Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Г. Синай, Диаграммный подход к 3D-системе Навье–Стокса, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 5, 47–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1642>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 16:00:23

УДК 517.957

ДИАГРАММНЫЙ ПОДХОД К 3D-СИСТЕМЕ НАВЬЕ–СТОКСА

Я. Г. Синай

Рассматривается трехмерная система Навье–Стокса (СНС) на $\mathbb{R}^3$, описывающая динамику вязкой несжимаемой жидкости в отсутствие внешней силы. Для ограниченных начальных условий с компактным носителем мы строим локально сходящийся ряд, дающий решение СНС. Коэффициенты этого ряда являются многомерными интегралами, которые мы называем диаграммами. Мы оцениваем различные классы диаграмм и показываем, в частности, что простые диаграммы убывают быстрее экспоненты.

Библиография: 5 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	47
§ 2. Схемы и диаграммы	50
§ 3. Оценки простых диаграмм	55
§ 4. Оценки коротких диаграмм	62
§ 5. Заключительные замечания	70
Список литературы	70

§ 1. Введение

Мы изучаем нелинейную систему уравнений

$$v(k, t) = e^{-t|k|^2} v(k, 0) + i \int_0^t e^{-(t-s)|k|^2} ds \int_{\mathbb{R}^3} \langle k, v(k - k', s) \rangle P_k v(k', s) dk', \quad (1)$$

которая получается формальным преобразованием Фурье 3D-системы Навье–Стокса (СНС), описывающей динамику вязкой несжимаемой жидкости в отсутствие внешней силы. Мы предполагаем, что $v(k, t) \in \mathbb{C}^3$ для любого $k \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$ и $v(k, t) \perp k$ для любого $k \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $t \geq 0$, что эквивалентно несжимаемости, полагаем вязкость равной 1 и обозначаем через P_k ортогональную проекцию на подпространство, ортогональное k . Следуя Т. Като (см. [1]), мы называем решения системы (1) строгими решениями СНС.

Свойства решения системы (1) зависят от поведения (1) вблизи $k = 0$ и $k = \infty$. В этой связи в [2], [3] были введены пространства $\Phi(\alpha)$, состоящие из функций $v(k, t) =$

$\frac{c(k, t)}{|k|^\alpha}$, где α – параметр, $2 < \alpha < 3$ в трехмерном случае, $\sup_{k \in \mathbb{R}^3} |c(k, t)| = c(t) < \infty$.
Случай $\alpha = 2$ называется критическим, так как в этом случае для малых $c(0)$ справедлива теорема о существовании глобального решения системы (1) для всех $t > 0$. Впервые это утверждение было доказано И. Ле Жаном и А.-С. Шнитманом (см. [4]). Позже М. Каноне и Ф. Планшон нашли другое доказательство (см. [5]), и в [2] было предложено элементарное доказательство этого утверждения. Заметим, что Т. Като (см. [1]) доказал аналогичный результат в пространстве $L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^3)$.

Функция $c(k, t)$ со значениями в $\mathbb{C}^3$ и ортогональная k для $k \neq 0$ удовлетворяет уравнению

$$c(k, t) = e^{-t|k|^2} c(k, 0) + i|k|^\alpha \int_0^t e^{-(t-s)|k|^2} ds \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle k, c(k-k', s) \rangle P_k c(k', s)}{|k-k'|^\alpha |k'|^\alpha} dk'. \quad (2)$$

В пространствах $\Phi(\alpha)$ справедлива локальная теорема существования (см. [2]). А именно, рассмотрим однопараметрическое семейство начальных условий $Ac(k, 0) = c_A(k, 0)$ и введем параметр $\lambda = At^{\frac{\varepsilon}{2}}$, где $\varepsilon = \alpha - 2$. В [2], [3] доказано, что при $|\lambda| \leq \lambda_0(\alpha)$ уравнение (2) с начальным условием $c_A(k, 0)$ имеет единственное решение на интервале $[0, t_0]$. Эта теорема имеет даже более сильный вариант: в указанной области решения уравнения (2) могут быть представлены как ряды, подобные степенным, по параметру λ .

Ниже введем обозначение $\lambda = As^{\frac{\varepsilon}{2}}$ и запишем неизвестную функцию $c_A(k, t)$ в виде ряда:

$$\begin{aligned} c_A(k, t) &= A \left(e^{-t|k|^2} c(k, 0) + \int_0^t e^{-(t-s)|k|^2} \sum_{p \geq 1} \lambda^p h_p(k, s) ds \right) \\ &= A \left(e^{-t|k|^2} c(k, 0) + \sum_{p \geq 1} A^p \int_0^t e^{-(t-s)|k|^2} s^{\frac{p\varepsilon}{2}} h_p(k, s) ds \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Из (2) следует система рекуррентных соотношений для функций $h_p(k, s)$. Ниже мы выпишем точные формулы для h_1 , h_2 и затем приводим общее выражение для h_p при $p \geq 3$:

$$\begin{aligned} s^{\frac{\varepsilon}{2}} h_1(k, s) &= i|k|^\alpha \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle k, c(k-k', 0) \rangle}{|k-k'|^\alpha |k'|^\alpha} \\ &\quad \times P_k c(k', 0) e^{-s|k'|^2 - s|k-k'|^2} dk', \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} s^\varepsilon h_2(k, s) &= i|k|^\alpha \left[\int_0^s s_1^{\frac{\varepsilon}{2}} ds_1 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle k, h_1(k-k', s_1) \rangle}{|k-k'|^\alpha |k'|^\alpha} \right. \\ &\quad \times P_k c(k', 0) e^{-s|k'|^2 - (s-s_1)|k-k'|^2} dk' \\ &\quad + \int_0^s s_2^{\frac{\varepsilon}{2}} ds_2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle k, c(k-k', 0) \rangle}{|k-k'|^\alpha |k'|^\alpha} \\ &\quad \times P_k h_1(k', s_2) e^{-(s-s_2)|k'|^2 - s|k-k'|^2} dk' \left. \right] \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned}
 s^{\frac{p\varepsilon}{2}} h_p(k, s) = & i|k|^\alpha \left[\int_0^s s_1^{\frac{p-1}{2}\varepsilon} ds_1 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle k, h_{p-1}(k-k', s_1) \rangle}{|k-k'|^\alpha |k'|^\alpha} \right. \\
 & \times P_k c(k', 0) e^{-s|k'|^2 - (s-s_1)|k-k'|^2} dk' \\
 & + \int_0^s s_2^{\frac{p-1}{2}\varepsilon} ds_2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle k, c(k-k', 0) \rangle}{|k-k'|^\alpha |k'|^\alpha} \\
 & \times P_k h_{p-1}(k', s_2) e^{-(s-s_2)|k'|^2 - s|k-k'|^2} dk' \\
 & + \sum_{\substack{p_1, p_2 \geq 1 \\ p_1 + p_2 = p-1}} \int_0^s s_1^{\frac{p_1\varepsilon}{2}} ds_1 \int_0^s s_2^{\frac{p_2\varepsilon}{2}} ds_2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle k, h_{p_1}(k-k', s_1) \rangle}{|k-k'|^\alpha |k'|^\alpha} \\
 & \times P_k h_{p_2}(k', s_2) e^{-(s-s_2)|k'|^2 - (s-s_1)|k-k'|^2} dk' \Big]. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Интересно, что первые два члена ряда имеют структуру, отличную от h_p , $p \geq 3$. Мы увидим, что они обладают также другим типом поведения как функции от k .

Естественно попытаться написать разложения, подобные (3), для решений $v(k, t)$ уравнения (1) без каких-либо предположений при $k = 0$ или $k = \infty$. По моему мнению, это невозможно, и использование пространств, подобных $\Phi(\alpha)$, необходимо.

Мы используем следующее ее представление: $h_p(k, s) = s^{\frac{\varepsilon}{2}} |k|^\alpha g_p(k\sqrt{s}, s)$. Для функции $v(k, t)$ это означает, что

$$v_A(k, t) = \frac{c_A(k, t)}{|k|^\alpha} = A \left(e^{-t|k|^2} v(k, 0) + \sum_{p \geq 1} A^p \int_0^t e^{-(t-s)|k|^2} s^{\frac{p\varepsilon}{2}} g_p(k\sqrt{s}, s) ds \right). \quad (7)$$

Система рекуррентных соотношений для функций g_p проще, чем для функций h_p . Во всех интегралах мы делаем замену переменных: $s_1 = s\tilde{s}_1$, $s_2 = s\tilde{s}_2$, $k\sqrt{s} = \tilde{k}$, $k'\sqrt{s} = \tilde{k}'$. Тогда вместо (4), (5) и (6) мы получим:

$$g_1(\tilde{k}, s) = i \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle \tilde{k}, c(\frac{\tilde{k}-\tilde{k}'}{\sqrt{s}}, 0) \rangle P_k c(\frac{\tilde{k}'}{\sqrt{s}}, 0) e^{-|\tilde{k}'|^2 - |\tilde{k}-\tilde{k}'|^2}}{|\tilde{k}-\tilde{k}'|^\alpha |\tilde{k}'|^\alpha} d\tilde{k}', \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 g_2(\tilde{k}, s) = & i \left[\int_0^1 \tilde{s}_1^\varepsilon d\tilde{s}_1 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle \tilde{k}, g_1((\tilde{k}-\tilde{k}')\sqrt{\tilde{s}_1}, s\tilde{s}_1) \rangle P_k c(\frac{\tilde{k}'}{\sqrt{s}}, 0) e^{-|\tilde{k}'|^2 - (1-\tilde{s}_1)|\tilde{k}-\tilde{k}'|^2}}{|\tilde{k}'|^\alpha} d\tilde{k}' \right. \\
 & \left. + \int_0^1 \tilde{s}_2^\varepsilon d\tilde{s}_2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle \tilde{k}, c(\frac{\tilde{k}-\tilde{k}'}{\sqrt{s}}, 0) \rangle P_k g_1(\tilde{k}'\sqrt{\tilde{s}_2}, s\tilde{s}_2) e^{-(1-\tilde{s}_2)|\tilde{k}'|^2 - |\tilde{k}-\tilde{k}'|^2}}{|\tilde{k}-\tilde{k}'|^\alpha} d\tilde{k}' \right] \quad (9)
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
g_p(\tilde{k}, s) = & i \left[\int_0^1 \tilde{s}_2^{\frac{p\varepsilon}{2}} d\tilde{s}_2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle \tilde{k}, c(\frac{\tilde{k}-\tilde{k}'}{\sqrt{s}}, 0) \rangle P_k g_{p-1}(\tilde{k}'\sqrt{\tilde{s}_2}, s\tilde{s}_2) e^{-(1-\tilde{s}_2)|\tilde{k}'|^2 - |\tilde{k}-\tilde{k}'|^2}}{|\tilde{k}-\tilde{k}'|^\alpha} d\tilde{k}' \right. \\
& + \sum_{\substack{p_1, p_2 \geq 1 \\ p_1 + p_2 = p-1}} \int_0^1 \tilde{s}_1^{\frac{(p_1+1)\varepsilon}{2}} d\tilde{s}_1 \int_0^1 \tilde{s}_2^{\frac{(p_2+1)\varepsilon}{2}} d\tilde{s}_2 \\
& \int_{\mathbb{R}^3} \langle \tilde{k}, g_{p_1}((\tilde{k}-\tilde{k}')\sqrt{\tilde{s}_1}, s\tilde{s}_1) \rangle \\
& \times P_k g_{p_2}(\tilde{k}'\sqrt{\tilde{s}_2}, s\tilde{s}_2) e^{-(1-\tilde{s}_2)|\tilde{k}'|^2 - (1-\tilde{s}_1)|\tilde{k}-\tilde{k}'|^2} d\tilde{k}' \\
& + \int_0^1 \tilde{s}_1^{\frac{p\varepsilon}{2}} d\tilde{s}_1 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\tilde{k}'|^\alpha} \langle \tilde{k}, g_{p-1}((\tilde{k}-\tilde{k}')\sqrt{\tilde{s}_1}, s\tilde{s}_1) \rangle \\
& \times P_k c\left(\frac{\tilde{k}'}{\sqrt{s}}, 0\right) e^{-|\tilde{k}'|^2 - (1-\tilde{s}_1)|\tilde{k}-\tilde{k}'|^2} d\tilde{k}' \Big]. \tag{10}
\end{aligned}$$

Используя (10), можно выразить g_{p_1} через $g_{p'_1}, p'_1 < p_1$, g_{p_2} через $g_{p'_2}, p'_2 < p_2$, и т. д. В конце мы получим сумму многомерных интегралов, каждый из которых содержит произведение некоторого числа начальных условий $c(\cdot, 0)$, зависящих от различных комбинаций аргументов. Каждый интеграл будет называться диаграммой, так как он подобен диаграммам квантовой теории поля и формальной теории турбулентности. В §2 мы детально опишем структуру диаграмм. В §3 и §4 мы оценим разные классы диаграмм и покажем, что они имеют различные типы поведения. Во всей работе предполагается выполненным следующее

ОСНОВНОЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. *Функция $c(k, 0)$ равна нулю, если $|k| \geq R$. При $|k| \leq R$ выполнено неравенство $|c(k, 0)| \leq C|k|^\alpha$, т.е. $|v(k, 0)| \leq C$, где R, C — некоторые постоянные.*

Далее C с различными индексами используется для обозначения различных постоянных, которые могут зависеть от α , но точные значения которых не играют роли в наших доказательствах.

Из результатов [2] следует абсолютная сходимость ряда для $c(k, t)$ при $At_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \leq \lambda_0$.

Автор благодарит М.Д. Арнольда и Е.И. Динабурга за полезные обсуждения и замечания. Автор выражает благодарность за финансовую поддержку NSF (грант DMS-0070698).

§ 2. Схемы и диаграммы

Пусть $\Delta^{(0)}$ — множество положительных чисел от 1 до $p+1$. Разложим его на два подмножества $\Delta^{(1)} = [1, p_1]$, $\Delta^{(2)} = [p_1+1, p+1]$. При этом может быть так, что $p_1 = 1$ или $p_1 = p$. Элемент этого разбиения называется финальным, если он состоит из одной точки, т.е. или $p_1 = 1$, или $p_1 = p$. Финальный элемент не может быть разбит на меньшие множества. Элемент $\Delta^{(j_1)}$, $j_1 = 1$ или 2, мы разлагаем тем же самым образом на два подмножества $\Delta^{(j_1, j_2)}$, $j_2 = 1$ или 2, и т. д., до тех пор, пока не придем к разбиению множества $\Delta^{(0)}$ на финальные элементы. Каждый финальный

элемент может быть записан как некоторый $\Delta^{(j_1, \dots, j_m)}$. Совокупность всех подмножеств $\Delta^{(j_1, \dots, j_n)}$, закодированных словами $(j_1, \dots, j_n)$, называется схемой. Каждая схема соответствует выбору слагаемого в формуле (10). Первое и последнее слагаемое соответствуют финальным элементам схемы.

Число финальных элементов схемы равно $p + 1$, так как в $\Delta^{(0)}$ каждая точка множества рано или поздно становится финальным элементом схемы. Обозначим через $N(p + 1)$ число схем для данного $p + 1$. Тогда $N(1) = 1$, $N(2) = 1$, $N(3) = 2$ и для любого p

$$N(p + 1) = \sum_{\substack{p_1 \geq 1, p_2 \geq 1 \\ p_1 + p_2 = p + 1}} N(p_1)N(p_2).$$

Следовательно, $N(p + 1) = d_1 d_2^{p+1}$ для некоторых постоянных $d_1, d_2 < \infty$.

Множество схем для данного $p + 1$ обозначается через $\Sigma(p + 1)$. Возьмем произвольную схему $S(p + 1) \in \Sigma(p + 1)$. Пусть $\mathcal{E}(S(p + 1))$ – число всех элементов всех разбиений в схеме $S(p + 1)$. Например, $\mathcal{E}(S(2)) = 2$, $\mathcal{E}(S(3)) = 4$. Легко доказывается индукцией, что $\mathcal{E}(S(p + 1)) = 2p$. Следовательно, число нефинальных элементов равно $p - 1$.

Схемы могут быть изображены как некоторые деревья, показывающие всю последовательность разбиений (см. рис. 1).

Рис. 1. Диаграммы

Каждый маленький круг на рисунке соответствует некоторому $\Delta^{(j_1, \dots, j_n)}$. Число около такого круга означает число точек, принадлежащих $\Delta^{(j_1, \dots, j_n)}$. Схемы, где один элемент каждого разбиения является финальным, называются простыми. Число простых схем равно 2^p . Мы исследуем их структуру в § 3.

Схемы, в которых $d_1 \leq \frac{p_1}{p+1} \leq d_2$ для некоторых постоянных d_1, d_2 , $0 < d_1, d_2 < 1$, пока это возможно, называются короткими. Заметим, что последнее неравенство может быть не выполнено только для последних этажей. В коротких диаграммах $m \leq \text{const} \cdot \ln(p + 1)$, и это оправдывает их название. Короткие диаграммы обсуждаются в § 4. Их поведение совершенно отлично от поведения простых диаграмм.

Каждая схема $S(p+1) \in \Sigma(p+1)$ определяет многомерный интеграл, который соответствует диаграмме $\mathcal{D}(p+1)$ и который задается следующим образом. Для каждого

нефинального элемента $\Delta^{(j_1, \dots, j_n)}$ введем переменную $\tilde{s}(j_1, \dots, j_n)$, $0 \leq \tilde{s}(j_1, \dots, j_n) \leq 1$, и плотность

$$\prod^{(\text{nf})} ((\tilde{s}(j_1, \dots, j_n))^{p(j_1, \dots, j_n)\varepsilon/2}) = \prod^{(\text{nf})} \frac{1}{1 + p(j_1, \dots, j_n)\varepsilon/2} \\ \times \prod^{(\text{nf})} \left(1 + \frac{p(j_1, \dots, j_n)\varepsilon}{2}\right) ((\tilde{s}(j_1, \dots, j_n))^{p(j_1, \dots, j_n)\varepsilon/2}).$$

Здесь и далее $\prod^{(\text{nf})}$ – произведение по всем нефинальным элементам схемы, $p(j_1, \dots, j_n)$ – число точек, принадлежащих к $\Delta^{(j_1, \dots, j_n)}$. Финальным элементам схемы не сопоставляются никакие переменные, так как в этом случае естественно предположить, что $\tilde{s}(j_1, \dots, j_n) = 1$ (см. (10)). В случае простых диаграмм

$$\prod^{(\text{nf})} \left(1 + \frac{p(j_1, \dots, j_n)\varepsilon}{2}\right) = \prod_{q=2}^p \left(1 + \frac{q\varepsilon}{2}\right) = \prod_{q=1}^p q \cdot \prod_{q=2}^p \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{2}{q\varepsilon}\right) \\ = p! \prod_{q=2}^p \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{2}{q\varepsilon}\right) \quad (11)$$

и растет как $p!$. Это не так для коротких диаграмм.

Сделаем замену переменных $\tilde{s}(j_1, \dots, j_n) = 1 - \frac{2\theta(j_1, \dots, j_n)}{\varepsilon p(j_1, \dots, j_n)}$. Тогда

$$\left(1 + \frac{p(j_1, \dots, j_n)\varepsilon}{2}\right) (\tilde{s}(j_1, \dots, j_n))^{p(j_1, \dots, j_n)\varepsilon/2} d\tilde{s}(j_1, \dots, j_n) \\ = \left(1 + \frac{2}{p(j_1, \dots, j_n)\varepsilon}\right) \left(1 - \frac{2\theta(j_1, \dots, j_n)}{\varepsilon p(j_1, \dots, j_n)}\right)^{p(j_1, \dots, j_n)\varepsilon/2} d\theta(j_1, \dots, j_n). \quad (12)$$

Эта формула показывает, что для больших $p(j_1, \dots, j_n)$ распределение $\theta(j_1, \dots, j_n)$ близко к экспоненциальному.

Положим также $s(j_1, \dots, j_n) = s \prod_{r=1}^n \tilde{s}(j_1, \dots, j_r)$. Начальное значение s может рассматриваться как $s(\Delta^{(0)})$.

Весь интеграл, соответствующий схеме $S(p+1)$ и данной диаграмме $\mathcal{D}(p+1)$, представляет собой двойной интеграл. Внешний интеграл берется по всем переменным $\tilde{s}(j_1, \dots, j_n)$. Внутренний интеграл берется по переменным $\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)$, определяемым индуктивно, когда мы поднимаемся от основания диаграммы к ее вершине. В основании диаграммы мы имеем интегралы

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle \tilde{k}(j_1, \dots, j_n), c\left(\frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n) - \tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)}{\sqrt{s(j_1, \dots, j_n)}}, 0\right) \rangle}{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1)|^\alpha |\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)|^\alpha} \\ \times P_{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)} c\left(\frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)}{\sqrt{s(j_1, \dots, j_n)}}, 0\right) e^{-|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1)|^2 - |\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)|^2} d\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2),$$

задающие g_1 (см. (8)). Результат интегрирования есть функция от $\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)$ и $s(j_1, \dots, j_n)$, которую мы записываем в виде произведения

$$f_{j_1, \dots, j_n}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n), s(j_1, \dots, j_n)) e^{-r(j_1, \dots, j_n) |\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)|^2}.$$

Заметим также, что $\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)$ соответствует каждому $\Delta^{(j_1, \dots, j_n)}$ и $\tilde{k}(j_1, \dots, j_n) = \tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1) + \tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)$, т.е. $\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1) = \tilde{k}(j_1, \dots, j_n) - \tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)$. Как и в [2], мы используем формулу

$$\begin{aligned} & a_1 |\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1)|^2 + a_2 |\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)|^2 \\ &= \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} |\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)|^2 + (a_1 + a_2) \left| \tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2) - \frac{a_1}{a_1 + a_2} \tilde{k}(j_1, \dots, j_n) \right|^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Интегрирование в диаграмме носит индуктивный характер. На каждом шаге индукции может быть одна из трех возможностей (см. (10)).

I. $\Delta^{(j_1, \dots, j_n)} = \Delta^{(j_1, \dots, j_n, 1)} \cup \Delta^{(j_1, \dots, j_n, 2)}$ и $\Delta^{(j_1, \dots, j_n, 1)}$ – финальный элемент (см. первый член (10)). Тогда мы получаем интеграл

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle \tilde{k}(j_1, \dots, j_n), c\left(\frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1)}{\sqrt{s(j_1, \dots, j_n)}}, 0\right) \rangle}{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1)|^\alpha} \\ & \times P_{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)} f_{j_1, \dots, j_n, 2}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2) \sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)}, s(j_1, \dots, j_n, 2)) \\ & \times \exp\{-|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1)|^2 - (r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)) \\ & \times |\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)|^2\} d\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2). \end{aligned}$$

II. $\Delta^{(j_1, \dots, j_n)} = \Delta^{(j_1, \dots, j_n, 1)} \cup \Delta^{(j_1, \dots, j_n, 2)}$ и $p(j_1, \dots, j_n, 1) = p_1 > 1$, $p(j_1, \dots, j_n, 2) = p_2 > 1$. Этот случай соответствует одному из слагаемых суммы (10). Мы должны интегрировать:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \langle \tilde{k}(j_1, \dots, j_n), f_{j_1, \dots, j_n, 1}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1) \sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1)}, s(j_1, \dots, j_n, 1)) \rangle \\ & \times P_{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)} f_{j_1, \dots, j_n, 2}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2) \sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)}, s(j_1, \dots, j_n, 2)) \\ & \times \exp\{-(r(j_1, \dots, j_n, 1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1))|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1)|^2 \\ & - (r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)|^2\} d\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2). \end{aligned}$$

III. $\Delta^{(j_1, \dots, j_n)} = \Delta^{(j_1, \dots, j_n, 1)} \cup \Delta^{(j_1, \dots, j_n, 2)}$ и $\Delta^{(j_1, \dots, j_n, 2)}$ – финальный элемент. Этот случай соответствует последнему члену в (10). Мы должны интегрировать:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle \tilde{k}(j_1, \dots, j_n), f_{j_1, \dots, j_n, 1}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1) \sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1)}, s(j_1, \dots, j_n, 1)) \rangle}{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)|^\alpha} \\ & \times P_{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)} c\left(\frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)}{\sqrt{s(j_1, \dots, j_n)}}, 0\right) \\ & \times \exp\{-(r(j_1, \dots, j_n, 1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1))|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1)|^2 \\ & - |\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)|^2\} d\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2). \end{aligned}$$

Теперь объясним, как мы поступаем с гауссовскими членами. Рассмотрим каждый случай I, II, III отдельно, используя (13).

I. Здесь $a_1 = 1$, $a_2 = r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)$. Следовательно,

$$r(j_1, \dots, j_n) = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = \frac{r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)}{1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)}$$

и гауссовский множитель на последнем этапе имеет вид

$$\exp \left\{ -(1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)) \right. \\ \left. \times \left| \tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2) - \frac{1}{1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)} \tilde{k}(j_1, \dots, j_n) \right|^2 \right\}.$$

К тому же

$$f_{j_1, \dots, j_n}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n), s(j_1, \dots, j_n)) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle \tilde{k}(j_1, \dots, j_n), c\left(\frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1)}{\sqrt{s(j_1, \dots, j_n)}}, 0\right) \rangle}{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1)|^\alpha} \\ \times P_{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)} f_{j_1, \dots, j_n, 2}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2) \sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)}, s(j_1, \dots, j_n, 2)) \\ \times \exp \left\{ -(1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + (1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))) \right. \\ \left. \times \left| \tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2) - \frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)}{1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)} \right|^2 \right\} d\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2). \quad (14)$$

II. В этом случае $a_1 = r(j_1, \dots, j_n, 1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1)$, $a_2 = r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)$ и

$$r(j_1, \dots, j_n) = \frac{r(j_1, \dots, j_n, 1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1))(r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))}{r(j_1, \dots, j_n, 1) + r(j_1, \dots, j_n, 1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)}.$$

Интеграл для $f_{j_1, \dots, j_n}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n), s(j_1, \dots, j_n))$ принимает вид

$$f_{j_1, \dots, j_n}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n), s(j_1, \dots, j_n)) = \int_{\mathbb{R}^3} \langle \tilde{k}(j_1, \dots, j_n), f_{j_1, \dots, j_n, 1}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1) \sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1)}, s(j_1, \dots, j_n, 1)) \rangle \\ \times P_{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)} f_{j_1, \dots, j_n, 2}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2) \sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)}, \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)) \\ \times \exp \left\{ -(r(j_1, \dots, j_n, 1) + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 \right. \\ \left. - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)) \left| \tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{r(j_1, \dots, j_n, 1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1)}{1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)} \tilde{k}(j_1, \dots, j_n) \right|^2 \right\} d\tilde{k}(j_1, \dots, j_n). \quad (15)$$

III. В этом случае $a_1 = r(j_1, \dots, j_n, 1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1)$, $a_2 = 1$. Тогда

$$r(j_1, \dots, j_n) = \frac{r(j_1, \dots, j_n, 1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1)}{1 + r(j_1, \dots, j_n, 1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1)}.$$

Гауссовский множитель имеет вид:

$$\exp \left\{ - \left(1 + r(j_1, \dots, j_n, 1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1) \right) \right. \\ \left. \times \left| \tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2) - \frac{r(j_1, \dots, j_n, 1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1)}{1 + r(j_1, \dots, j_n, 1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1)} \tilde{k}(j_1, \dots, j_n) \right|^2 \right\}$$

и

$$\begin{aligned} & f_{j_1, \dots, j_n}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n), s(j_1, \dots, j_n)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle \tilde{k}(j_1, \dots, j_n), f_{j_1, \dots, j_n, 1}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1) \sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1)}, s(j_1, \dots, j_n, 1)) \rangle}{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)|^\alpha} \\ & \quad \times P_{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)}^c \left(\frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)}{\sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)}}, 0 \right) \\ & \quad \times \exp \left\{ - \left(1 + r(j_1, \dots, j_n, 1) + (1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1)) \right) \left| \tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{r(j_1, \dots, j_n, 1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1)}{1 + r(j_1, \dots, j_n, 1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1)} \tilde{k}(j_1, \dots, j_n) \right|^2 \right\} d\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2). \end{aligned} \quad (16)$$

Теперь мы можем дать полное описание диаграмм. Диаграмма $\mathcal{D}(p+1)$ – это многомерный интеграл, для которого внешний интеграл берется по всем переменным $0 \leq \tilde{s}(j_1, \dots, j_n) \leq 1$, определяемым нефинальными элементами $\Delta^{(j_1, \dots, j_n)}$. Плотность в этом интеграле равна

$$\begin{aligned} & \prod^{(\text{nf})} (\tilde{s}(j_1, \dots, j_n))^{p(j_1, \dots, j_n)\varepsilon/2} d\tilde{s}(j_1, \dots, j_n) = \prod^{(\text{nf})} \left(1 + \frac{p(j_1, \dots, j_n)\varepsilon}{2} \right)^{-1} \\ & \quad \times \prod^{(\text{nf})} \left(1 + \frac{p(j_1, \dots, j_n)\varepsilon}{2} \right) \left(1 + \frac{2\theta(j_1, \dots, j_n)}{\varepsilon p(j_1, \dots, j_n)} \right)^{p(j_1, \dots, j_n)\varepsilon/2} d\theta(j_1, \dots, j_n). \end{aligned}$$

Внутренний интеграл берется по всем $\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)$ и вычисляется индуктивно при подъеме от основания диаграммы вверх. На каждом шаге индукции интеграл, в зависимости от схемы, может быть одного из трех типов I, II, III.

§ 3. Оценки простых диаграмм

Напомним, что простые диаграммы – это диаграммы, содержащие в каждом разбиении финальный элемент, т.е. интегрирование имеет тип I или III. Число простых диаграмм равно 2^p .

Мы начинаем с простейшего случая, когда на каждом шаге интегрирование имеет тип III, или, иначе, когда каждый элемент $\Delta^{(j_1, \dots, j_n, 2)}$ является финальным. Используя несжимаемость, можно переписать $f_{j_1, \dots, j_n}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n), s(j_1, \dots, j_n))$ следующим образом:

$$\begin{aligned} & f_{j_1, \dots, j_n}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n), s(j_1, \dots, j_n)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle \tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2), f_{j_1, \dots, j_n, 1}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1) \sqrt{s(j_1, \dots, j_n, 1)}, s(j_1, \dots, j_n, 1)) \rangle}{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)|^\alpha} \\ & \times P_{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)}^c \left(\frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)}{\sqrt{s(j_1, \dots, j_n)}}, 0 \right) \\ & \times \exp \left\{ - \left(1 + r(j_1, \dots, j_n, 1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1) \right) \left| \tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{r(j_1, \dots, j_n, 1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1)}{1 + r(j_1, \dots, j_n, 1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1)} \tilde{k}(j_1, \dots, j_n) \right|^2 \right\} d\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2). \quad (17) \end{aligned}$$

Положим $F_{j_1, \dots, j_n, 1} = \sup_{\tilde{k}} |f_{j_1, \dots, j_n, 1}(\tilde{k}, s(j_1, \dots, j_n, 1))|$. Конечно, $F_{j_1, \dots, j_n, 1}$ зависит от $s(j_1, \dots, j_n, 1)$, но мы не указываем на это явно. Сделаем замену переменных $\tilde{k} = \frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)}{\sqrt{s(j_1, \dots, j_n)}}$. Ввиду нашего основного предположения интегрирование в (17) происходит по области $|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)| \leq R$. Следовательно, мы можем написать:

$$\begin{aligned} F_{j_1, \dots, j_n} &= \sup_{\tilde{k}} |f_{j_1, \dots, j_n}(\tilde{k}, s(j_1, \dots, j_n))| \\ &\leq R^4 C_1 F_{j_1, \dots, j_n, 1} (s(j_1, \dots, j_n))^{2 - \frac{\alpha}{2}} C_2 \leq C_3 F_{j_1, \dots, j_n, 1}. \quad (18) \end{aligned}$$

Формула (17) дает общую оценку, которая может быть использована во всех интегрированиях типа III.

Для простых диаграмм это означает, что результат интегрирования по всем $\tilde{k}$ не превосходит C_4^p . С учетом формулы (11) мы можем написать окончательную оценку для простых диаграмм:

$$|\mathcal{D}(p+1)| \leq \frac{C_5^p}{p!}. \quad (19)$$

Другими словами, эти диаграммы убывают быстрее экспоненты. Мы обобщим этот результат на другие простые диаграммы. С помощью простой модификации перепишем (17) в виде

$$\begin{aligned} & f_{j_1, \dots, j_n, 1}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n), s(j_1, \dots, j_n)) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle \tilde{k}(j_1, \dots, j_n), c \left(\frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1)}{\sqrt{s(j_1, \dots, j_n, 1)}}, 0 \right) \rangle}{\left| \frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1)}{\sqrt{s(j_1, \dots, j_n)}} \right|^\alpha (s(j_1, \dots, j_n))^{\alpha/2}} \\ & \times P_{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)}^c f_{j_1, \dots, j_n, 2}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2) \sqrt{s(j_1, \dots, j_n, 2)}, s(j_1, \dots, j_n, 2)) \\ & \times \exp \left\{ - \left(1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2) \right) s(j_1, \dots, j_n, 2) \left| \frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1)}{\sqrt{s(j_1, \dots, j_n)}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)(r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))}{1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)} \right|^2 \right\} d\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2). \end{aligned}$$

Снова сделаем замену переменных: $\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1) = \frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1)}{\sqrt{s(j_1, \dots, j_n)}}$. Тогда последний интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} f_{j_1, \dots, j_n}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n), s(j_1, \dots, j_n)) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle \tilde{k}(j_1, \dots, j_n), c(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1), 0) \rangle}{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1)|^\alpha} \\ &\times P_{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)} f_{j_1, \dots, j_n, 2}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2) \sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)}, s(j_1, \dots, j_n, 2)) \\ &\times \exp \left\{ - \left(1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2) \right) \left| \tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1) \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{(r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)) \tilde{k}(j_1, \dots, j_n)}{\sqrt{s(j_1, \dots, j_n)}(1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))} \right|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Основное предположение позволяет нам интегрировать по области $|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1)| \leq R$. Мы используем те же самые обозначения, что и прежде:

$$F_{j_1, \dots, j_n} = \sup_{\tilde{k}} |f_{j_1, \dots, j_n}(\tilde{k}, s(j_1, \dots, j_n))|.$$

Рассмотрим два случая:

A₁) В первом случае пусть выполнено неравенство

$$\frac{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)|(r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))}{\sqrt{s(j_1, \dots, j_n)}(1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))} \geq 2R,$$

которое является условием на $\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)$ в предположении, что все $\tilde{s}$ фиксированы. Гауссовский множитель в (20) можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} &\exp \left\{ - \left(1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2) \right) \right. \\ &\times \left| \tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1) - \frac{(r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)) \tilde{k}(j_1, \dots, j_n)}{\sqrt{s(j_1, \dots, j_n)}(1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))} \right|^2 \Big\} \\ &\leq \exp \left\{ - \frac{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)|^2 (r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))^2}{4(1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &|f_{j_1, \dots, j_n}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n), s(j_1, \dots, j_n))| \\ &\leq |\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)| C_6 F_{j_1, \dots, j_n, 2} \\ &\times \exp \left\{ - \frac{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)|^2 (r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))^2}{4(1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)|(r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))}{2\sqrt{(1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))}} \\
&\quad \times \exp\left\{-\frac{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)|^2(r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))^2}{4(1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))}\right\} \\
&\quad \times C_6 F_{j_1, \dots, j_n, 2} \frac{\sqrt{1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)}}{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)|(r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))} \\
&\leq C_6 C_7 F_{j_1, \dots, j_n, 2} \frac{\sqrt{1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)}}{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)|(r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))},
\end{aligned}$$

где $C_7 = \max x \exp\{-x^2/4\}$. Таким образом,

$$F_{j_1, \dots, j_n} \leq C_7 F_{j_1, \dots, j_n, 2} \frac{\sqrt{1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)}}{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)|(r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))}. \quad (21)$$

A_2) Во втором случае выполнено неравенство

$$\frac{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)|(r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))}{\sqrt{s(j_1, \dots, j_n)(1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2))}} \leq 2R.$$

В этом случае оценки даже проще, потому что гауссовский множитель будет ограничен 1. Мы имеем

$$\begin{aligned}
&|f_{j_1, \dots, j_n}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n), s(j_1, \dots, j_n))| \leq C_8 R^4 F_{j_1, \dots, j_n, 2} (s(j_1, \dots, j_n))^{2-\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad \times \frac{1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)}{r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)} \\
&\leq C_9 F_{j_1, \dots, j_n, 2} (s(j_1, \dots, j_n)) \frac{1 + r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)}{r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)}. \quad (22)
\end{aligned}$$

Если $r(j_1, \dots, j_n, 2) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2) \leq 1$, тогда последний множитель в (21) и (22) меньше, чем $\frac{1}{2}$. Если он больше 1, тогда он меньше 2.

Положим $r(j_1, \dots, j_n, j) = \frac{\rho(j_1, \dots, j_n, j)}{(p-n+1)\varepsilon}$. Мы увидим, что это является естественной нормировкой величины $r(j_1, \dots, j_n, j)$. Заметим, что $r(j_1, \dots, j_n, j)$ преобразуется одним и тем же образом как в случае I, так и в случае III (см. (14) и (16)). Следовательно, мы можем написать $r(p-n-1)$ вместо $r(j_1, \dots, j_n, j)$ и

$$r(p-m) = \frac{r(p-m-1) + 1 - \tilde{s}(p-m-1)}{1 + r(p-m-1) + 1 - \tilde{s}(p-m-1)}. \quad (23)$$

Здесь, конечно, используется тот факт, что мы имеем дело с простыми диаграммами и $\tilde{s}(p-m-1)$ совпадает с $\tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1)$ или с $\tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)$ в зависимости от типа диаграммы и типа интегрирования. В случае I можно написать простую оценку:

$$\begin{aligned}
F_{j_1, \dots, j_n} &\leq C_9 F_{j_1, \dots, j_n, 2} \frac{1 + r(p-n-1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)}{r(p-n-1) + 1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)} \\
&= C_9 F_{j_1, \dots, j_n, 2} \frac{1}{r(p-n)}. \quad (24)
\end{aligned}$$

Пусть $r(j_1, \dots, j_n) = r(p - n) = \frac{\rho(p - n)}{\varepsilon(p - n)}$, $1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_n) = 1 - \frac{2\theta(p - n)}{(p - n)\varepsilon}$. Из (23) получаем, что

$$r(n) = \frac{r(n - 1) + 1 - \tilde{s}(n - 1)}{1 + r(n - 1) + 1 - \tilde{s}(n - 1)}$$

и

$$\rho(n) = \frac{\frac{\rho(n - 1) + \theta(n - 1)}{(n - 1)\varepsilon + \rho(n - 1)} + \frac{\theta(n - 1)}{n\varepsilon}}{\frac{n\varepsilon}{(n - 1)\varepsilon + \rho(n - 1)} + \frac{n\varepsilon}{\theta(n - 1)}}. \quad (25)$$

По индукции предположим, что $\rho(n - 1) \geq \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho(n) - \varepsilon &= \frac{\frac{\rho(n - 1) + \theta(n - 1)}{(n - 1)\varepsilon + \rho(n - 1)} + \frac{\theta(n - 1)}{n\varepsilon}}{\frac{n\varepsilon}{(n - 1)\varepsilon + \rho(n - 1)} + \frac{n\varepsilon}{\theta(n - 1)}} - \varepsilon \\ &= \frac{\rho(n - 1) + \theta(n - 1) - \frac{(n - 1)\varepsilon + \rho(n - 1)}{n} - \frac{\theta(n - 1)}{n}}{\frac{(n - 1)\varepsilon + \rho(n - 1)}{n\varepsilon} + \frac{\theta(n - 1)}{n\varepsilon}} \\ &= \frac{\frac{n - 1}{n}(\rho(n - 1) - \varepsilon) + \theta(n - 1)\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\frac{(n - 1)\varepsilon + \rho(n - 1)}{n\varepsilon} + \frac{\theta(n - 1)}{n\varepsilon}} \geq 0, \end{aligned}$$

т.е. $\rho(n) \geq \varepsilon$. Легко проверить, что $\rho(2) > 0$.

Положим $\rho(n) = \varepsilon + \rho_1(n)$. Тогда

$$\varepsilon + \rho_1(n) = \frac{\varepsilon + \rho_1(n - 1) + \theta(n - 1)}{1 + \frac{\rho_1(n - 1) + \theta(n - 1)}{n\varepsilon}}$$

и

$$\rho_1(n) = \frac{(\rho_1(n - 1) + \theta(n - 1))\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 + \frac{\rho_1(n - 1) + \theta(n - 1)}{n\varepsilon}}. \quad (26)$$

Вернемся к (24). Обозначим через $\mathcal{N}_1(\mathcal{D}(p + 1))$ множество таких m , в которых интегрирование имеет тип I, и через $N_1(\mathcal{D}(p + 1))$ – мощность этого множества, и пусть $\mathcal{N}_2(\mathcal{D}(p + 1))$ и $N_2(\mathcal{D}(p + 1))$ – аналогичные объекты для интегрирования типа II.

Случай A: $N_1 = N_1(\mathcal{D}(p + 1)) \leq C_{10}p$ для некоторой постоянной $C_{10} < 1$, которая будет указана позже. Из (3), (20) и (24)

$$F_0 \leq \frac{1}{p!} C_3^{p - N_1} \left(\prod^{(1)} m \right) C_8^{N_1} C_{10},$$

где $\prod^{(1)}$ – произведение по всем $m \in \mathcal{N}_1(\mathcal{D}(p + 1))$. В этом случае

$$\frac{1}{p!} \prod^{(1)} m \leq \frac{1}{(p(1 - C_{10}))!} \leq \exp\{-(1 - C_{10})p \ln p\} C_{11}^p$$

для некоторой постоянной $C_{11} < \infty$. Следовательно,

$$F_0 \leq C_{12}^p \exp\{-(1 - C_{10})p \ln p\}.$$

Последняя оценка – как раз та, которая нам нужна, потому что из нее следует убывание более быстрое, чем экспоненциальное.

Случай В: $N_1(\mathcal{D}(p+1)) \geq (1 - C_{10})p$, т.е. число интегрирований типа I достаточно велико. Из предыдущих оценок вытекает, что

$$F_0 \leq C_{12}^p \frac{1}{p!} \prod_{n \in \mathcal{N}_1(\mathcal{D}(p+1))} \frac{1}{r(n)}.$$

Как показано ранее, $r(n) \geq 1/n$ для всех n . Поэтому

$$F_0 \leq C_{12}^p \frac{1}{p!} \prod_{n \in \mathcal{N}_1(\mathcal{D}(p+1))} \frac{n\varepsilon}{\rho(n)} \leq C_{12}^p \prod_{n=2}^p \frac{1}{\rho(n)}.$$

Мы аккуратно оценим последнее произведение. Мы покажем, что на множестве большой вероятности (по $\tilde{s}$) оно достаточно мало. На дополнении к этому множеству оно меньше, чем $(1/\varepsilon)^p$, но вероятность этого дополнения убывает быстрее экспоненты.

Случай В.1: число различных n , для которых $\rho_1(n) \geq \ln p$, больше или равно $p/(\ln \ln \ln p)$. Тогда произведение $\prod 1/\rho(n)$ по таким n меньше $(1/\ln p)^{p/(\ln \ln \ln p)} = e^{-(p \ln \ln p)/(\ln \ln \ln p)}$. Произведение по остальным n меньше, чем $(C_{13}/\varepsilon)^p$. Следовательно, мы снова получаем оценку, убывающую быстрее экспоненты.

Случай В.2: число различных n , для которых $\rho(n) \geq \ln p$, меньше, чем $p/(\ln \ln \ln p)$. В этом случае число различных n , для которых $\rho(n) \leq \ln p$, больше, чем $p - p/(\ln \ln \ln p)$.

Число n назовем *нормальным*, если

- 1) $n \geq p/2$;
- 2) $\rho_1(n) < \ln p$;
- 3) $\rho_1(n_1) < \ln p$ для некоторого n_1 , при котором $p^{\gamma_1} < n_1 - n < 2p^{\gamma_1}$, где γ_1 – постоянная, которая будет определена позже;
- 4) $\theta_{n+1} + \dots + \theta_{n_1} \leq p^{\gamma_1 + \gamma_2}$, где γ_2 – другая положительная постоянная, которая также будет определена позже.

ЛЕММА 3.1. *Если n нормально, то $\theta_{n+1} + \dots + \theta_{n_1} \leq 3 \ln p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем (26):

$$\rho_1(m) = \frac{(\rho_1(m-1) + \theta(m-1)) \left(1 - \frac{1}{m}\right)}{1 + \frac{\rho_1(m-1) + \theta(m-1)}{m\varepsilon}} = \rho_1(m-1) + \theta(m-1) + \beta(m),$$

где

$$\beta(m) = \frac{-\frac{1}{m}(\rho_1(m-1) + \theta(m-1)) - \frac{(\rho_1(m-1) + \theta(m-1))^2}{m\varepsilon}}{1 + \frac{\rho_1(m-1) + \theta(m-1)}{m\varepsilon}}. \quad (27)$$

Для $n < m \leq n_1$

$$\rho_1(m) = \rho_1(n) + \theta(n+1) + \dots + \theta(m-1) + \beta(n+1) + \dots + \beta(m-1).$$

Предположим, что $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$ и $\beta(j) \leq \frac{1}{p^{\frac{1}{2}(1-\gamma_1-\gamma_2)}}$ для $n \leq j < m$. Тогда

$$\beta(n+1) + \dots + \beta(m-1) \leq \frac{m-n}{p^{\frac{1}{2}(1-\gamma_1-\gamma_2)}} \leq \frac{2p^{\gamma_1}}{p^{\frac{1}{2}(1-\gamma_1-\gamma_2)}} = \frac{2}{p^{\frac{1}{2}(1-3\gamma_1-\gamma_2)}}$$

и

$$\rho_1(m-1) \leq \ln p + p^{\gamma_1+\gamma_2} + \frac{1}{p^{\frac{1}{2}(1-3\gamma_1-\gamma_2)}}.$$

Таким образом (см. (27)),

$$\begin{aligned} \beta(m) &\leq \frac{2}{p} \left(\ln p + \frac{1}{p^{\frac{1}{2}(1-3\gamma_1-\gamma_2)}} + 2p^{\gamma_1+\gamma_2} \right) \\ &+ \frac{2}{p\varepsilon} \left(\ln p + p^{\gamma_1+\gamma_2} + \frac{1}{p^{\frac{1}{2}(1-3\gamma_1-\gamma_2)}} + 2p^{\gamma_1+\gamma_2} \right) \leq \frac{C_{14}}{p^{1-2(\gamma_1+\gamma_2)}}. \end{aligned}$$

Если γ_1, γ_2 выбраны так, что $\frac{1}{2}(1-\gamma_1-\gamma_2) \leq 1-2(\gamma_1+\gamma_2)$, т.е. $\gamma_1 + \gamma_2 < \frac{1}{3}$, то наше неравенство для $j = m$ доказано. Теперь мы можем написать:

$$\rho_1(n_1) = \rho_1(n) + \theta(n) + \dots + \theta(n_1) + \beta(n+1) + \dots + \beta(n_1)$$

и

$$\theta(n) + \dots + \theta(n_1) = \rho_1(n_1) - \rho_1(n) - (\beta(n+1) + \dots + \beta(n_1)).$$

Из свойств 2) и 3) следует, что $\rho_1(n_1) - \rho_1(n) \leq 2 \ln p$, а из предыдущих оценок получаем

$$|\beta(n+1) + \dots + \beta(n_1)| \leq \frac{2p^{\gamma_1}}{p^{\frac{1}{2}(1-\gamma_1-\gamma_2)}} \leq \frac{2}{p^{\frac{1}{2}(1-3\gamma_1-\gamma_2)}}.$$

Если $1-3\gamma_1-\gamma_2 > 0$, то

$$\theta(n) + \dots + \theta(n_1) \leq 3 \ln p.$$

Лемма доказана.

Напомним, что $\theta(m)$ – независимые случайные величины с плотностями

$$p_m(\theta) = \left(1 + \frac{2}{(p-m)\varepsilon} \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\varepsilon(p-m)} \right)^{\frac{(p-m)\varepsilon}{2}}$$

(см. (11)). Далее под распределением вероятностей всех θ мы понимаем распределение, порожденное произведением всех таких плотностей.

ЛЕММА 3.2. $P = \mathbf{P}\{\theta(n) + \dots + \theta(n_1) < 3 \ln p\} \leq C_{16} p^{\gamma_1} e^{-C_{18} p^{\gamma_1} \ln p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через ν число таких m , $n \leq m \leq n_1$, для которых $\theta(m) \leq \frac{3(\ln p)^2}{p^{\gamma_1}}$. Для события, указанного в формулировке леммы, мы должны иметь $\nu \geq p^{\gamma_1} \left(1 - \frac{1}{\ln p}\right)$. Следовательно, $P \leq \sum_{s \geq p^{\gamma_1} (1 - \frac{1}{\ln p})} P_s$, где P_s – вероятность того, что $\nu = s$. Мы можем написать, что $P \left\{ \theta(m) \leq \frac{3(\ln p)^2}{p^{\gamma_1}} \right\} \leq C_{15} \frac{(\ln p)^2}{p^{\gamma_1}}$ и

$$\begin{aligned} P_s &\leq \binom{2p^{\gamma_1}}{s} \left(C_{15} \frac{(\ln p)^2}{p^{\gamma_1}} \right)^s \\ &\leq 2^{2p^{\gamma_1}} C_{15}^{p^{\gamma_1} (1 - \frac{1}{\ln p})} \left(\frac{(\ln p)^2}{p^{\gamma_1}} \right)^{p^{\gamma_1} (1 - \frac{1}{\ln p})} \leq C_{16}^{p^{\gamma_1}} e^{-C_{17} p^{\gamma_1} \ln p} \end{aligned}$$

и

$$\sum_{s \geq p^{\gamma_1} (1 - \frac{1}{\ln p})} P_s \leq C_{16}^{p^{\gamma_1}} e^{-C_{18} p^{\gamma_1} \ln p}.$$

Лемма доказана.

Из лемм 3.1 и 3.2 вытекает также оценка вероятности того, что точка n нормальна. Если N – число нормальных точек, тогда легко показать, что

$$P \left\{ N \geq \frac{p^{1-\gamma_1}}{\ln \ln \ln p} \right\} \leq C_{16}^{p^{\gamma_1}} \exp \left\{ -C_{18} p^{\gamma_1} (\ln p) \frac{p^{1-\gamma_1}}{\ln \ln \ln p} \right\} \leq C_{16}^p \exp \left\{ -C_{19} p \frac{\ln p}{\ln \ln \ln p} \right\}.$$

С другой стороны, можно показать, что в случае В.2 число N должно быть большим. В самом деле, в этом случае свойство 2) в определении нормального числа выполняется для числа точек, большего, чем $\frac{p}{2} - \frac{2p}{\ln \ln \ln p}$. Итак, число точек n , для которых 2) и 3) справедливы, больше, чем $\frac{p}{2} - \frac{2p^{1-\gamma_1}}{\ln \ln \ln p}$. Остается рассмотреть свойство 4). Вероятность $P \{ \theta(n+1) + \dots + \theta(n_1) \leq p^{\gamma_1 + \gamma_2} \}$ может быть оценена с помощью обычных методов оценок вероятности больших отклонений. Если N велико, мы используем оценки из лемм 3.1 и 3.2. Если N мало, тогда вероятность такого события мала, и мы получаем окончательную оценку.

§ 4. Оценки коротких диаграмм

В этом параграфе мы рассматриваем другой тип диаграмм, отличный от рассмотренного в § 3. Зафиксируем постоянную d_1 , $0 < d_1 < \frac{1}{2}$. Здесь и далее в этом параграфе абсолютные постоянные, которые могут зависеть от α , будут обозначаться буквами d , D с некоторыми индексами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Диаграмма $\mathcal{D}(p+1 \subset \Sigma(p+1))$ называется *короткой*, если для всех $\Delta^{(j_1, \dots, j_m)}$ таких, что $|\Delta^{(j_1, \dots, j_m)}| > d_2$, справедливы неравенства

$$d_1 \leq \frac{p(j_1, \dots, j_m, j)}{p(j_1, \dots, j_m)} \leq 1 - d_1, \quad (28)$$

где $j = 1$ или 2 , а d_2 зависит только от d_1 .

Неравенства (28) могут не выполняться, если $|\Delta^{(j_1, \dots, j_m)}|$ достаточно мало. Например, если $d_1 = \frac{2}{5}$ и $|\Delta^{(j_1, \dots, j_m)}| = 3$, тогда (28) не выполнено. Для $|\Delta^{(j_1, \dots, j_m)}| \leq d_2$ мы допускаем все возможные диаграммы, начинающиеся с $\Delta^{(j_1, \dots, j_m)}$. Легко видеть, что для коротких диаграмм $m \leq d_3 \ln p$. Именно по этой причине диаграммы, удовлетворяющие (28), называются короткими. Если $\bar{m}$ – максимальное значение m для диаграммы $\mathcal{D}(p+1)$, то $\bar{m} \leq d_3 \ln p$ и если $\Delta^{(j_1, \dots, j_m)}$ – финальный элемент, то $\bar{m} - m_1 \leq d_4$.

Легко показать по индукции, что $\prod_{i_1, \dots, i_m} p(\Delta^{(i_1, \dots, i_m)}) \leq D_0^{p+1}$, где D_0 зависит от d_1 . Как мы видели в §3, это неравенство нарушается для простых диаграмм, для которых последнее произведение растёт как $p!$.

4.1. Интегрирование на низших уровнях. Возьмем короткую диаграмму $\mathcal{D}(p+1)$ и рассмотрим все $\Delta^{(j_1, \dots, j_m)}$, $p(j_1, \dots, j_m) = 2$. Существует такое d_5 , что интегрирование по всем низшим уровням, меньшим d_5 , начинающимся с таких $\Delta^{(j_1, \dots, j_m)}$, будет включать все финальные элементы.

Если $p(j_1, \dots, j_m) = 2$, то оба $\Delta^{(j_1, \dots, j_m, j)}$, $j = 1, 2$, являются финальными. Интеграл в этой диаграмме, соответствующей $\Delta^{(j_1, \dots, j_m)}$, задается формулой (4) и имеет вид

$$\begin{aligned} & I_m(\tilde{k}(j_1, \dots, j_m), s(j_1, \dots, j_m)) \\ &= i \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left\langle \tilde{k}(j_1, \dots, j_m), c\left(\frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_m, 1)}{\sqrt{s(j_1, \dots, j_m)}}, 0\right) \right\rangle P_{\tilde{k}(j_1, \dots, j_m)} c\left(\frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_m, 2)}{\sqrt{s(j_1, \dots, j_m)}}, 0\right)}{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_m, 1)|^\alpha |\tilde{k}(j_1, \dots, j_m, 2)|^\alpha} \\ & \quad \times \exp\left\{-|\tilde{k}(j_1, \dots, j_m, 1)|^2 - |\tilde{k}(j_1, \dots, j_m, 2)|^2\right\} d\tilde{k}(j_1, \dots, j_m, 2), \end{aligned}$$

где $\tilde{k}(j_1, \dots, j_m, 1) = \tilde{k}(j_1, \dots, j_m) - \tilde{k}(j_1, \dots, j_m, 2)$. Сделаем замену переменных $\tilde{k}(j_1, \dots, j_m, j) = \frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_m, j)}{\sqrt{s(j_1, \dots, j_m, j)}}$ и положим $\tilde{k}(j_1, \dots, j_m) = \frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_m)}{\sqrt{s(j_1, \dots, j_m)}}$.

С помощью (13) получим, что

$$\begin{aligned} & I_m(\tilde{k}(j_1, \dots, j_m), s(j_1, \dots, j_m)) \\ &= s(j_1, \dots, j_m)^\varepsilon e^{-\frac{1}{2}|\tilde{k}(j_1, \dots, j_m)|^2} i \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\langle \tilde{k}(j_1, \dots, j_m), c(\tilde{k}(j_1, \dots, j_m, 1), 0) \rangle}{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_m, 1)|^\alpha |\tilde{k}(j_1, \dots, j_m, 2)|^\alpha} \\ & \quad \times P_{\tilde{k}(j_1, \dots, j_m)} c(\tilde{k}(j_1, \dots, j_m, 2), 0) \\ & \quad \times \exp\left\{-2s(j_1, \dots, j_m) \left|\tilde{k}(j_1, \dots, j_m, 2) - \frac{1}{2}\tilde{k}(j_1, \dots, j_m)\right|^2\right\} d\tilde{k}(j_1, \dots, j_m, 2). \end{aligned}$$

Из основного предположения следует, что можно интегрировать только по ограниченной области $|\tilde{k}(j_1, \dots, j_m, 2)| \leq R$. По этой же причине $|\tilde{k}(j_1, \dots, j_m, 1)| \leq R$. Поэтому I_m равен нулю для $|\tilde{k}(j_1, \dots, j_m)| > 2R$. Если $|\tilde{k}(j_1, \dots, j_m)| \leq 2R$, т.е. $|\tilde{k}(j_1, \dots, j_m)| \leq 2R\sqrt{s(j_1, \dots, j_m)}$, мы имеем тривиальную оценку:

$$\begin{aligned} & |I_m(\tilde{k}(j_1, \dots, j_m), s(j_1, \dots, j_m))| \\ & \leq D_2 s(j_1, \dots, j_m)^{-\varepsilon} \exp\left\{-\frac{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_m)|^2}{2s(j_1, \dots, j_m)}\right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

На следующем шаге мы производим интегрирование, включающее $\Delta^{(j_1, \dots, j_m)}$. Рассмотрим два случая.

Случай А₁: $\Delta^{(j_1, \dots, j_{m-1})} = \Delta^{(j_1, \dots, j_{m-1}, 1)} \cup \Delta^{(j_1, \dots, j_{m-1}, 2)}$ и $p(j_1, \dots, j_{m-1}, 1) = p(j_1, \dots, j_{m-1}, 2) = 2$. Интеграл в этой диаграмме, соответствующий $\Delta^{(j_1, \dots, j_{m-1})}$, имеет вид (см. (10))

$$\begin{aligned}
& I_m(\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}), s(j_1, \dots, j_{m-1})) \\
&= \int_0^1 \tilde{s}^\varepsilon(j_1, \dots, j_{m-1}, 1) d\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1}, 1) \\
&\quad \times \int_0^1 \tilde{s}^\varepsilon(j_1, \dots, j_{m-1}, 2) d\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2) \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^3} \left\langle \tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}), \right. \\
&\quad \quad \left. I_m\left(\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, 1) \sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1}, 1)}, s(j_1, \dots, j_{m-1}, 1)\right) \right\rangle \\
&\quad \times P_{\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1})} I_m\left(\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2) \sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2)}, s(j_1, \dots, j_{m-1}, 2)\right) \\
&\quad \times \exp \left\{ -(1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1}, 1)) |\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, 1)|^2 \right. \\
&\quad \left. + (1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2)) |\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2)|^2 \right\} d\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2).
\end{aligned}$$

Функции I_m уже оценены (см. (29)). В частности, было показано, что они обращаются в нуль при $|\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, j)| \sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1}, j)} > 2R\sqrt{s(j_1, \dots, j_{m-1}, j)}$ или $|\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, j)| > 2R\sqrt{s(j_1, \dots, j_{m-1}, j)}$. Если

$$|\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, j)| \leq 2R\sqrt{s(j_1, \dots, j_{m-1}, j)},$$

оценка дается (29). Следовательно, I_{m-1} может быть оценен следующим образом (см. также (11)):

$$\begin{aligned}
& |I_{m-1}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}), s(j_1, \dots, j_{m-1}))| \\
& \leq D_3 s^{2-2\varepsilon}(j_1, \dots, j_{m-1}) \exp \left\{ -\frac{1}{4} |\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1})|^2 \right\}. \quad (30)
\end{aligned}$$

Случай А₂: $\Delta^{(j_1, \dots, j_{m-1})} = \Delta^{(j_1, \dots, j_{m-1}, 1)} \cup \Delta^{(j_1, \dots, j_{m-1}, 2)}$ и один элемент из $\Delta^{(j_1, \dots, j_{m-1}, j)}$ является финальным, в то время как другой состоит из двух точек. Предположим для определенности, что $p(j_1, \dots, j_{m-1}, 1) = 1, p(j_1, \dots, j_{m-1}, 2) = 2$.

В этом случае мы должны рассмотреть интеграл (см. (9))

$$\begin{aligned}
 & I_{m-1}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}), s(j_1, \dots, j_{m-1})) \\
 &= i \int_0^1 \tilde{s}^\varepsilon(j_1, \dots, j_{m-1}, 2) d\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2) \\
 &\quad \times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left\langle \tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}), c\left(\frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, 1)}{\sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1})}}, 0\right) \right\rangle}{\left| \frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, 1)}{\sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1})}} \right|^\alpha s^{\frac{\alpha}{2}}(j_1, \dots, j_{m-1})} \\
 &\quad \times P_{\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1})} I_m(\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2) \sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2)}, s(j_1, \dots, j_{m-1}, 2)) \\
 &\quad \times \exp\left\{ -|\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, 1)|^2 (1 - \tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2)) \right. \\
 &\quad \left. - |\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2)|^2 \right\} d\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2).
 \end{aligned}$$

Из (29) следует, что $I_m(\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2) \sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2)}, s(j_1, \dots, j_{m-1}, 2))$ равен нулю, если $|\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2)| > 2R\sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1})}$.

При $|\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2)| \leq 2R\sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1})}$

$$\begin{aligned}
 & |I_m(\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2) \sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2)}, s(j_1, \dots, j_{m-1}, 2))| \\
 &\leq D_2 s^{-\varepsilon}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2) \exp\left\{ -\frac{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, 2)|^2}{2s(j_1, \dots, j_{m-1})} \right\}
 \end{aligned}$$

(см. (29)).

Также из основного предположения вытекает, что

$$c\left(\frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, 1)}{\sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1})}}, 0\right) = 0,$$

если $|\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}, 1)| > 2R\sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1})}$. Поэтому

$$I_{m-1}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}), s(j_1, \dots, j_{m-1})) = 0$$

при $|\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1})| > 3R\sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1})}$.

При $|\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1})| \leq 3R\sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m-1})}$ прямые оценки и (11) дают

$$\begin{aligned}
 & |I_{m-1}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1}), s(j_1, \dots, j_{m-1}))| \\
 &\leq D_4 s^{1-\frac{3}{2}\varepsilon}(j_1, \dots, j_{m-1}) \exp\left\{ -\frac{1}{3} \frac{|\tilde{k}(j_1, \dots, j_{m-1})|^2}{s(j_1, \dots, j_{m-1})} \right\}. \quad (31)
 \end{aligned}$$

После аналогичных интегрирований по всем d_3 низшим уровням все финальные элементы будут включены. Каждый финальный элемент $\Delta^{(j_1, \dots, j_{m_1})}$ дает множитель $s^{-\frac{\varepsilon}{2}}(j_1, \dots, j_{m_1})$. Таким образом,

$$\prod^{(f)} s^{-\frac{\varepsilon}{2}}(j_1, \dots, j_{m_1}) = \prod(\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m_1}))^{-\frac{p(j_1, \dots, j_{m_1})\varepsilon}{2}},$$

где последнее произведение берется по всем подмножествам $\Delta^{(j_1, \dots, j_m)}$ нашей диаграммы. Напомним, что в интеграле по всем переменным $\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m_1})$ имеется множитель $\prod(\tilde{s}(j_1, \dots, j_{m_1}))^{\frac{p(j_1, \dots, j_{m_1})\varepsilon}{2}}$. Таким образом, мы видим, что эти два произведения взаимно уничтожают друг друга. Остается произведение

$$\prod(s(j_1, \dots, j_m))^{\nu(j_1, \dots, j_m)},$$

где $\nu(j_1, \dots, j_m)$ — число элементов $\Delta^{(j_1, \dots, j_m)}$, $p(\Delta^{(j_1, \dots, j_m)}) = 2$ и $\Delta^{(j_1, \dots, j_m)} \subset \Delta^{(j_1, \dots, j_{m_1})}$. Легко показать, что $d_6 p(j_1, \dots, j_{m_1}) \leq \nu(j_1, \dots, j_{m_1}) \leq d_7 p(j_1, \dots, j_{m_1})$ с $d_6, d_7 > 0$, зависящими от d_1, d_2 , определяющих класс рассматриваемых коротких диаграмм. Следовательно,

$$\prod(s(j_1, \dots, j_m))^{\nu(j_1, \dots, j_m)} = \prod'(\tilde{s}(j_1, \dots, j_m))^{\tilde{\nu}(j_1, \dots, j_m)},$$

где $\prod'$ берется по всем $\Delta^{(j_1, \dots, j_n)} \supset \Delta^{(j_1, \dots, j_{m_1})}$, а постоянные d_6, d_7 могут быть выбраны так, что $d_6 p(j_1, \dots, j_n) \leq \tilde{\nu}(j_1, \dots, j_n) \leq d_7 p(j_1, \dots, j_n)$.

“Статистическая сумма”

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathcal{D}(p+1)) &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod'(\tilde{s}(j_1, \dots, j_m))^{\tilde{\nu}(j_1, \dots, j_m)} d\tilde{s}(j_1, \dots, j_m) \\ &= \prod' \frac{1}{\tilde{\nu}(j_1, \dots, j_m) + 1} \end{aligned}$$

убывает экспоненциально в отличие от случая простых диаграмм. Как и прежде, мы полагаем $\tilde{s}(j_1, \dots, j_m) = 1 - \frac{\theta(j_1, \dots, j_m)}{p(j_1, \dots, j_m)}$, где $\theta(j_1, \dots, j_m)$ имеет распределение, близкое к экспоненциальному при больших $\Delta^{(j_1, \dots, j_m)}$, т.е. когда m мало. Рассмотрим $\Delta^{(j_1, \dots, j_{m_1})} \supset \Delta^{(j_1, \dots, j_m)}$. Так как $p(j_1, \dots, j_{m_1})$ растет экспоненциально, когда m_1 убывает, произведение $s(j_1, \dots, j_m)$ принимает типичные значения $O(1)$, снова отличающиеся от случая простых диаграмм, для которых такие произведения малы.

4.2. Оценки коротких диаграмм с помощью асимптотического метода Лапласа. Некоторые связи с теорией ренормгруппы. Как и прежде, интегрирование по $\tilde{k}$, соответствующим данной диаграмме, производится по индукции. Мы фиксируем все $\tilde{s}(j_1, \dots, j_n)$, или, что то же самое, все $\theta(j_1, \dots, j_n)$, и интегрируем по всем $\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)$, начинающимся с низших этажей диаграммы. Повторим, что в типичных случаях, когда все $\theta(j_1, \dots, j_n)$ принимают значения порядка $O(1)$, значения $s(j_1, \dots, j_n)$ также имеют порядок $O(1)$, в противоположность случаю простых диаграмм. В последующих формулах мы не указываем на зависимость от $\tilde{s}$, если это не необходимо. Предположим, что в результате предыдущих интегрирований мы получили некоторые функции $f_{j_1, \dots, j_n, j}(k(j_1, \dots, j_n, j))$, $j = 1, 2$. На следующем шаге имеем

$$\begin{aligned} &f_{j_1, \dots, j_n}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)) \\ &= i \int_{\mathbb{R}^3} \langle \tilde{k}(j_1, \dots, j_n), f_{j_1, \dots, j_n, 1}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1) \sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 1)}) \rangle \\ &\quad \times P_{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)} f_{j_1, \dots, j_n, 2}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2) \sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_n, 2)}) \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{\theta(j_1, \dots, j_n, 1)}{p(j_1, \dots, j_n, 1)} |\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1)|^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\theta(j_1, \dots, j_n, 2)}{p(j_1, \dots, j_n, 2)} |\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)|^2 \right\} d\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2). \end{aligned} \quad (32)$$

Последняя экспонента может быть переписана в следующем виде:

$$\exp\left\{-p(j_1, \dots, j_n) [\theta(j_1, \dots, j_n, 1) \pi(j_1, \dots, j_n, 1) |x_1|^2 + \theta(j_1, \dots, j_n, 2) \pi(j_1, \dots, j_n, 2) |x_2|^2] \right\},$$

где

$$x_j = \frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, j)}{p(j_1, \dots, j_n, j)}, \quad j = 1, 2, \quad \pi(j_1, \dots, j_n, j) = \frac{p(j_1, \dots, j_n, j)}{p(j_1, \dots, j_n)}.$$

Так как мы имеем дело с короткими диаграммами, коэффициенты π ограничены снизу.

Естественно предположить, что функции $f_{j_1, \dots, j_n, j}$ могут быть записаны в виде

$$f_{j_1, \dots, j_n, j} = \varphi_{j_1, \dots, j_n, j}(x) \exp\left\{-p(j_1, \dots, j_n, j) m_{j_1, \dots, j_n, j}(x)\right\},$$

где функция $m_{j_1, \dots, j_n, j}$ является строго выпуклой C^2 -функцией, функция $\varphi_{j_1, \dots, j_n, j}$ принимает значения порядка $O(1)$, $x = \tilde{k}(j_1, \dots, j_n, j)$. Мы выведем рекуррентные уравнения для m . Переход от $m_{j_1, \dots, j_n, j}$ к $m_{j_1, \dots, j_n}$ подобен уравнениям теории ре-нормгруппы.

Положим

$$\begin{aligned} M_{j_1, \dots, j_n}(x^{(1)}, x^{(2)}) &= \pi(j_1, \dots, j_n, 1) m_{j_1, \dots, j_n, 1}(x^{(1)}, x^{(2)}) \sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_n, j)} \\ &\quad + \pi(j_1, \dots, j_n, 2) m_{j_1, \dots, j_n, 2}(x^{(1)}, x^{(2)}) \sqrt{\tilde{s}(j_1, \dots, j_n, j)} \\ &\quad + \theta(j_1, \dots, j_n, 1) \pi(j_1, \dots, j_n, 1) |x^{(1)}|^2 \\ &\quad + \theta(j_1, \dots, j_n, 2) \pi(j_1, \dots, j_n, 2) |x^{(2)}|^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Пусть $m_{j_1, \dots, j_n}^{(1)}(x) = \min_{x^{(1)}+x^{(2)}=x} M_{j_1, \dots, j_n}(x^{(1)}, x^{(2)})$. Функцию $m_{j_1, \dots, j_n}^{(1)}(x)$ иногда называют дискретной сверткой. Так как все функции в выражении для M являются выпуклыми, значения $x^{(1)}, x^{(2)}$ в точке минимума определяются единственным образом.

Мы докажем, что функция $m_{j_1, \dots, j_n}^{(1)}$ строго выпукла.

Рассмотрим модифицированную задачу, отличающуюся от нашей обозначениями. Пусть заданы строго выпуклые C^2 -функции $M^{(1)}(x), M^{(2)}(x), x \in \mathbb{R}^3$, и

$$M(x) = \min_{x'+x''=x} (M^{(1)}(x') + M^{(2)}(x'')).$$

Так как $M^{(1)}, M^{(2)}$ выпуклы, то для любых x значения x', x'' , на которых достигается минимум, определены однозначно. Обозначим их $\bar{x}', \bar{x}''$.

ЛЕММА 4.1. *Функция $M(x)$ строго выпукла и*

$$\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x_i \partial x_j} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial^2 M^{(1)}(x')}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x'=\bar{x}'} \right)^{-1} + \left(\frac{\partial^2 M^{(2)}(x'')}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x''=\bar{x}''} \right)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial x'_i}(M^{(1)}(x') + M^{(2)}(x - x')) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

или

$$\frac{\partial M^{(1)}(\bar{x}')}{\partial x'_i} = \frac{\partial M^{(2)}(\bar{x}'')}{\partial x''_i}. \quad (34)$$

Дифференцируя относительно x'_{i_2} , мы получаем, что

$$\frac{\partial^2 M^{(1)}(\bar{x}')}{\partial x'_{i_1} \partial x'_{i_2}} = \sum \frac{\partial^2 M^{(2)}(\bar{x}'')}{\partial x''_{i_1} \partial x''_{i_3}} \frac{\partial x''_{i_3}}{\partial x''_{i_2}},$$

или, в матричных обозначениях,

$$\|\partial^2 M^{(1)}(\bar{x}')\| = \|\partial^2 M^{(2)}(\bar{x}'')\| \left\| \frac{\partial x''_{i_3}}{\partial x''_{i_2}} \right\|.$$

Так как $\bar{x}' + \bar{x}'' = x$ и $\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial x''_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$, то из (34)

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x_j} &= \sum \left(\frac{\partial M^{(1)}(\bar{x}')}{\partial x'_{i_1}} \frac{\partial \bar{x}'_{i_1}}{\partial x_j} + \frac{\partial M^{(2)}(\bar{x}'')}{\partial x''_{i_1}} \frac{\partial \bar{x}''_{i_1}}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{\partial M^{(1)}(\bar{x}')}{\partial x'_j} = \frac{\partial M^{(2)}(\bar{x}'')}{\partial x''_j}. \end{aligned}$$

После следующего дифференцирования получим

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} = \sum \frac{\partial^2 M^{(1)}(\bar{x}')}{\partial x'_{j_1} \partial x'_{j_3}} \frac{\partial x'_{j_3}}{\partial x_{j_2}} = \sum \frac{\partial^2 M^{(2)}(\bar{x}'')}{\partial x''_{j_1} \partial x''_{j_3}} \frac{\partial x''_{j_3}}{\partial x_{j_2}}.$$

В матричных обозначениях:

$$\partial^2 M = \partial^2 M^{(1)} \frac{\partial x'}{\partial x} = \partial^2 M^{(2)} \frac{\partial x''}{\partial x}.$$

Это дает

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = (\partial^2 M^{(1)})^{-1} \partial^2 M^{(2)} \frac{\partial x''}{\partial x} = (\partial^2 M^{(1)})^{-1} \partial^2 M^{(2)} \left(\mathbb{I} - \frac{\partial x'}{\partial x} \right),$$

где $\mathbb{I}$ – единичная матрица. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial x} &= (\mathbb{I} + (\partial^2 M^{(1)})^{-1} \partial^2 M^{(2)})^{-1} (\partial^2 M^{(1)})^{-1} \partial^2 M^{(2)} \\ &= \mathbb{I} - (\mathbb{I} + (\partial^2 M^{(1)})^{-1} \partial^2 M^{(2)})^{-1} \end{aligned}$$

и

$$\left(\mathbb{I} - \frac{\partial x'}{\partial x}\right)^{-1} = ((\partial^2 M^{(2)})^{-1} + (\partial^2 M^{(1)})^{-1})\partial M^{(2)}.$$

С другой стороны,

$$(\partial M)^{-1} = \left(\mathbb{I} - \frac{\partial x'}{\partial x}\right)^{-1} \partial^2 M^{(2)} = (\partial^2 M^{(1)})^{-1} + (\partial^2 M^{(2)})^{-1}.$$

Лемма доказана.

Эта лемма показывает, что в главном порядке величина короткой диаграммы ведет себя как $\exp\{pm_{j_1, \dots, j_n}(x)\}$, где $m_{j_1, \dots, j_n}$ — строго выпуклая функция.

Обсудим формулы для предэкспоненциального множителя. Из леммы вытекает, что основной вклад в интеграл (32) вносит $O(1/\sqrt{p(j_1, \dots, j_n)})$ — окрестность точки $\bar{y} = \tilde{k}(j_1, \dots, j_n)/\sqrt{p(j_1, \dots, j_n)}$.

Возьмем монотонно возрастающую функцию $\chi(x)$ класса C^∞ и такую, что $\chi(x) = 0$ при $x < \ln \frac{1}{2}$, $\chi(x) = 1$ при $x > 1$. Мы должны оценить

$$\begin{aligned} I_n = & \exp\left\{-p(j_1, \dots, j_n)m_{j_1, \dots, j_n}^{(1)}\left(\frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)}{p(j_1, \dots, j_n)}\right)\right\} \\ & \times \int_{\mathbb{R}^3} \langle \tilde{k}(j_1, \dots, j_n), \phi_{j_1, \dots, j_n, 1}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1)) \rangle \\ & \times P_{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)} \phi_{j_1, \dots, j_n, 2}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)) \\ & \times \exp\left\{-p(j_1, \dots, j_n)\left[\pi_{j_1, \dots, j_n, 1}m_{j_1, \dots, j_n, 1}\left(\frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 1)}{p(j_1, \dots, j_n, 1)}\right)\right.\right. \\ & \quad \left.\left.+ \pi_{j_1, \dots, j_n, 2}m_{j_1, \dots, j_n, 2}\left(\frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2)}{p(j_1, \dots, j_n, 2)}\right)\right.\right. \\ & \quad \left.\left.- m_{j_1, \dots, j_n}^{(1)}\left(\frac{\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)}{p(j_1, \dots, j_n)}\right)\right]\right\} d\tilde{k}(j_1, \dots, j_n, 2). \end{aligned}$$

Обозначим последний интеграл через $\psi_{j_1, \dots, j_n}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n))$ и напомним

$$\psi_{j_1, \dots, j_n}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)) = \frac{\psi_{j_1, \dots, j_n}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n)) \exp\{\chi \ln |\psi_{j_1, \dots, j_n}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n))|\}}{\exp\{\chi(\ln |\psi_{j_1, \dots, j_n}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n))|)\}}.$$

Мы добавляем $\chi(\ln |\psi_{j_1, \dots, j_n}(\tilde{k}(j_1, \dots, j_n))|)$ к $m_{j_1, \dots, j_n}^{(1)}$ и пишем

$$\begin{aligned} m_{j_1, \dots, j_n} &= m_{j_1, \dots, j_n}^{(1)} + \ln p(j_1, \dots, j_n) + \frac{1}{p(j_1, \dots, j_n)} (\ln(2\pi p(j_1, \dots, j_n)))^{\frac{3}{2}} \\ & \quad + \frac{1}{p(j_1, \dots, j_n)} \sqrt{\ln \det \|\partial^2 m_{j_1, \dots, j_n}^{(1)}\|}, \\ \phi_{j_1, \dots, j_n} &= \frac{\psi_{j_1, \dots, j_n}}{e^{\chi \ln |\psi_{j_1, \dots, j_n}|}}. \end{aligned}$$

Как уже указывалось, эти рекуррентные соотношения можно рассматривать как аналоги уравнений теории ренормгруппы. Они показывают, что короткие диаграммы убывают экспоненциально.

§ 5. Заключительные замечания

По-видимому, экспоненциальное убывание может быть показано для более широкого класса диаграмм.

Основной ряд для разложения решения может быть использован для определения решений СНС при комплексном времени. Однако это не следует из представленных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. Kato. Strong L^p -solutions of the Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions // Math. Z. 1984. V. 187. № 4. P. 471–480.
- [2] Ya. G. Sinai. On the local and global existence and uniqueness of solutions of the 3D Navier–Stokes system on $\mathbb{R}^3$ // Perspectives in Analysis. Conference in honor of Lennart Carleson's 75th birthday / ed. M. Benedicks, P. Jones, and S. Smirnov. Berlin: Springer-Verlag (to appear).
- [3] Ya. G. Sinai. Power series for the solutions of the 3D Navier–Stokes system on $\mathbb{R}^3$ // J. Statist. Phys. (to appear).
- [4] Y. Le Jan, A. S. Sznitman. Stochastic cascades and 3-dimensional Navier–Stokes equations // Probab. Theory Related Fields. 1997. V. 109. № 3. P. 343–366.
- [5] M. Cannone, F. Planchon. On the regularity of the bilinear term of solutions to the incompressible Navier–Stokes equations // Rev. Mat. Iberoamericana. 2000. V. 16. № 1. P. 1–16.

Princeton University, Princeton, NJ, USA,
Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия

Поступила в редакцию
18.08.2005