^{n-1}}$, $n > 2$;
- (b) 2-группа Судзуки порядка 2^6 типа 1;
- (c) $a^{2^n} = b^{2^n} = t^2 = 1$, $ab = ba$, $tat = a^{-1}$, $tbt = ba^{-1}$, $n \geq 2$;

централизатор инволюции из G является максимальной подгруппой в G ;

2) (a) подгруппа S конечна;

- (b) подгруппа $H = N_G(Q)$ максимальна в G и фактор-группа $H/C_G(Q)$ неразрешима;
- (c) $H = \{r\} \cdot C_G(i)$, где i – некоторая инволюция из S , $\{r\}$ – циклическая холловская подгруппа в G , индуцирующая в Q группу автоморфизмов, действующую транзитивно на множество инволюций из Q , причем элемент r строго вещественный относительно некоторой инволюции из G ;
- (d) $N_G(\{r\}) = D \rtimes \{t\}$, где $\{t\}$ – циклическая 2-группа, D – конечная подгруппа нечетного порядка из H ;
- (e) если H_1 – подгруппа из G , сопряженная с H , и $H_1 \neq H$, то $D_1 = H \cap H_1$ сопряженно в D .

СЛЕДСТВИЕ 14.2 [130]. Если в локально конечной группе с условием минимальности для подгрупп силовская 2-подгруппа абелева, то группа черниковская.

СЛЕДСТВИЕ 14.3 [130]. Локально конечная группа с абелевыми силовскими примарными подгруппами тогда и только тогда является прямым произведением конечного числа квазициклических групп, когда она удовлетворяет условию минимальности для подгрупп и в ней нет подгрупп конечного индекса.

ТЕОРЕМА 14.4 [129]. Пусть G – бесконечная периодическая группа регулярной мощности, k – инволюция из G . Тогда либо централизатор некоторой инволюции из G имеет мощность группы G , либо в G для каждой инволюции существует подгруппа мощности G с нетривиальным центром, не содержащая инволюции.

СЛЕДСТВИЕ 14.5 [129]. Пусть в периодической группе G все собственные подгруппы счетны. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:

- 1) группа G не содержит инволюций;
- 2) силовская 2-подгруппа инвариантна в G ;
- 3) группа G счетна.

СЛЕДСТВИЕ 14.6 [129]. Проблему счетности для групп с условием минимальности для подгрупп достаточно решить для периодических групп без инволюций.

ТЕОРЕМА 14.7 [133]. Из отрицательного решения проблемы минимальности следовало бы существование группы G , обладающей следующими свойствами:

- 1) группа G является бесконечным объединением конечных простых групп;
- 2) любая собственная бесконечная подгруппа из G является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп;

- 3) силовская 2-подгруппа S группы G является либо 2-группой Судзуки порядка 64 типа 1, либо сплетением двух циклических групп: $\langle a \rangle \sim \langle t \rangle$, где $a^{2^\pi} = t^2 = 1$, $\pi \geq 2$;
- 4) централизатор инволюции из $Z(S)$ в G является максимальной подгруппой в G .

ТЕОРЕМА 14.8 [133]. Если в локально конечной группе централизатор некоторой инволюции конечен, то группа обладает нормальным делителем конечного индекса в ней, не содержащим этой инволюции.

ТЕОРЕМА 14.9 [133]. Пусть G – бесконечная локально конечная группа, R – ее четверная подгруппа Клейна. Тогда в R существует по крайней мере одна инволюция, централизатор которой бесконечен в G .

Положительное решение проблемы минимальности для локально конечных групп дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 14.10 [133]. Если локально конечная группа удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, то она либо конечна, либо является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп.

Так как локально конечная группа с условием минимальности для абелевых подгрупп удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, то отсюда и из теоремы 14.10 вытекает положительное решение проблемы, поставленной в [18].

Теорема 14.10 независимо доказана также в [51].

ТЕОРЕМА 14.11 [133]. Локально конечная группа с условием минимальности для абелевых подгрупп либо конечна, либо является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп.

Пример группы, построенной в [69], [70], показывает, что теорема 14.11 не обобщается на периодические группы.

ТЕОРЕМА 14.12 [76]. Для всякой периодической неабелевой сопряженно бипрimitивно конечной группы слабое условие минимальности для неабелевых подгрупп равносильно условию минимальности для подгрупп.

ТЕОРЕМА 14.13 [76]. Для всякой периодической F^* -группы слабое условие минимальности и условие минимальности для подгрупп равносильны.

ТЕОРЕМА 14.14 [77]. Для периодических F_q^* -групп слабое условие минимальности для q -подгрупп и условие минимальности для q -подгрупп равносильны.

ТЕОРЕМА 14.15 [111]. Бинарно конечная группа H тогда и только тогда является черниковской, когда в группе автоморфизмов H найдется конечная элементарная абелева 2-подгруппа L такая, что любая абелева L -инвариантная подгруппа из H удовлетворяет условию минимальности.

ТЕОРЕМА 14.16 [111]. Пусть $G = H\langle i \rangle$, где H – бинарно конечная группа, нормальная в G , i – инволюция. Если любая локально разрешимая подгруппа из G , содержащая i , удовлетворяет условию примарной минимальности, то G удовлетворяет условию примарной минимальности.

ТЕОРЕМА 14.17 [111]. Если в бинарно конечной группе G найдется конечная элементарная абелева 2-подгруппа L такая, что любая локально разрешимая подгруппа из G , содержащая L , удовлетворяет условию примарной минимальности, то G удовлетворяет условию примарной минимальности.

ТЕОРЕМА 14.18 [80]. Сопряженно бипрimitивно конечная группа G без инволюций с условием минимальности локально конечна и является разрешимой черниковской.

СЛЕДСТВИЕ 14.19. Если существует нечерниковская группа без инволюций с условием минимальности, то существует простая квазичерниковская нечерниковская группа $G = \langle a, g^{-1}ag \rangle$, где a, g – некоторые элементы из G , причем a – элемент простого порядка.

ТЕОРЕМА 14.20 [77]. Пусть G – F_q^* -группа с условием минимальности для абелевых q -подгрупп, Q – бесконечная максимальная локально конечная q -подгруппа, удовлетворяющая условию: для каждого единичного элемента $x \in Q$ тако-го, что $C_Q(x)$ бесконечен, максимальные локально конечные q -подгруппы группы $C_G(x)$ сопряжены в $C_G(x)$. Тогда максимальные локально конечные q -подгруппы группы G сопряжены в G .

ТЕОРЕМА 14.21 [184]. Всякая сопряженно бипрimitивно конечная группа, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп, является черниковской.

ТЕОРЕМА 14.22 [183]. Пусть G – сопряженно бипрimitивно конечная группа, содержащая инволюции и $C_G(i)$ – периодическая подгруппа для любой инволюции $i \in G$. Если в группе G любая локально конечная подгруппа с инволюциями удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, то G – черниковская группа.

ТЕОРЕМА 14.23 [183]. Пусть i – автоморфизм порядка 2 периодической сопряженно бипрimitивно конечной группы T без инволюций. Если в T все i -допустимые локально конечные подгруппы удовлетворяют условию минимальности для абелевых подгрупп, то T – черниковская группа.

А. М. Поповым и В. П. Шунковым получена следующая характеристика черниковских групп в классе групп без инволюций.

ТЕОРЕМА 14.24 [90]. Пусть G – группа без инволюций, a – элемент простого порядка p из G , удовлетворяющие условиям:

- 1) $C_G(a)$ – конечная группа;
- 2) подгруппа $\langle a, a^g \rangle$ конечна для любого $g \in G$;
- 3) любая периодическая $\langle a \rangle$ -инвариантная абелева подгруппа удовлетворяет условию минимальности.

Тогда G – черниковская группа.

15. Группы с условием примарной минимальности

Начиная с работ О. Ю. Шмидта [122] и С. Н. Черникова [12] и до нашего времени решение проблем минимальности (во все более широких классах групп) составляло значительную часть вклада многих алгебраистов в теорию групп. Отметим

наиболее известные результаты в данном направлении. В классе локально разрешимых групп проблемы минимальности для подгрупп, абелевых подгрупп и др. решены С. Н. Черниковым [12], [13], [17], [18], [20], q -минимальности и примарной минимальности – Я. Д. Половицким [86], в классе локально конечных групп решения перечисленных выше проблем принадлежат В. П. Шункову и его ученикам [82], [134], [135], [133]. Наконец, в классах сопряженно бипримитивно конечных групп (групп Шункова) решения проблем минимальности и минимальности для абелевых подгрупп были получены В. П. Шунковым с А. Н. Остыловским и Н. Г. Сучковой [75], [80], [184], [145]. Отметим, что вариациями данных проблем в классе периодических и смешанных групп Шункова также занимались И. И. Павлюк, А. А. Шафиро, В. И. Сенашов, А. М. Попов, А. К. Шлёпкин [82], [90], [96], [114], [115] и др. Полное описание локально конечных групп с условием примарной минимальности получено в работах [82], [86].

Напомним, что группа G удовлетворяет *условию примарной минимальности*, если для любого простого p каждая цепь

$$G_1 > G_2 > \dots > G_n > \dots$$

подгрупп из G такая, что в любой разности $G_n \setminus G_{n+1}$ содержится элемент g_n с условием $g_n^{p^{k_n}} \in G_{n+1}$ для некоторого k_n , обрывается через конечное число шагов (определение принадлежит С. Н. Черникову).

ТЕОРЕМА 15.1 [119; I]. *Пусть G – группа Шункова без инволюций с условием примарной минимальности и G порождается элементами конечных порядков. Тогда G – локально конечная группа.*

ТЕОРЕМА 15.2 [119; II, III]. *Группа Шункова с условием примарной минимальности обладает локально конечной периодической частью.*

ТЕОРЕМА 15.3 [39]. *Пусть G – периодическая почти локально разрешимая группа, обладающая элементарной абелевой подгруппой V порядка p^2 . Если централизатор в G любого неединичного элемента из V удовлетворяет условию примарной минимальности, то G является конечным расширением группы, удовлетворяющей условию примарной минимальности.*

Еще ряд критериев примарной минимальности группы имеется в [39], [92], [112], [111].

16. Группы, насыщенные конечными группами

Группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{A}$, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G (возможно, совпадающей с K), изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{A}$.

Пусть группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{A}$ и для любой $X \in \mathfrak{A}$ в G найдется подгруппа $L \simeq X$. В этом случае будем говорить, что G насыщена множеством групп $\mathfrak{A}$, а само множество $\mathfrak{A}$ называть *насыщающим множеством групп* для G .

Понятие насыщенности введено А. К. Шлёпкиным. Насыщенность является естественным обобщением локального покрытия группы [56]. После завершения классификации конечных простых групп несколькими авторами независимо были классифи-

цированы бесконечные простые периодические линейные группы над полем характеристики $p > 0$ (см. комментарии к вопросу 1.75 из [189]). Тем самым были описаны группы, обладающие локальными покрытиями простыми группами лиевского типа, ранги которых ограничены в совокупности. Видимо, в связи с этим появился вопрос 14.101 [189] о строении периодической группы, насыщенной конечными простыми группами.

Группа с локальным покрытием, состоящим из конечных подгрупп, очевидно, локально конечна, а для групп, насыщенных тем же множеством групп, это справедливо не всегда. Примеры не локально конечных периодических групп без инволюций, насыщенных конечными группами, хорошо известны. Так, группы $B(m, n)$ достаточно большого нечетного периода, периодические произведения С. И. Адяна и многие группы А. Ю. Ольшанского, С. В. Иванова и др. расщепляемы и каждая конечная подгруппа содержится в максимальной компоненте расщепления. Поэтому они насыщены подходящими множествами конечных групп.

Для того чтобы понятие насыщенности работало эффективно, необходима достаточно “густая сеть” конечных подгрупп с нетривиальными пересечениями, по которой могла бы распространяться “кристаллизация по насыщенности” до локальной конечности всей группы. В вопросе 14.101 [189] такая сеть состоит из диэдральных подгрупп, порожденных парами инволюций, и содержащих их конечных простых подгрупп. Здесь большая роль принадлежит простому, но фундаментальному факту, что две инволюции в периодической группе всегда порождают конечную подгруппу, которая к тому же достаточно прозрачно устроена – полупрямое произведение циклической подгруппы на подгруппу порядка 2. Если период свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ четен, то в ней есть такая сеть подгрупп. За последнее десятилетие получен ряд фундаментальных результатов по группам $B(m, n)$ четных периодов. Как оказалось, конечные подгруппы в таких группах содержатся в конечных прямых произведениях групп диэдра [61], [38]. Таким образом, группы $B(m, n)$ достаточно большого четного периода n насыщены прямыми произведениями групп диэдра, взятых в конечном числе, и несколько неожиданно понятие насыщенности оказалось востребованным комбинаторной теорией групп.

В [121] изучались группы, насыщенные группами диэдра. Доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 16.1. *Периодическая группа ограниченного периода, насыщенная группами диэдра, конечна.*

ТЕОРЕМА 16.2. *Если G – периодическая группа, насыщенная группами диэдра, и S – ее силовская 2-подгруппа, то либо S – группа порядка 2 и G – (локально) конечный диэдр, либо $G = ABC = ACB = BCA = CBA$, где A – централизатор некоторой инволюции z из центра S , $B = O(C_G(v))$, v – произвольная инволюция из S , отличная от z , и $C = O(C_G(zv))$. При этом A – (локально) конечный диэдр, а B , C – (локально) циклические группы.*

Пока не известно, существуют ли не локально конечные группы, удовлетворяющие теореме 16.2.

Среди работ, посвященных частичным решениям вопроса 14.101 [189], выделим статьи в центральных журналах [116]–[118], [120]. В [116] доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 16.3. Пусть бесконечная периодическая группа G насыщена конечными простыми неабелевыми подгруппами и некоторая силовская 2-подгруппа S из G является конечной группой диэдра. Тогда G изоморфна локально конечной простой группе $L_2(P)$ над подходящим локально конечным полем P нечетной характеристики.

ТЕОРЕМА 16.4. Бесконечная периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами P_i , изоморфна локально конечной простой группе $Re(Q)$, где Q – локально конечное поле характеристики 3.

В работах [118], [120] изучались группы Шункова, насыщенные заданными семействами конечных простых групп лева ранга 1. Напомним, что в группах Шункова любая пара сопряженных элементов простого порядка порождает конечную подгруппу. Такая группа, порожденная элементами конечных порядков и будучи даже разрешимой, не обязана быть периодической. Поэтому для групп Шункова актуален вопрос о расположении в них элементов конечных порядков, в частности, составляют ли элементы конечного порядка в группе G характеристическую подгруппу $T(G)$ – периодическую часть?

Доказанные в [118], [120] теоремы объединим одной формулировкой. Изначально богатая сеть конечных подгрупп в группах Шункова вместе с насыщенностью группами из указанного множества X позволила установить в них существование локально конечной периодической части.

ТЕОРЕМА 16.5. Группа Шункова, насыщенная группами из множества X , обладает периодической частью, которая изоморфна локально конечной простой группе соответствующих лева типа и характеристики.

Доказательства упомянутых результатов объединяет общая схема. Вначале определяются строение 2-подгрупп и централизаторов инволюций и картина слияния инволюций в исследуемой бесконечной группе G . Затем в G строится простая локально конечная подгруппа H , содержащая централизатор каждой своей инволюции или, в смешанном случае, периодическую часть такого централизатора. Ввиду сопряженности инволюций в H , подгруппа H или ее нормализатор $N_G(H)$ будет сильно вложенной подгруппой в G . Как и во многих классификационных результатах теории конечных простых групп [32], локальный анализ данной ситуации приводит к равенству $G = H$ или $G = N_G(H)$. Группы с сильно вложенной подгруппой, насыщенные конечными простыми группами, рассматривались в [176], где получен такой результат.

ТЕОРЕМА 16.6. Пусть бесконечная группа G с сильно вложенной подгруппой B и конечной инволюцией насыщена конечными простыми подгруппами и для некоторой инволюции $i \in G$ централизатор $C_G(i)$ есть 2-группа. Тогда G локально конечна и изоморфна одной из групп $L_2(Q)$, $Sz(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2.

С помощью теорем 16.3, 16.4 и 16.6 в [176] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 16.7. Если бесконечная периодическая группа G содержит абелеву силовскую 2-подгруппу и насыщена конечными простыми подгруппами, то она локально конечна и изоморфна одной из групп $Re(P)$, $L_2(Q)$ над подходящими локально конечными полями P , Q .

17. M_p -группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G – группа, B – ее бесконечная нормальная полная абелева p -подгруппа с условием минимальности, a – элемент порядка p и выполняются следующие условия:

- а) локально конечные p -подгруппы из $C_G(a)B/B$ конечны,
- б) если некоторая полная абелева p -подгруппа C группы G содержится в множестве $\bigcup_{g \in G} \langle a, a^g \rangle$, то $C \subseteq B$.

Группу G из определения называется M_p -группой, а подгруппы B , a – соответственно – *ядром* и *ручкой* M_p -группы G .

В M_p -группе G ручка $\langle a \rangle$ может быть одного из следующих типов:

- 1) в $C_G(a)$ локально конечные p -подгруппы конечны;
- 2) в $C_G(a)$ локально конечные p' -подгруппы конечны;
- 3) в $C_G(a)$ локально конечные подгруппы конечны.

В соответствии с указанными разграничениями относительно ручек в M_p -группе G ручка типа 1) называется p -конечной, типа 2) – p' -конечной и типа 3) – конечной.

Первые подходы к определению этих понятий возникли из работ [146], [147], [90].

Приведем примеры M_p -групп (с конечными ручками).

ПРИМЕР 17.1 [144]. Всякая черниковская группа, обладающая бесконечной p -подгруппой и почти регулярным элементом порядка p , является M_p -группой.

ПРИМЕР 17.2 [144]. Всякое голоморфное расширение бесконечной черниковской p -группы с помощью группы внешних автоморфизмов является M_p -группой.

Ядро M_p -группы не обязано совпадать с максимальной полной абелевой p -подгруппой группы. В самом деле, пусть $G = H \times T$, где $H = P \rtimes \langle c \rangle$, P – бесконечная полная абелева p -группа, $|c| = p$, $C_H(c)$ конечен, T – свободное произведение квазициклической p -группы S и циклической группы $\langle b \rangle$ порядка p . Очевидно, G является M_p -группой с ядром P и конечной ручкой $\langle bc \rangle$, причем B вкладывается в максимальную полную абелеву p -подгруппу $B \times S \neq B$ [144].

ТЕОРЕМА 17.3 [144]. Пусть G – группа без инволюций, B – ее бесконечная полная абелева p -подгруппа, удовлетворяющие условиям:

- 1) $H = N_G(B)$ является M_p -группой с ядром B и p -конечной ручкой $\langle a \rangle$;
- 2) для всякого $g \in G \setminus H^\#$ подгруппа $\langle a, a^g \rangle$ конечна;
- 3) $|C_G(a) : H \cap C_G(a)| < \infty$ и $H \cap C_G(a)$ содержит все p' -элементы конечного порядка из $C_G(a)$;
- 4) если Q – конечная $\langle a \rangle$ -инвариантная q -подгруппа из H с условием $Q \cap C_G(a) \neq 1$ и $q \neq p$, то $N_G(Q) \leq H$.

Тогда $B \triangleleft G$.

ТЕОРЕМА 17.4 [144]. Пусть G – группа без инволюций, a – элемент простого порядка p из G с централизатором $C_G(a)$, являющимся конечной p -подгруппой, удовлетворяющие условию: все подгруппы $\langle a, a^g \rangle$, $g \in G$, конечны.

Тогда G обладает полной абелевой нормальной p -подгруппой B такой, что в G/B силовские p -подгруппы, содержащие элемент aB , конечны и сопряжены, а число их конечно.

Условие конечности подгрупп $\langle a, a^g \rangle$ в последней теореме является существенным. Действительно, в этом легко убедиться на примере свободного произведения бесконечной черниковской p -группы, обладающей почти регулярным элементом порядка p ($p \neq 2$), и некоторой нетривиальной периодической группы без инволюций. Если же взять периодическое произведение указанных групп, то мы получим пример периодической группы без инволюций, в которой выполняются все условия теоремы за исключением указанного условия, а утверждение теоремы не имеет места для такой группы.

ТЕОРЕМА 17.5 [148]. Пусть G – группа без инволюций, B – ее полная абелева p -подгруппа, a – элемент порядка p из G , удовлетворяющие условиям:

- 1) $H = N_G(B)$ является M_p -группой с p -ядром B и редуцированной ручкой $\langle a \rangle$;
- 2) для всякого $g \in G \setminus H^\#$ подгруппа $\langle a, a^g \rangle$ конечна;
- 3) $|C_G(a) : H \cap C_G(a)| < \infty$ и H содержит все p' -элементы конечного порядка из $C_G(a)$;
- 4) если Q – конечная $\langle a \rangle$ -инвариантная q -подгруппа из H с условием $Q \cap C_G(a) \neq 1$ и $q \neq p$, то $N_G(Q) \leq H$.

Тогда B нормальна в G и G – M_p -группа с ядром B и редуцированной ручкой $\langle a \rangle$.

Аналогичный результат для M_2 -групп получен В. О. Гомером в [29].

Во всех известных примерах M_p -групп с регулярной ручкой, не являющихся периодическими почти нильпотентными группами, выполняется условие: любая регулярная ручка вместе с некоторой с ней сопряженной порождает бесконечную подгруппу.

В связи с этим естественно возникает вопрос: существует ли M_p -группа с регулярной ручкой, которая не удовлетворяет этому условию и не является периодической почти нильпотентной группой?

Ответ на этот вопрос оказался отрицательным в классе групп без инволюций (см. теорему 17.3), так что в классе групп без инволюций периодические почти нильпотентные M_p -группы с регулярной ручкой и только они не удовлетворяют указанному условию. Что касается M_p -групп с регулярной ручкой, содержащих инволюции и с $p \neq 2$, то для них указанный выше вопрос остается открытым даже в классе локально конечных групп. По-видимому, решение этого вопроса как-то связано с характеристикой известных простых групп в классе (периодических) групп.

Приведем примеры M_p -групп с регулярной ручкой [149]:

- бесконечная группа диэдра является M_2 -группой с регулярной ручкой;
- группа Новикова–Адяна [1] является M_p -группой с регулярной ручкой по любому простому числу p из множества простых делителей порядков элементов группы;
- свободное произведение групп [58], обладающее нетривиальными конечными множителями, является M_p -группой с регулярной ручкой;
- периодическое произведение групп без инволюций [2] является M_p -группой с регулярной ручкой.

ТЕОРЕМА 17.6 [149]. M_p -группа G без инволюций с регулярной ручкой $\langle a \rangle$ тогда и только тогда является периодической почти нильпотентной группой, когда в ней выполняется условие: подгруппы $\langle a, a^g \rangle$, $g \in G$, конечны.

ТЕОРЕМА 17.7 [149]. M_2 -группа G с регулярной ручкой $\langle a \rangle$ тогда и только тогда является периодической почти абелевой группой с конечными силовскими подгруппами, когда все подгруппы $\langle a, a^g \rangle$, $g \in G$, конечны.

Более подробно со свойствами класса M_p -групп можно ознакомиться по монографии В. П. Шункова [154].

18. T_0 -группы

Напомним определение класса T_0 -групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G – группа с инволюциями, i – некоторая ее инволюция, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) все подгруппы вида $\langle i, i^g \rangle$, $g \in G$, конечны;
- 2) силовские 2-подгруппы из G – циклические или обобщенные группы кватернионов;
- 3) централизатор $C_G(i)$ бесконечен и обладает конечной периодической частью;
- 4) нормализатор любой нетривиальной $\langle i \rangle$ -инвариантной локально конечной подгруппы из G либо содержится в $C_G(i)$, либо обладает периодической частью, являющейся группой Фробениуса с абелевым ядром и конечным неинвариантным множителем с инволюциями;
- 5) $C_G(i) \neq G$ и для всякого c – элемента из $G \setminus C_G(i)$, строго вещественного относительно i , существует в $C_G(i)$ такой элемент s_c , что подгруппа $\langle c, c^{s_c} \rangle$ бесконечна.

Группа G с инволюцией i , удовлетворяющая относительно инволюции i условиям 1)–5), называется T_0 -группой.

Приведем примеры T_0 -групп, основанные на известных конструкциях С. И. Адяна и А. Ю. Ольшанского. Здесь имеется в виду группа без кручения $A(m, n)$, являющаяся центральным расширением циклической группы с помощью группы $B(m, n)$, $m \geq 2$, n – нечетное число и $n \geq 665$ [1], и группа без кручения $O(p)$, являющаяся центральным расширением циклической группы с помощью p -группы типа $G(\infty)$ [74].

ПРИМЕР 18.1 [158]. Пусть $A = A(m, n)$, $m > 1$, $n > 664$, – нечетное число [1]. Группа $A(m, n)$ обладает нетривиальным центром $Z(A) = \langle d \rangle$, причем $A/\langle d \rangle \simeq B(m, n)$ [1]. Рассмотрим группу $B = A \wr \langle x \rangle$, где x – инволюция. Возьмем из $A \times A^x$ элемент $u = d \cdot d^{-x}$. Очевидно, что $u \in Z(A \times A^x)$ и $u^x = u^{-1}$. Как показано в [158], группа $G = B/\langle u \rangle$ и ее инволюция $i = x \cdot \langle u \rangle$ удовлетворяют условиям 1)–5) из определения T_0 -группы, при этом $G = V \rtimes \langle i \rangle$, $C_G(i)$ – бесконечная группа с периодической частью $\langle i \rangle$, все подгруппы $\langle i, i^g \rangle$ в G конечны и любая максимальная конечная подгруппа из G , содержащая инволюцию i , является группой диэдра порядка $2n$ и G является T_0 -группой.

ПРИМЕР 18.2 [159]. Пусть $V = O(p)$. Группа V обладает нетривиальным центром $Z(V) = \langle t \rangle$ и $V/Z(V) = V/\langle t \rangle \simeq G(\infty)$ [74].

Рассмотрим группу $T = V \wr(k) = (V \times V) \rtimes (k)$, где k – инволюция. Возьмем из $V \times V$ элемент $b = (t, t^{-1})$. Очевидно, $b \in Z(V \times V)$ и $b^k = b^{-1}$. Возьмем фактор-группу $M = T/\langle b \rangle$, а в ней – инволюцию $j = k(b)$. Далее, опираясь на абстрактные свойства групп $V = O(p)$, $G(\infty)$ [74], нетрудно показать, что группа M и ее инволюция j удовлетворяют условиям 1)–5) из определения T_0 -группы. Следовательно, $M = T/\langle b \rangle$ является T_0 -группой (относительно инволюции $j = k(b)$). Заметим также, что в M любая максимальная периодическая подгруппа, содержащая инволюцию j , есть группа диедра порядка $2p$.

См. также пример из [103].

ТЕОРЕМА 18.3 [160]. Пусть G – группа, a – ее элемент простого порядка p , удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) подгруппы вида $\langle a, a^g \rangle$, $g \in G$, конечны и почти все разрешимы;
- 2) если $p = 2$, то в централизаторе $C_G(a)$ множество элементов конечных порядков конечно;
- 3) нормализатор любой нетривиальной $\langle a \rangle$ -инвариантной конечной подгруппы обладает почти нильпотентной периодической частью;
- 4) при $p \neq 2$ и для $q \in \pi(G)$, $q \neq p$, любая $\langle a \rangle$ -инвариантная элементарная абелева q -подгруппа из G конечна.

Тогда либо G обладает почти нильпотентной периодической частью, либо G – T_0 -группа и $p = 2$.

ТЕОРЕМА 18.4 [159], [162]. Пусть G – группа, a – ее элемент простого порядка p , удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) подгруппы вида $\langle a, a^g \rangle$, $g \in G$, конечны и почти все разрешимы;
- 2) централизатор $C_G(a)$ конечен;
- 3) при $p \neq 2$ и для $q \in \pi(G)$, $q \neq p$, любая $\langle a \rangle$ -инвариантная элементарная абелева q -подгруппа конечна.

Тогда G – периодическая почти нильпотентная группа.

Более подробно со свойствами класса M_p -групп можно ознакомиться по монографии В. П. Шункова [161].

19. Φ -группы

Напомним определение класса Φ_0 -групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G – группа, i – ее инволюция, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) все подгруппы вида $\langle i, i^g \rangle$, $g \in G$, конечны;
- 2) $C_G(i)$ бесконечен и обладает конечной периодической частью;
- 3) $C_G(i) \neq G$ и $C_G(i)$ не содержится в других подгруппах из G , обладающих периодической частью;
- 4) если K – конечная подгруппа из G , не лежащая в $C_G(i)$, и $V = K \cap C_G(i) \neq 1$, то K – группа Фробениуса с дополнением V .

Группа G , удовлетворяющая условиям 1)–4), называется Φ_0 -группой.

В. И. Сенашовым в [103] получено полное решение вопроса В. П. Шункова, сформулированного в 1993 г. в “Сибирском математическом журнале” [158]: будет ли всякая Φ_0 -группа также и T_0 -группой?

Там же особо подчеркивается, что наиболее трудным является установление для Φ_0 -группы выполнимости условий 4) и 5) из определения T_0 -группы.

Удалось показать, что все условия кроме четвертого из определения T_0 -группы для Φ_0 -группы выполняются. Приведем пример Φ_0 -группы, не являющейся T_0 -группой [103].

Возьмем изоморфные копии T_0 -группы $G = V \rtimes \langle i \rangle$, построенной в разделе 18:

$$G_1 = V_1 \rtimes \langle i_1 \rangle, \quad G_2 = V_2 \rtimes \langle i_2 \rangle, \quad \dots, \quad G_n = V_n \rtimes \langle i_n \rangle, \quad \dots$$

В декартовом произведении групп G_n , $n = 1, 2, \dots$, рассмотрим подгруппу $U = W \rtimes \langle j \rangle$, где W – прямое произведение подгрупп V_n , $n = 1, 2, \dots$, а $j = i_1 \cdot i_2 \cdot \dots \cdot i_n \cdot \dots$ – инволюция. Группа U является Φ_0 -группой, но не является T_0 -группой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Группа G , удовлетворяющая условиям 1), 3), 4) из определения Φ_0 -группы и условию

2) $C_G(i)$ бесконечен и обладает слойно конечной периодической частью, называется Φ -группой.

ТЕОРЕМА 19.1 [40]. Пусть G – группа, а – ее инволюция, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) все подгруппы вида $\langle a, a^g \rangle$, $g \in G$, конечны;
- 2) нормализатор любой нетривиальной $\langle a \rangle$ -инвариантной конечной подгруппы обладает слойно конечной периодической частью.

Тогда либо множество всех элементов конечных порядков порождает слойно конечную группу, либо G – Φ -группа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. И. Адян. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
- [2] С. И. Адян. Периодические произведения групп // Труды МИАН. 1976. Т. 142. С. 3–21.
- [3] M. Aschbacher. A characterisation of certain Frobenius groups // Illinois J. Math. 1974. V. 18. №3. P. 418–426.
- [4] M. Aschbacher. On finite groups generated by odd transpositions. I, II, III, IV // Math. Z. 1972. V. 127. №1. P. 45–56; // J. Algebra. 1973. V. 26. №3. P. 451–459; P. 460–478; P. 479–491.
- [5] В. В. Беляев. Группы с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. №5. С. 531–536.
- [6] В. В. Блудов. О группах Фробениуса // Сиб. матем. журн. 1997. Т. 38. №6. С. 1219–1221.
- [7] В. М. Бусаркин, А. И. Старостин. О расщепляемых локально конечных группах // Матем. сб. 1963. Т. 62. №3. С. 275–294.
- [8] В. М. Бусаркин. О 2-изолированных подгруппах // Матем. заметки. 1968. Т. 3. №5. С. 497–501.
- [9] В. М. Бусаркин, Ю. М. Горчаков. Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968.
- [10] А. А. Череп. О множестве элементов конечного порядка в бипрimitивно конечной группе // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. №4. С. 518–521.

- [11] А. А. Череп. О бесконечных группах Фробениуса // Деп. в ВИНТИ 11.03.91, № 1014-В-91.
- [12] С. Н. Черников. Бесконечные специальные группы // Матем. сб. 1939. Т. 6. №2. С. 199–214.
- [13] С. Н. Черников. Бесконечные локально разрешимые группы // Матем. сб. 1940. Т. 7. №1. С. 35–64.
- [14] С. Н. Черников. К теории бесконечных специальных групп // Матем. сб. 1940. Т. 7. №6. С. 539–548.
- [15] С. Н. Черников. К теории бесконечных p -групп // Докл. АН СССР. 1945. Т. 50. С. 71–74.
- [16] С. Н. Черников. Бесконечные слойно-конечные группы // Матем. сб. 1948. Т. 22. №1. С. 101–133.
- [17] С. Н. Черников. О локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп // Матем. сб. 1951. Т. 28. №1. С. 119–129.
- [18] С. Н. Черников. Условия конечности в общей теории групп // УМН. 1959. Т. 14. №5. С. 45–96.
- [19] С. Н. Черников. О бесконечных локально конечных группах с конечными силовскими подгруппами // Матем. сб. 1960. Т. 52. №1. С. 647–652.
- [20] С. Н. Черников. Группы с условием минимальности для неабелевых подгрупп // Группы с ограничениями для подгрупп. Киев, 1971. С. 96–105.
- [21] С. Н. Черников. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980.
- [22] В. А. Чуркин, В. Д. Мазуров. О свободном действии групп на абелевой подгруппе // Сиб. матем. журн. 2002. Т. 43. №3. С. 600–608.
- [23] W. Feit. On groups which contain Frobenius groups as subgroups // Proc. Sympos. Pure Math. 1959. V. 1. P. 22–28.
- [24] W. Feit, J. G. Thompson. Solvability of groups of odd order // Pacific J. Math. 1963. V. 13. №3. P. 775–1029.
- [25] B. Fischer. F -Gruppen endlicher Ordnung // Arch. Math. 1965. V. 16. P. 330–336.
- [26] B. Fischer. Frobeniusautomorphismen endlicher Gruppen // Math. Ann. 1966. V. 163. P. 273–298.
- [27] B. Fischer. Finite groups generated by 3-transpositions. I // Invent. Math. 1971. V. 13. P. 232–246.
- [28] Е. С. Голод. О ниль-алгебрах и финитно аппроксимируемых группах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. №2. С. 273–276.
- [29] В. О. Гомер. О группах с элементами конечных рангов // Автореф. дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1992.
- [30] Ю. М. Горчаков. О бесконечных группах Фробениуса // Алгебра и логика. 1965. Т. 4. №1. С. 15–29.
- [31] Ю. М. Горчаков. Группы с конечными классами сопряженных элементов. М.: Наука, 1978.
- [32] Д. Горенштейн. Конечные простые группы. М.: Мир, 1985.
- [33] P. Hall, C. R. Kulatilaka. A property of locally finite groups // J. London Math. Soc. 1964. V. 39. P. 235–239.
- [34] B. Hartley, Th. Meixner. Periodic groups in which the centralizer of an involution has bounded order // J. Algebra. 1980. V. 64. №1. P. 285–291.
- [35] D. Hertzog. The structure of Frobenius algebraic groups // Amer. J. Math. 1961. V. 83. №3. P. 421–431.
- [36] G. Higman. Groups and ring having automorphisms without non-trivial fixed elements // J. London Math. Soc. 1957. V. 32. P. 321–334.
- [37] Международный конгресс математиков в Амстердаме, 1954. М., 1959.
- [38] S. V. Ivanov. The free Burnside groups of sufficiently large exponents // Internat. J. Algebra Comput. 1994. V. 4. №1–2. P. 1–308.
- [39] М. Н. Ивко. Характеризации групп, обладающих слойно конечной периодической частью // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Красноярск: ИММ УрО РАН, 1991.

- [40] M. N. Ivko, V. I. Senashov. On a new class of infinite groups // Укр. матем. журн. 1995. Т. 47. № 6. С. 760–769.
- [41] М. Н. Ивко, В. П. Шунков. Об одной характеристике групп, обладающих слойно конечной периодической частью // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев: ИМ АН Украины, 1993. С. 87–103.
- [42] А. Н. Измайлов. О сильно вложенной бесконечно изолированной подгруппе в периодической группе // Алгебра и логика. 1983. Т. 22. № 2. С. 128–137.
- [43] А. Н. Измайлов. Характеризация групп $SL_2(K)$ и $Sz(K)$ над локально конечным полем характеристики 2 // Алгебра и логика. 1985. Т. 24. № 2. С. 127–172.
- [44] А. Н. Измайлов, В. П. Шунков. Два признака простоты группы с бесконечно изолированной подгруппой // Алгебра и логика. 1982. Т. 21. № 6. С. 647–669.
- [45] А. Х. Журтов. О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса // Сиб. матем. журн. 2000. Т. 41. № 2. С. 329–338.
- [46] А. Х. Журтов. Группы Фробениуса, порожденные двумя элементами порядка 3 // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 3. С. 533–537.
- [47] А. Х. Журтов, В. Д. Мазуров. О группах Фробениуса, порожденных квадратичными элементами // Алгебра и логика. 2003. Т. 42. № 3. С. 271–292.
- [48] М. И. Каргаполов. О проблеме О. Ю. Шмидта // Сиб. матем. журн. 1963. Т. 4. № 1. С. 232–235.
- [49] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. Основы теории групп. М.: Наука, 1977.
- [50] O. H. Kegel. Die Nilpotenz der H_p -Gruppen // Math. Z. 1960/61. V. 75. P. 373–376.
- [51] O. H. Kegel, B. A. F. Wehrfritz. Strong finiteness conditions in locally finite groups // Math. Z. 1970. V. 117. P. 309–324.
- [52] O. H. Kegel, B. A. F. Wehrfritz. Locally Finite Groups. Amsterdam: North-Holland, 1973.
- [53] W. Kerby, H. Wefelscheid. Conditions of finiteness on sharply 2-transitive groups // Aequationes Math. 1972. V. 8. P. 287–290.
- [54] E. I. Khukhro. Nilpotent Groups and Their Automorphisms. Berlin: de Gruyter, 1993.
- [55] П. Г. Конторович. Группы с базисом расщепления I, II, III, IV // Матем. сб. 1943. Т. 12. № 1. С. 56–70; 1946. Т. 19. № 2. С. 287–308; 1948. Т. 22. № 1. С. 79–100; 1950. Т. 26. № 2. С. 311–320.
- [56] П. Г. Конторович, А. С. Пекелис, А. И. Старостин. Структурные вопросы теории групп // Матем. зап. Уральск. ун-та. 1961. № 3. С. 3–50.
- [57] А. И. Кострикин. Вокруг Бернсайда. М.: Наука, 1986.
- [58] А. Г. Курош. Теория групп. М.: Наука, 1967.
- [59] А. Г. Курош, С. Н. Черников. Разрешимые и нильпотентные группы // УМН. 1947. Т. 2. № 3. С. 18–59.
- [60] С. В. Ларин, А. И. Созутов. О расщепляемых группах с компонентой расщепления простого индекса // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 3. С. 377–385.
- [61] И. Г. Лысёнок. Бесконечные бернсайдовы группы четного периода // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 3. С. 3–224.
- [62] В. Д. Мазуров. О точно дважды транзитивных группах // Труды Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН. 1996. Т. 30. С. 114–118.
- [63] В. Д. Мазуров. О дважды транзитивных группах подстановок // Сиб. матем. журн. 1990. Т. 31. № 4. С. 102–104.
- [64] В. Д. Мазуров. О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций // Алгебра и логика. 2000. Т. 39. № 1. С. 74–86.
- [65] В. Д. Мазуров. Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41. № 2. С. 166–198.
- [66] V. Mazurov. A new proof of Zassenhaus theorem on finite groups of fixed-point-free automorphisms // J. Algebra. 2003. V. 263. № 1. P. 1–7.
- [67] P. M. Neumann, P. J. Rowley. Free actions of abelian groups on groups // Geometry and Cohomology in Group Theory (Durham, 1994). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. P. 291–295. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 252.)

- [68] П. С. Новиков. О периодических группах // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 4. С. 749–752.
- [69] П. С. Новиков, С. И. Адян. О бесконечных периодических группах. I, II, III // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. № 1. С. 212–244; № 2. С. 251–524; № 3. С. 709–731.
- [70] П. С. Новиков, С. И. Адян. О коммутативных подгруппах и проблеме сопряженности в свободных периодических группах нечетного порядка // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. № 5. С. 1176–1190.
- [71] А. Ю. Ольшанский. Бесконечные группы с циклическими подгруппами // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 4. С. 785–787.
- [72] А. Ю. Ольшанский. Бесконечная группа с подгруппами простых порядков // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 2. С. 309–321.
- [73] А. Ю. Ольшанский. Группы ограниченного периода с подгруппами простых порядков // Алгебра и логика. 1982. Т. 21. № 5. С. 553–618.
- [74] А. Ю. Ольшанский. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.
- [75] А. Н. Остыловский. Локальная конечность некоторых групп с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. 1977. Т. 16. № 1. С. 63–73.
- [76] А. Н. Остыловский. О связи между слабым условием минимальности и условием минимальности для подгрупп // Алгебра и логика. 1978. Т. 17. № 2. С. 201–209.
- [77] А. Н. Остыловский. Об условиях минимальности для q -подгрупп в F_q^* -группах // Матем. заметки. 1983. Т. 33. № 3. С. 321–332.
- [78] А. Н. Остыловский. О слабом условии минимальности для ненильпотентных подгрупп // Алгебра и логика. 1984. Т. 23. № 4. С. 439–444.
- [79] Ал. Н. Остыловский. О периодических финитно аппроксимируемых F^* -группах // Алгебра и логика. 1984. Т. 23. № 5. С. 538–545.
- [80] А. Н. Остыловский, В. П. Шунков. О локальной конечности одного класса групп с условием минимальности // Исследования по теории групп. Красноярск: Ин-т физики им. Л. В. Киренского, 1975. С. 32–48.
- [81] А. Н. Остыловский, В. П. Шунков. О бипрimitивно конечных группах с условием минимальности для p -подгрупп // Алгебра и логика. 1975. Т. 14. № 1. С. 61–78.
- [82] И. И. Павлюк, А. А. Шафиро, В. П. Шунков. О локально конечных группах с условием примарной минимальности для подгрупп // Алгебра и логика. 1974. Т. 13. № 3. С. 324–336.
- [83] О. В. Пашковская. О группах, разложимых в обобщенно равномерное произведение своих подгрупп // Препринт № 9. Красноярск: ИВМ СО РАН, 1999.
- [84] О. В. Пашковская. О свойствах обобщенно равномерного произведения // Материалы конференции молодых ученых '98 ИВМ СО РАН. Красноярск: ИВМ СО РАН, 1998. С. 119–121.
- [85] T. Peterfalvi. Une caractérisation de certains groupes 2-transitifs // J. Algebra. 1994. V. 164. № 3. P. 849–858.
- [86] Я. Д. Половицкий. Слобно экстремальные группы // Матем. сб. 1962. Т. 56. № 1. С. 95–106.
- [87] А. М. Попов. О p -группах с черниковским централизатором неединичного элемента простого порядка // Алгебра и логика. 2001. Т. 40. № 3. С. 330–343.
- [88] А. М. Попов. Об одном признаке простоты групп с инволюциями // Алгебра и логика. 2003. Т. 42. № 2. С. 227–236.
- [89] А. М. Попов. О группах с конечным H -фробениусовым элементом порядка $\neq 3, 5$ // Алгебра и логика. 2004. Т. 43. № 1. С. 112–128.
- [90] А. М. Попов, В. П. Шунков. Характеризация одного класса черниковских групп // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. № 3. С. 358–375.
- [91] А. М. Попов, А. И. Созутов, В. П. Шунков. Группы с системами фробениусовых подгрупп. Красноярск: Изд-во КГТУ, 2004.
- [92] Е. И. Седова. Периодические F^* -группы с дополнительными условиями конечности // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Новосибирск: НГУ, 1985.

- [93] В. И. Сенашов. Характеризация слойно конечных групп в классе периодических групп // Алгебра и логика. 1985. Т. 24. № 5. С. 608–617.
- [94] В. И. Сенашов. Характеризация слойно конечных групп // Алгебра и логика. 1989. Т. 28. № 6. С. 687–704.
- [95] В. И. Сенашов. Группы с условием минимальности для не почти слойно конечных подгрупп // Укр. матем. журн. 1991. Т. 43. № 7–8. С. 1002–1008.
- [96] В. И. Сенашов. Слойно конечные группы. Новосибирск: Наука, 1993.
- [97] V. I. Senashov. Groups with minimality condition // Proceedings of the International Conference “Infinite Groups 1994” (Ravello, 1994) / ed. F. de Giovanni and M. L. Newell. Berlin: de Gruyter, 1996. P. 229–234.
- [98] V. I. Senashov. Development of the theory of layer-finite groups // Proceedings of the Third International Conference on Algebra (Krasnoyarsk, 1993) / ed. Yu. L. Ershov et al. Berlin: de Gruyter, 1996. P. 237–242.
- [99] В. И. Сенашов. Характеризация групп с некоторыми условиями конечности // Дисс. ... докт. физ.-матем. наук. Красноярск: КрасГУ, 1997.
- [100] В. И. Сенашов. Характеризация обобщенно черниковских групп // Докл. РАН. 1997. Т. 352. № 3. С. 309–310.
- [101] В. И. Сенашов. Группы со слойно конечной периодической частью // Сиб. матем. журн. 1997. Т. 38. № 6. С. 1374–1386.
- [102] В. И. Сенашов. Характеризация обобщенно черниковских групп в группах с инволюциями // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 4. С. 577–587.
- [103] В. И. Сенашов. Об одном вопросе В. П. Шункова // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39. № 5. С. 1154–1156.
- [104] В. И. Сенашов. Достаточные условия почти слойной конечности группы // Укр. матем. журн. 1999. Т. 51. № 4. С. 472–485.
- [105] В. И. Сенашов. Почти слойная конечность периодической группы без инволюций // Укр. матем. журн. 1999. Т. 51. № 11. С. 1529–1533.
- [106] В. И. Сенашов. Характеризация групп с обобщенно черниковской периодической частью // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 2. С. 270–275.
- [107] В. И. Сенашов, В. П. Шунков. Группы с условиями конечности. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.
- [108] В. И. Сенашов. Характеризация групп со слойно конечной периодической частью // Укр. матем. журн. 2001. Т. 53. № 3. С. 314–319.
- [109] В. И. Сенашов. Строение бесконечной силовой подгруппы в некоторых периодических группах Шункова // Дискретн. матем. 2002. Т. 14. № 4. С. 133–152.
- [110] В. И. Сенашов, В. П. Шунков. Почти слойная конечность периодической части группы без инволюций // Дискретн. матем. 2003. Т. 15. № 3. С. 91–104.
- [111] А. А. Шафиро. L -характеризация черниковских групп и групп с условием минимальности в классе бинарно конечных групп // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Новосибирск: НГУ, 1984.
- [112] А. А. Шафиро, В. П. Шунков. О локально конечных группах с черниковскими централизаторами инволюций // Исследования по теории групп. Красноярск, 1975. С. 128–146.
- [113] А. А. Шафиро, В. П. Шунков. Об одной характеристике бесконечной черниковской группы, не являющейся конечным расширением квазициклической группы // Матем. сб. 1978. Т. 107. № 2. С. 289–303.
- [114] А. К. Шлёпки. О сопряженно бипримитивно конечных группах с условием примарной минимальности // Алгебра и логика. 1983. Т. 22. № 2. С. 226–231.
- [115] А. К. Шлёпки. О полных 2-подгруппах в сопряженно бипримитивно конечной группе с условием примарной минимальности // Алгебра и логика. 1985. Т. 24. № 2. С. 240–243.
- [116] А. К. Шлёпки. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами // Матем. труды. 1998. Т. 1. № 1. С. 129–138.
- [117] А. К. Шлёпки. О сопряженно бипримитивно конечных группах, насыщенных конечными простыми неабелевыми подгруппами // Алгебра и логика. 1998. Т. 37. № 2. С. 224–245.

- [118] А. К. Шлёпкин. О сопряженно бипримитивно конечных группах, насыщенных конечными простыми подгруппами $U_3(2^n)$ // Алгебра и логика. 1998. Т. 37. № 5. С. 606–615.
- [119] A. K. Shlepkin. Shunkov groups with primary minimality conditions. I, II, III // Siberian Adv. Math. 1998. V. 8. № 3. P. 114–131; V. 8. № 4. P. 60–83; 1999. V. 9. № 1. P. 126–150.
- [120] А. К. Шлёпкин. О периодической части групп Шункова, насыщенных конечными простыми подгруппами // Алгебра и логика. 1999. Т. 38. № 1. С. 96–125.
- [121] А. К. Шлёпкин, А. Г. Рубашкин. Об одном классе периодических групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44. № 1.
- [122] О. Ю. Шмидт. Локальная конечность одного класса бесконечных периодических групп // О. Ю. Шмидт. Избранные труды. Математика. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 298–300.
- [123] В. П. Шунков. О группах, разложимых в равномерное произведение своих p -групп // Докл. АН СССР. 1964. Т. 154. № 3. С. 542–544.
- [124] В. П. Шунков. Об абстрактной характеристизации простой проективной группы $PGL(2, K)$ над полем характеристики $p \neq 0, 2$ // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164. № 4. С. 837–840.
- [125] В. П. Шунков. К теории локально конечных групп // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168. № 6. С. 1272–1274.
- [126] В. П. Шунков. О некотором обобщении теоремы Фробениуса на периодические группы // Алгебра и логика. 1967. Т. 6. № 3. С. 113–124.
- [127] В. П. Шунков. К теории периодических групп // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 6. С. 1236–1237.
- [128] В. П. Шунков. О локально конечной группе с экстремальными силовскими p -подгруппами по некоторому простому числу p // Сиб. матем. журн. 1967. Т. 8. № 1. С. 213–229.
- [129] В. П. Шунков. О проблеме минимальности для подгрупп в локально конечных группах // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181. № 2. С. 294–295.
- [130] В. П. Шунков. Локально конечные группы // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181. № 4. С. 1011–1012.
- [131] В. П. Шунков. О периодической группе с почти регулярными инволюциями // Алгебра и логика. 1968. Т. 7. № 1. С. 113–121.
- [132] В. П. Шунков. О мощности периодической группы с абелевыми 2-подгруппами конечных рангов // Алгебра и логика. 1969. Т. 8. № 5. С. 601–618.
- [133] В. П. Шунков. О проблеме минимальности для локально конечных групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9. № 2. С. 220–248.
- [134] В. П. Шунков. Об одном классе p -групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9. № 4. С. 484–486.
- [135] В. П. Шунков. О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9. № 5. С. 579–615.
- [136] В. П. Шунков. О периодических группах с некоторыми условиями конечности // Докл. АН СССР. 1970. Т. 195. № 6. С. 1290–1293.
- [137] В. П. Шунков. О локально конечных группах конечного ранга // Алгебра и логика. 1971. Т. 10. № 2. С. 199–225.
- [138] В. П. Шунков. О сопряженности силовских p -подгрупп в SF -группах // Алгебра и логика. 1971. Т. 10. № 5. С. 587–597.
- [139] В. П. Шунков. О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11. № 4. С. 470–493.
- [140] В. П. Шунков. Об абелевых подгруппах бипримитивно конечных групп // Алгебра и логика. 1973. Т. 12. № 5. С. 603–614.
- [141] В. П. Шунков. О бесконечных централизаторах в группах // Алгебра и логика. 1974. Т. 13. № 1. С. 224–226.
- [142] В. П. Шунков. Об одном признаке простоты групп // Алгебра и логика. 1975. Т. 14. № 5. С. 576–603.
- [143] В. П. Шунков. О достаточных признаках существования в группе бесконечных локально конечных подгрупп // Алгебра и логика. 1976. Т. 15. № 6. С. 716–737.
- [144] В. П. Шунков. M_p -группы // Алгебра и логика. 1984. Т. 23. № 4. С. 445–475.

- [145] В. П. Шунков. Группы с инволюциями. Ч. I–IV // Препринты № 4, 5, 12, 23. Красноярск: ВЦ СО РАН, 1986, 1986, 1986, 1989.
- [146] В. П. Шунков. К определению M_p -группы // Алгебра и логика. 1986. Т. 25. № 1. С. 111–113.
- [147] В. П. Шунков, Н. Г. Сучкова. О группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. 1986. Т. 25. № 4. С. 445–469.
- [148] В. П. Шунков. M_p -группы с ядром произвольного ранга // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. № 1. С. 84–105.
- [149] В. П. Шунков. M_p -группы с регулярной ручкой // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. № 2. С. 220–266.
- [150] В. П. Шунков. Теоремы вложения для групп с инволюциями и характеристика черниковских групп // Алгебра и логика. 1988. Т. 27. № 1. С. 100–121.
- [151] В. П. Шунков. Характеризация некоторых конечных групп Фробениуса // Матем. заметки. 1988. Т. 43. № 6. С. 725–732.
- [152] В. П. Шунков. О парах Фробениуса вида $(F \rtimes V, V)$ // Матем. сб. 1989. Т. 180. № 10. С. 1311–1324.
- [153] В. П. Шунков. О расположении элементов простых порядков в группах // Алгебра и логика. 1989. Т. 28. № 4. С. 463–483.
- [154] В. П. Шунков. M_p -группы. М.: Наука, 1990.
- [155] В. П. Шунков. Группы с конечно вложенной инволюцией // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 1. С. 102–123.
- [156] В. П. Шунков. О примарных элементах в группах // Укр. матем. журн. 1991. Т. 43. № 7–8. С. 1070–1078.
- [157] В. П. Шунков. О вложении примарных элементов в группе. Новосибирск: Наука, 1992.
- [158] В. П. Шунков. О расположении инволюций в группе // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 2. С. 208–219.
- [159] В. П. Шунков. T_0 -группы // Матем. труды. 1998. Т. 1. № 1. С. 139–202.
- [160] В. П. Шунков. T_0 -группа и ее место в теории групп // Укр. матем. журн. 1999. Т. 51. № 4. С. 572–576.
- [161] В. П. Шунков. T_0 -группы. Новосибирск: Наука, 2000.
- [162] V. P. Shunkov. On placement of prime order elements in a group // Укр. матем. журн. 2002. Т. 54. № 6. С. 881–884.
- [163] В. П. Шунков. Группы с условиями конечности // Препринт № 4. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2002.
- [164] А. И. Созутов. О группах с фробениусовыми парами сопряженных элементов // Алгебра и логика. 1977. Т. 16. № 2. С. 204–212.
- [165] А. И. Созутов. О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. № 4. С. 893–901.
- [166] А. И. Созутов. О группах с классом фробениусово-абелевых элементов // Алгебра и логика. 1995. Т. 34. № 5. С. 531–549.
- [167] А. И. Созутов. Группы с системами фробениусовых подгрупп // Дисс. ... докт. физ.-матем. наук. Красноярск: КрасГУ, 1996.
- [168] А. И. Созутов. О существовании в группе f -локальных подгрупп // Алгебра и логика. 1997. Т. 36. № 5. С. 573–598.
- [169] А. И. Созутов. О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой // Алгебра и логика. 2000. Т. 39. № 5. С. 602–617.
- [170] А. И. Созутов. Два признака простоты группы с сильно вложенной подгруппой и конечной инволюцией // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 3. С. 443–453.
- [171] А. И. Созутов. О группах с конечной инволюцией и локально конечной 2-изолированной подгруппой четного периода // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 6. С. 912–918.
- [172] А. И. Созутов, С. И. Шахова. Строение квазислойно конечных групп // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 1. С. 118–130.
- [173] А. И. Созутов, В. П. Шунков. Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Матем. сб. 1976. Т. 100. № 4. С. 495–506.

- [174] А. И. Созутов, В. П. Шунков. О бесконечных группах, насыщенных фробениусовыми подгруппами. Ч. 1, 2 // Алгебра и логика. 1977. Т. 16. № 6. С. 711–735; 1979. Т. 18. № 2. С. 206–223.
- [175] А. И. Созутов, А. К. Шлёпкин. О группах с нормальной компонентой расщепления // Сиб. матем. журн. 1997. Т. 38. № 4. С. 897–914.
- [176] А. И. Созутов, А. К. Шлёпкин. О некоторых группах с конечной инволюцией, насыщенных конечными простыми подгруппами // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 3. С. 433–447.
- [177] А. И. Созутов, Н. М. Сучков. О бесконечных Z -группах с заданными стабилизаторами точек // Деп. в ВИНТИ 09.03.99, № 700-В99.
- [178] А. И. Созутов, Н. М. Сучков. О бесконечных группах с заданной сильно изолированной 2-подгруппой // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 2. С. 272–285.
- [179] А. И. Старостин. О группах Фробениуса // Укр. матем. журн. 1971. Т. 23. № 5. С. 629–639.
- [180] Н. П. Струнков. Нормализаторы и абелевы подгруппы некоторых классов групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. № 3. С. 657–670.
- [181] Н. М. Сучков. О конечности некоторых точно дважды транзитивных групп // Алгебра и логика. 2001. Т. 40. № 3. С. 344–351.
- [182] Н. М. Сучков. О периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 2. С. 153–160.
- [183] Н. Г. Сучкова. Группы с условием минимальности для абелевых подгрупп // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Новосибирск: НГУ, 1989.
- [184] Н. Г. Сучкова, В. П. Шунков. О группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. 1986. Т. 25. № 4. С. 445–469.
- [185] M. Suzuki. A new type of simple groups of finite order // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1960. V. 46. P. 868–870.
- [186] M. Suzuki. Finite groups with nilpotent centralizers // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 99. P. 425–470.
- [187] M. Suzuki. On a finite group with a partition // Arch. Math. 1961. V. 12. P. 241–254.
- [188] M. Suzuki. Two characteristic properties of (ZT) -groups // Osaka Math. J. 1963. V. 15. P. 143–150.
- [189] Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. Изд. 6–15. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1978–2002.
- [190] J. Thompson. Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1959. V. 45. P. 578–581.
- [191] Г. А. Троякова. К теории черниковских групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. С. 290–311.
- [192] H. Wähling. Theorie der Fastkörper. Essen: Thales-Verlag, 1987.
- [193] B. A. F. Wehrfritz. Sylow subgroups of locally finite groups with $\min-p$ // J. London Math. Soc. (2). 1969. P. 421–427.
- [194] H. Zassenhaus. Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1935. V. 11. № 1–2. P. 17–40.
- [195] H. Zassenhaus. Über endliche Fastkörper // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1935. V. 11. № 3. P. 187–220.

Институт вычислительного моделирования СО РАН;
 Красноярский государственный университет
E-mail: sen@icm.krasn.ru

Поступила в редакцию
 30.01.2005