Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, Бирационально жесткие многообразия Фано, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 5, 71–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1643>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 11:03:57

УДК 512.76

БИРАЦИОНАЛЬНО ЖЕСТКИЕ МНОГООБРАЗИЯ ФАНО

И. А. ЧЕЛЬЦОВ

В 1971 г. В. А. Исковских и Ю. И. Манин доказали бирациональную сверхжесткость и, в частности, нерациональность неособой трехмерной квартики, откуда сразу следовал контрпример к трехмерной проблеме Люрота. С тех пор бирациональная жесткость и сверхжесткость были доказаны для широкого класса многообразий, центральное место среди которых занимают многообразия Фано. Настоящая работа является обзором по теории бирационально жестких многообразий Фано.

Библиография: 182 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	72
§0.1. Нерациональность	72
§0.2. Максимальная особенность	74
§0.3. Бирациональная жесткость	82
Часть 1. Предварительные сведения	85
§1.1. Программа минимальных моделей	85
§1.2. Лог-программа минимальных моделей	88
§1.3. Подвижные лог-пары	90
§1.4. Неравенства Нётера–Фано–Исковских	96
§1.5. Кубические поверхности	98
§1.6. Программа Саркисова	99
§1.7. Лог-присоединение и связность	108
Часть 2. Трехмерные многообразия	117
§2.1. Трехмерная квартика	117
§2.2. Двойное пространство	122
§2.3. Двойное накрытие квадрики	130
§2.4. Пересечение квадрики и кубики	132
§2.5. Взвешенные гиперповерхности	134
Часть 3. Многомерные многообразия	138
§3.1. Гиперповерхности	138
§3.2. Полные пересечения	142
§3.3. Двойные пространства	144
§3.4. Тройные пространства	149
§3.5. Циклические накрытия	152
Список литературы	154

Введение

§ 0.1. Нерациональность

Проблема рациональности алгебраических многообразий¹ является одной из наиболее глубоких и интересных проблем алгебраической геометрии. Глобальные голоморфные дифференциальные формы являются естественными бирациональными инвариантами неособых многообразий, которые полностью решают проблему рациональности алгебраических кривых и поверхностей (см. [182], [160], [91]). Однако уже в трехмерном случае существуют нерациональные многообразия, во многом очень близкие к рациональным, и имеющихся дискретных инвариантов не хватает для определения рациональности. В частности, следующий хорошо известный результат, анонсированный еще в [61], получен в работе [94].

ТЕОРЕМА 0.1.1. *Пусть V – неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени 4. Тогда группы бирациональных автоморфизмов $\text{Bir}(V)$ и бирегулярных автоморфизмов $\text{Aut}(V)$ совпадают.*

Легко видеть, что из теоремы 0.1.1 следует нерациональность любой неособой трехмерной кватрики в $\mathbb{P}^4$. Действительно, в обозначениях теоремы 0.1.1 линейная система $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)|_V|$ инвариантна относительно действия группы $\text{Aut}(V)$, поскольку дивизор $-K_V$ линейно эквивалентен гиперплоскому сечению кватрики V . Следовательно, группа бирегулярных автоморфизмов кватрики V состоит из проективных автоморфизмов, откуда следует ее конечность (см. [127]). Таким образом, группа бирациональных автоморфизмов неособой трехмерной кватрики V обязательно конечна, откуда следует, что кватрика V нерациональна, поскольку группа $\text{Bir}(\mathbb{P}^3)$ бесконечна. Позднее технику работы [94] стало принято называть *методом максимальных особенностей* (см. § 0.2).

Из нерациональности неособой трехмерной кватрики сразу следовало отрицательное решение проблемы Люрота в размерности 3. Напомним, что проблема Люрота в размерности n состоит в следующем: верно ли, что все подполя поля $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$, содержащие $\mathbb{C}$, исчерпываются полями вида $\mathbb{C}(f_1, \dots, f_k)$, где $f_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ – некоторая рациональная функция? Таким образом, существуют нерациональные, но унирациональные² трехмерные многообразия. Например, кватрика

$$x_0^4 + x_0x_4^3 + x_1^4 - 6x_1^2x_2^2 + x_2^4 + x_3^4 + x_3^3x_4 = 0 \subset \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]) \cong \mathbb{P}^4$$

унирациональна (см. [87], [123]), неособа, и, следовательно, она нерациональна по теореме 0.1.1. Отметим, что из критерия рациональности (см. [182]) сразу следует, что

¹Все рассматриваемые многообразия по умолчанию считаются проективными, нормальными и определенными над полем комплексных чисел. Многообразие V называется рациональным, если поле его рациональных функций изоморфно полю $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$, что эквивалентно существованию бирационального отображения $\rho: \mathbb{P}^n \dashrightarrow V$. Под дивизором мы везде будем подразумевать $\mathbb{Q}$ -дивизор, т.е. формальную конечную линейную комбинацию подмногообразий коразмерности 1 с рациональными коэффициентами.

²Многообразие V называется унирациональным, если существует доминантное рациональное отображение $\rho: \mathbb{P}^n \dashrightarrow V$. Последнее эквивалентно тому, что поле рациональных функций многообразия V является подполем поля $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$. Некоторые нетривиальные конструкции унирациональности многомерных алгебраических многообразий содержатся в работах [87], [113], [123], [44].

унирациональная алгебраическая кривая или поверхность является рациональной. Гипотетическое существование контрпримеров к проблеме Люрота предполагалось давно (см. [61]), например, в учебнике [16], утверждается, что трехмерная проблема Люрота имеет отрицательное решение, и в качестве аргументации приводится ссылка на работы [57] и [60], которые не удовлетворяют современным требованиям строгости.

Метод доказательства теоремы 1.1 восходит к теореме об образующих двумерной группы Кремоны (см. [138] и теорему 1.6.15). Более того, техника доказательства теоремы об образующих двумерной группы Кремоны была использована ранее для изучения бирациональной геометрии рациональных поверхностей над алгебраически незамкнутыми полями, таким образом, общий подход к доказательству теоремы 0.1.1 был известен задолго до работы [95], однако его реализация в трехмерном случае натолкнулась на непредвиденные трудности, связанные с исключением бесконечно близких максимальных особенностей.

Простых способов доказательства нерациональности в нетривиальной ситуации, например, в классе многомерных рационально связанных многообразий³ или в классе унирациональных многообразий, не существует (см. [92]). Заметим, что неособая трехмерная квартика рационально связна (см. [114]), однако ее унирациональность известна только в нескольких конкретных случаях (см. [123]), а унирациональность общей трехмерной квартики неизвестна. Более того, неизвестно даже, существует ли рационально связанное неунирациональное многообразие. На данный момент известно лишь четыре способа доказательства нерациональности рационально связанных многообразий:

- метод максимальных особенностей (см. [87], [96], [152], [93]);
- использование компоненты Гриффитса промежуточного якобиана трехмерного многообразия в качестве бирационального инварианта (см. [41], [175]);
- использование подгруппы кручения группы трехмерных целочисленных когомологий в качестве бирационального инварианта (см. [3], [43], [140]);
- редукция в положительную характеристику с последующим применением метода вырождения для доказательства нерациональности многих рационально связанных многообразий (см. [109], [110], [112], [48], [38]), например, нерациональность общей гиперповерхности в $\mathbb{P}^n$ степени $d \geq \frac{2}{3}(n+2) \geq 4$ доказана в работе [109].

Каждый из имеющихся методов доказательства нерациональности рационально связанных многообразий имеет свои плюсы и минусы:

- метод промежуточного якобиана применим только к трехмерным многообразиям и, кроме единственного известного примера – двойного накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике (см. [179], [125]), только к многообразиям со структурой расслоения на коники (см. [175]);
- метод промежуточного якобиана в совокупности с методом вырождения часто оказывается единственно возможным способом доказательства нерациональности трехмерных многообразий (см. [4], [28], [31]), например, важные частные случаи критерия рациональности для расслоений на коники доказаны в [167] с помощью метода промежуточного якобиана (см. [90]);

³Многообразие V называется рационально связным, если через любые две точки на нем проходит рациональная кривая (см. [114], [115], [110]). Унирациональное многообразие рационально связно.

- существуют трехмерные нерациональные, но рационально связные многообразия, имеющие тривиальный промежуточный якобиан (см. [163]);
- во многих интересных случаях, например, для неособых полных пересечений, группа трехмерных целочисленных когомологий не имеет кручения и, следовательно, подход к доказательству нерациональности работы [3] неприменим;
- метод работы [109] применим в любой размерности, но его непосредственное использование, за исключением одного примера (см. [48]), дает нерациональность лишь очень общего многообразия в заданном семействе;
- метод максимальных особенностей применим во всех размерностях (см. [152]), но многообразия, к которым он может быть эффективно применен, в определенном смысле отстоят от рациональных многообразий слишком далеко, например, трудно предположить, что с помощью метода работы [94] можно построить пример гладкой деформации нерационального многообразия в рациональное (см. [175]).

Таким образом, метод максимальных особенностей – единственный известный способ доказать нерациональность конкретного рационально связного многообразия, чья размерность не меньше четырех.

§ 0.2. Максимальная особенность

Техника работы [94] впоследствии была применена к доказательству нерациональности многих многомерных рационально связных многообразий. Более того, на самом деле, конечность группы бирациональных автоморфизмов в доказательстве нерациональности неособой трехмерной квартики не существенна! А именно, в работе [94] было неявно доказано отсутствие небирегулярных бирациональных отображений между неособой трехмерной квартикой и очень широким классом трехмерных многообразий, таких как, например, проективное пространство, кубика в $\mathbb{P}^4$, полное пересечение квадрики и кубики в $\mathbb{P}^6$, произвольное расслоение на коники, расслоение на рациональные поверхности. Оказалось, что неособая трехмерная квартика обладает бирациональными свойствами, в определенном смысле очень напоминающими многообразия общего типа⁴ с обильным каноническим дивизором⁵.

Позднее стало очевидно, что неособая трехмерная квартика – не единственным трехмерным рационально связным многообразием, которое обладает подобными свойствами. Такие многообразия стали называться впоследствии *бirationально жесткими*. Понятие бирациональной жесткости очень легко формализовать. Однако прежде чем это делать, попробуем, несколько забежав вперед, описать геометрическую сущность бирациональной жесткости – так называемое *неравенство Нётера–Фано–Исковских*, или *существование максимальной особенности*. Рассмотрим два доста-

⁴Многообразие X называется многообразием общего типа, если $\dim(\phi_{|nK_X|}(X)) = \dim(X)$ при $n \gg 0$, многообразия общего типа не являются рационально связными (см. [115]).

⁵Дивизор D на многообразии X называется обильным, если nD является очень обильным дивизором для некоторого натурального $n > 0$, т.е. nD – гиперплоское сечение многообразия X . Свойство дивизора быть обильным означает геометрически, что дивизор имеет положительное пересечение со всеми кривыми на многообразии X . Из критерия обильности Клеймана (см. [108]) следует, что D обилён тогда и только тогда, когда он задает положительную функцию на замыкании конуса эффективных одномерных циклов многообразия X , так называемом конусе Мори $\overline{NE}(X)$ (см. [106]).

точно неформальных вопроса:

- когда бирациональное отображение является изоморфизмом?
- какой бирациональный инвариант может быть использован для доказательства бирациональной неэквивалентности двух многообразий в общей ситуации?

Алгебраические кривые и поверхности рассматривать не будем ввиду их маргинальности. По тем же причинам проигнорируем группу бирациональных автоморфизмов, условия типа “*пространства голоморфных форм имеют разную размерность*”, также отбросим ввиду того, что на рационально связных многообразиях никаких глобальных голоморфных форм не существует. Возможный ответ на первый вопрос состоит в следующем результате.

ТЕОРЕМА 0.2.1. Пусть $\rho: X \dashrightarrow Y$ – бирациональное отображение, где X и Y – неособые многообразия такие, что дивизоры K_X и K_Y обильны. Тогда ρ – изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группы $H^0(\mathcal{O}_X(nK_X))$ и $H^0(\mathcal{O}_Y(nK_Y))$ канонически изоморфны ввиду существования бирационального отображения ρ , которое индуцирует изоморфизм соответствующих градуированных алгебр, но из обильности дивизоров K_X и K_Y следует, что

$$X \cong \text{Proj} \left(\bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathcal{O}_X(nK_X)) \right) \cong \text{Proj} \left(\bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathcal{O}_Y(nK_Y)) \right) \cong Y.$$

Теперь приведем альтернативное доказательство, а точнее, более геометрическую версию приведенного доказательства. Для этого рассмотрим *домик Хиронаки* для бирационального отображения ρ (см. [76]), т.е. коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ g \swarrow & & \searrow f \\ X & \dashrightarrow_{\rho} & Y \end{array}$$

такую, что W неособо, а g и f – бирациональные морфизмы. Тогда

$$K_W \sim g^*(K_X) + \Sigma_X \sim f^*(K_Y) + \Sigma_Y, \quad (0.2.2)$$

где дивизоры Σ_X и Σ_Y являются исключительными дивизорами морфизмов g и f соответственно. Из неособости многообразий X и Y и элементарных свойств раздутий следует, что оба дивизора Σ_X и Σ_Y эффе́ктивны. В данном случае требуется только формула изменения канонического дивизора при раздутии неособого подмногообразия неособого многообразия, поскольку либо морфизм f , либо морфизм g всегда можно считать композицией раздутий неособых подмногообразий (см. [76]). Более того, коэффициенты при неприводимых исключительных компонентах дивизоров Σ_X и Σ_Y зависят только от соответствующих геометрических дискретных нормирований, которые всегда можно реализовать раздутиями неособых в общей точке подмногообразий, что позволяет явно вычислять коэффициенты дивизоров Σ_X и Σ_Y в терминах соответствующего графа раздутий (см. [152]).

Выберем достаточно большое натуральное число n . Из эффективности и исключительности дивизоров Σ_X и Σ_Y следует, что дивизоры $n\Sigma_X$ и $n\Sigma_Y$ являются базисными компонентами полной линейной системы

$$|nK_W| = |n(g^*(K_X) + \Sigma_X)| = |n(f^*(K_Y) + \Sigma_Y)|$$

при всех натуральных n . Таким образом, рациональные отображения, заданные полными линейными системами $|nK_W|$, $|g^*(nK_X)|$ и $|f^*(nK_Y)|$, совпадают, но при $n \gg 0$ полная линейная система $|g^*(nK_X)|$ задает морфизм g с точностью до подкрутки на бигекулярный автоморфизм многообразия X , поскольку K_X обилен, а линейная система $|f^*(nK_Y)|$ задает морфизм f с точностью до подкрутки на автоморфизм многообразия Y , поскольку канонический дивизор K_Y обилен. Значит, $\rho = f \circ g^{-1}$ — изоморфизм.

Отметим, что утверждение теоремы 0.2.1 есть не что иное, как единственность канонической модели⁶. Самым известным ответом на второй поставленный вопрос является так называемая *размерность Кодайры*. Напомним, что это такое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.2.3. Размерностью Кодайры $\kappa(X)$ неособого многообразия X называется максимальная размерность образа $\phi_{|nK_X|}(X)$ при $n \gg 0$, если хотя бы одна из полных линейных систем $|nK_X|$ непуста, в противном случае $\kappa(X) = -\infty$.

Размерность Кодайры является бирациональным инвариантом. Для доказательства этого хорошо известного результата достаточно лишь немного модифицировать доказательство теоремы 0.2.1. Отметим, что по определению размерность Кодайры многообразия, являющегося канонической моделью, совпадает с размерностью самого многообразия.

И теорема 0.2.1, и определение 0.2.3 имеют отношение в основном к многообразиям, чей канонический дивизор в определенном смысле *положителен*. Нас же интересуют многообразия, чей канонический дивизор *отрицателен*, например, рационально связные многообразия, или, еще более конкретно, многообразия, чей антиканонический дивизор является обильным. Многообразия с обильным антиканоническим дивизором называются многообразиями Фано. Все неособые трехмерные многообразия Фано были классифицированы в работах [85], [86], [135], [136], где были найдены 105 деформационных семейств неособых трехмерных многообразий Фано (см. [95]). Основным дискретным инвариантом неособого трехмерного многообразия Фано является его род — род неособой кривой, полученной как пересечение двух общих антиканонических дивизоров. В случае одномерной группы Пикара имеющиеся значения родов трехмерных неособых многообразий Фано в чем-то напоминают классификацию групп $\mathbb{Q}$ -рациональных точек, определенных над полем $\mathbb{Q}$ эллиптических кривых (см. [128]), возможно, что за этим феноменом стоят еще неизвестные связи между бирациональной геометрией и теорией чисел (см. [69]). Покажем на примере неособой трехмерной кватрики, как можно изменить теорему 0.2.1 и определение 0.2.3, чтобы в новом измененном виде они были нам полезны.

Пусть V — неособая трехмерная кватрика в $\mathbb{P}^4$. Допустим, что мы хотим доказать нерациональность многообразия V . Предположим, что кватрика V рациональна, а именно, существует бирациональное отображение $\rho: V \dashrightarrow \mathbb{P}^3$. Попробуем воспользоваться конструкцией теоремы 0.2.1 для доказательства того, что ρ — изоморфизм.

⁶Неособое многообразие X называется канонической моделью, если K_X обилен.

Последнее утверждение явно абсурдно, поэтому его доказательство будет означать нерациональность квартики V . Воспользуемся всеми обозначениями доказательства теоремы 0.2.1, учитывая при этом, что в новой ситуации роль многообразия X выполняет трехмерная квартика V , а роль многообразия Y – проективное пространство $\mathbb{P}^3$.

В доказательстве теоремы 0.2.1 существенным образом использовалось, что многообразия X и Y неособы, а дивизоры K_X и K_Y обильны. Причем неособость X и Y действительно использовалась, например, в самом существовании соотношения (0.2.2), но это как раз не очень важно, поскольку вместо неособости многообразий X и Y можно потребовать, чтобы дивизоры K_X и K_Y были дивизорами Картье, или чтобы некоторые кратности канонических дивизоров K_X и K_Y были дивизорами Картье. Последнее условие обычно принято называть $\mathbb{Q}$ -горештейновостью многообразий X и Y соответственно. Рациональную эквивалентность в соотношении (0.2.2) нужно также заменить на $\mathbb{Q}$ -рациональную эквивалентность⁷ или даже на численную эквивалентность (см. [106]). Реально существенное использование неособости многообразий X и Y в доказательстве теоремы 0.2.1 состоит в эффективности исключительных дивизоров Σ_X и Σ_Y . Как мы увидим в дальнейшем, это простое замечание очень важно.

Неособость многообразий V и $\mathbb{P}^3$ в наличии имеется, однако в данном случае канонические дивизоры K_V и $K_{\mathbb{P}^3}$ не обильны. Даже наоборот, антиканонические дивизоры

$$-K_V \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)|_V \quad \text{и} \quad -K_{\mathbb{P}^3} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)$$

очень обильны! Однако последнее как раз легко исправить, правда, потеряв при этом, в некотором смысле, уже имеющуюся неособость многообразий V и $\mathbb{P}^3$. Чтобы *отрицательный* дивизор сделать *положительным* нужно к нему добавить достаточно *положительный* дивизор. Например, возьмем произвольную гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}^3$ и вместо проективного пространства $\mathbb{P}^3$ рассмотрим *лог-пару* $(\mathbb{P}^3, 5H)$, а вместо дивизора $K_{\mathbb{P}^3}$ рассмотрим *лог-канонический* дивизор $K_{\mathbb{P}^3} + 5H$, который является обильным. Добавочный дивизор $5H$ в таких случаях называется *границей*. Теперь рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ g \swarrow & & \searrow f \\ V & \dashrightarrow \frac{\rho}{\rho} \dashrightarrow & \mathbb{P}^3, \end{array}$$

где многообразие W неособо, а $g: W \rightarrow V$ и $f: W \rightarrow \mathbb{P}^3$ – бирациональные морфизмы.

Попробуем дословно повторить ход рассуждений доказательства теоремы 0.2.1: нужно сравнить лог-канонический дивизор на многообразии W с подъемом лог-канонического дивизора $K_{\mathbb{P}^3} + 5H$ и с подъемом лог-канонического дивизора на квартике. Однако канонический дивизор потому и называется каноническим, что он определен на всех бирационально эквивалентных моделях каноническим образом, а лог-канонический дивизор уже нет!

Как определить соответствующую лог-пару на многообразии W и на квартике V – дело нашего выбора. Самый простой способ состоит в том, чтобы границами на W и V

⁷ Дивизоры D_1 и D_2 называются $\mathbb{Q}$ -рационально эквивалентными, если $nD_1 \sim nD_2$ для некоторого целого $n \neq 0$.

выбрать собственные образы гиперплоскости H , умноженные формально на 5, но может возникнуть следующая проблема: в принципе, бирациональное отображение ρ^{-1} может стягивать гиперплоскость H в точку или на кривую. В этом случае аналог соотношения (0.2.2) уже не будет отвечать необходимым требованиям, тем не менее, вместо гиперплоскости H можно взять гиперповерхность в $\mathbb{P}^3$ достаточно большой степени или выбрать H достаточно общим образом, что автоматически гарантирует ее нестягиваемость бирациональным отображением ρ^{-1} , но правильнее будет поступить по-другому.

Вместо выбранной гиперплоскости $H \subset \mathbb{P}^3$ рассмотрим в качестве границы полную линейную систему $\Lambda = |H|$ и рассмотрим *подвижную лог-пару* $(\mathbb{P}^3, \mu\Lambda)$, где μ – произвольное положительное рациональное число. В этом случае всегда можно рассмотреть собственные образы линейной системы Λ на многообразии W и на кватернике V , которые мы обозначим символами Λ_W и Λ_V соответственно.

Линейные системы Λ , Λ_W и Λ_V обладают следующими свойствами:

- линейные системы Λ , Λ_W и Λ_V не имеют неподвижных компонент;
- каждую из линейных систем Λ , Λ_W и Λ_V можно считать дивизором, заменяя линейную систему на достаточно общий дивизор, принадлежащий ей;
- формальные суммы $K_{\mathbb{P}^3} + \mu\Lambda$, $K_W + \mu\Lambda_W$ и $K_V + \mu\Lambda_V$ можно рассматривать как элементы групп $\text{Pic}(\mathbb{P}^3) \otimes \mathbb{Q}$, $\text{Pic}(W) \otimes \mathbb{Q}$ и $\text{Pic}(V) \otimes \mathbb{Q}$ соответственно, для которых определено понятие обильности;
- выбирая общие дивизоры в каждой из линейных систем Λ , Λ_W и Λ_V , можно естественным образом определить кратности линейных систем Λ , Λ_W и Λ_V в общих точках подмногообразий многообразий $\mathbb{P}^3$, W и V соответственно, причем кратность Λ в любой кривой и точке равна 0, поскольку базисное множество линейной системы Λ пусто;
- выбирая два общих дивизора в каждой из линейных систем Λ , Λ_W и Λ_V , можно естественным образом определить одномерные эффективные циклы Λ^2 , Λ_W^2 и Λ_V^2 .

Теперь можно повторить рассуждения доказательства теоремы 0.2.1 для выбранных подвижных лог-пар, заменяя канонические дивизоры на лог-канонические. Имеем

$$K_W + \mu\Lambda_W \sim_{\mathbb{Q}} g^*(K_V + \mu\Lambda_V) + \Sigma_V \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_{\mathbb{P}^3} + \mu\Lambda) + \Sigma_{\mathbb{P}^3}, \quad (0.2.4)$$

где Σ_V и $\Sigma_{\mathbb{P}^3}$ – исключительные дивизоры морфизмов g и f соответственно. Причем дивизоры Σ_V и $\Sigma_{\mathbb{P}^3}$ уже не обязательно эффективны, вернее, дивизор Σ_V не обязательно эффективен, но дивизор $\Sigma_{\mathbb{P}^3}$ эффективен. Действительно, линейная система Λ свободна, откуда легко следует, что в соотношении (0.2.4) исключительный дивизор $\Sigma_{\mathbb{P}^3}$ точно такой же, как и в случае $\Lambda = \emptyset$. С другой стороны, по построению линейная система Λ_V может иметь базисные точки и базисные кривые, откуда следует, что дивизор Σ_V может иметь и отрицательные коэффициенты.

Возможная отрицательность коэффициентов g -исключительного дивизора Σ_V непосредственно связана с таким понятием, как особенности подвижной лог-пары $(V, \mu\Lambda_V)$. Особенности лог-пар обобщают особенности многообразий (см. [111]). В частности, особенности лог-пары $(V, \mu\Lambda_V)$ называются каноническими (см. определение 1.3.3), если при любом выборе бирационального морфизма g исключительный дивизор Σ_V , определенный соотношением (0.2.4), является эффективным дивизором. В случае пустой границы данное определение совпадает с классическим определением канонических особенностей многообразия. Канонические особенности естественным

образом возникают на канонических моделях неособых многообразий общего типа. Например, пусть U – неособое многообразие размерности n с численно эффективным каноническим и объемным каноническим дивизором K_U , т.е. выполнено неравенство $K_U \cdot C \geq 0$ для любой кривой $C \subset U$ и $K_U^n > 0$. Тогда каноническая модель $\text{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathcal{O}_U(nK_U)))$ имеет канонические особенности. Канонические особенности рациональны, горенштейновы рациональные особенности канонические (см. [55]), а канонические особенности в размерности 2 дювалевские (см. [2]).

Особенности лог-пары $(\mathbb{P}^3, \mu\Lambda)$ канонические, поскольку линейная система Λ не имеет базисных точек. С другой стороны, дивизоры $K_{\mathbb{P}^3} + \mu\Lambda$ и $K_V + \mu\Lambda_V$ несложно сделать обильными, выбрав μ достаточно большим. Действительно, группа $\text{Pic}(V)$ порождена антиканоническим дивизором $-K_X$ по теореме Лефшеца, откуда следует, что дивизор $K_V + \mu\Lambda_V$ обилён при любом рациональном $\mu > \frac{1}{n}$, где n – натуральное число такое, что $\Lambda_V \subset |-nK_V|$, т.е. поверхности из линейной системы Λ_V высекаются на трехмерной квартике $V \subset \mathbb{P}^4$ гиперповерхностями степени n . Однако дивизор $K_{\mathbb{P}^3} + \mu\Lambda$ обилён при любом $\mu > 4$. Таким образом, в случае, когда $\mu > 4$, у нас имеется все для применения аргументов доказательства теоремы 0.2.1, кроме эффективности g -исключительного дивизора Σ_V , определенного соотношением (0.2.4).

Из-за возможной неэффективности дивизора Σ_V успешно применить схему рассуждений доказательства теоремы 0.2.1 для квартики V и проективного пространства $\mathbb{P}^3$ не получается, и ничего удивительного в этом нет, поскольку в противном случае мы могли бы повторить все предыдущие рассуждения для $\mathbb{P}^3$ вместо квартики V и доказать совпадение групп $\text{Bir}(\mathbb{P}^3)$ и $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$, что, конечно же, абсурд.

Схема доказательства теоремы 0.2.1 логически подвела нас к построению подвижных лог-пар $(\mathbb{P}^3, \mu\Lambda)$ и $(V, \mu\Lambda_V)$, которые можно назвать *бirationально эквивалентными* подвижными лог-парами (см. § 1.3). Вспомним теперь о классическом бирациональном инварианте – размерности Кодaira.

Ничто не мешает нам определить размерность Кодaira для построенных подвижных лог-пар $(\mathbb{P}^3, \mu\Lambda)$ и $(V, \mu\Lambda_V)$, просто заменяя канонический дивизор в определении 0.2.3 на соответствующий лог-канонический дивизор. Полученные при этом числа (или $-\infty$) можно по аналогии с классическим случаем обозначать $\kappa(\mathbb{P}^3, \mu\Lambda)$ и $\kappa(V, \mu\Lambda_V)$. Конечно, при этом хотелось бы, чтобы размерность Кодaira подвижной лог-пары была бирациональным инвариантом, т.е. одинаковой для бирационально эквивалентных подвижных лог-пар. Например, желательно было бы выполнение равенства $\kappa(\mathbb{P}^3, \mu\Lambda) = \kappa(V, \mu\Lambda_V)$, однако здесь есть небольшая, но легко разрешимая проблема.

Размерность Кодaira мы определили для неособых многообразий (см. определение 0.2.3), но возможная неэффективность дивизора Σ_V , определенного соотношением (0.2.4), показывает, что размерность Кодaira подвижных лог-пар необходимо определять как обобщение размерности Кодaira особых многообразий. С другой стороны, легко видеть, что приведенное нами классическое определение кодаировой размерности уже не будет бирациональным инвариантом, если мы опустим требование неособости X в определении 0.2.3.

ПРИМЕР 0.2.5. Пусть S – двумерная квартика в $\mathbb{P}^3$. Тогда непосредственно из определения 0.2.3 следует, что $\kappa(S) = 0$. С другой стороны, в случае, когда S является конусом над кривой C степени 4, квартика S бирационально эквивалентна $\mathbb{P}^1 \times C$, но по определению 0.2.3 выполнено равенство $\kappa(\mathbb{P}^1 \times C) = -\infty$. Легко видеть, что *правильно определенная* размерность Кодaira $\kappa(S)$ равна нулю тогда и только тогда,

когда поверхность S имеет дювалевские особенности (см. замечания 0.2.6 и 1.3.17).

Таким образом, размерность Кодайры особых многообразий нужно определять как размерность Кодайры их десингуляризаций. Нетрудно показать, используя доказательство теоремы 0.2.1, что при таком определении размерность Кодайры корректно определена, т.е. не зависит от выбора десингуляризации, и является бирациональным инвариантом.

ЗАМЕЧАНИЕ 0.2.6. Если многообразие имеет канонические особенности, то можно определять его кодайрову размерность непосредственно как в определении 0.2.3, т.е. не прибегая к десингуляризации (см. замечание 1.3.17).

Определение размерности Кодайры особого многообразия автоматически обобщается на подвижные лог-пары (см. определение 1.3.15). Так, $\kappa(\mathbb{P}^3, \mu\Lambda)$ следует положить равным максимальной размерности образа $\dim(\phi|_{n(K_W + \mu\Lambda_W)}(W))$ для достаточно делимого $n \gg 0$, а если $|n(K_W + \mu\Lambda_W)| = \emptyset$, то просто положить $\kappa(\mathbb{P}^3, \mu\Lambda) = -\infty$. Тогда $\kappa(\mathbb{P}^3, \mu\Lambda) = \kappa(V, \mu\Lambda_V)$.

Из замечания 0.2.6 следует, что для подвижных лог-пар, имеющих канонические особенности, размерность Кодайры можно определять, не рассматривая десингуляризацию, откуда следует, что выполнено равенство

$$\kappa(\mathbb{P}^3, \mu\Lambda) = \begin{cases} -\infty & \text{при } \mu < 4, \\ 0 & \text{при } \mu = 4, \\ 3 & \text{при } \mu > 4. \end{cases}$$

Элементы линейной системы $\Lambda_V = \rho^{-1}(\Lambda)$ высекаются на $V \subset \mathbb{P}^4$ гиперповерхностями степени $n \in \mathbb{N}$ в $\mathbb{P}^4$. Положим $\mu = \frac{1}{n}$. Тогда

$$\kappa(V, \mu\Lambda_V) = \kappa(\mathbb{P}^3, \mu\Lambda) = -\infty,$$

поскольку $\frac{1}{n} < 4$. С другой стороны, дивизор $-K_V$ рационально эквивалентен гиперплоскому сечению кватрики V , следовательно, в силу выбора $\mu = \frac{1}{n}$ дивизор $K_V + \mu\Lambda_V$ численно тривиален, а дивизор $n(K_V + \mu\Lambda_V)$ рационально эквивалентен нулю.

Если бы мы определяли число $\kappa(V, \mu\Lambda_V)$ непосредственно по аналогии с определением 0.2.3, то мы бы получили равенство $\kappa(V, \mu\Lambda_V) = 0$, которое противоречит уже полученному равенству $\kappa(V, \mu\Lambda_V) = -\infty$. Последнее противоречие как раз и обуславливается тем фактом, что особенности лог-пары $(V, \frac{1}{n}\Lambda_V)$ не каноничны (см. замечание 0.2.6), и, более конкретно, тем, что дивизор Σ_V в соотношении (0.2.4) не является эффективным.

Итак, предположение о рациональности кватрики V привело к существованию линейной системы Λ_V на V такой, что Λ_V не имеет неподвижных компонент, а особенности подвижной лог-пары $(V, \frac{1}{n}\Lambda_V)$ не являются каноническими, а именно, существует бирациональный морфизм $g: W \rightarrow V$ такой, что выполнена $\mathbb{Q}$ -рациональная эквивалентность

$$K_W + \frac{1}{n}\Lambda_W \sim_{\mathbb{Q}} g^*\left(K_V + \frac{1}{n}\Lambda_V\right) + \sum_{i=1}^k a_i E_i \sim_{\mathbb{Q}} \sum_{i=1}^k a_i E_i,$$

где $\Lambda_W = g^{-1}(\Lambda_V)$, E_i — исключительный дивизор морфизма g , a_i — рациональное число, причем выполнено неравенство $a_r < 0$ для некоторого r . Образ $g(E_r)$ дивизора

E_r на трехмерной квартике V принято называть *максимальной особенностью* (см. [87], [45], [152]).

Приведенные рассуждения применимы не только к неособой трехмерной квартике, но к любому неособому трехмерному многообразию Фано, чья группа Пикара есть $\mathbb{Z}$, в том числе и к проективному пространству $\mathbb{P}^3$. Так в чем же особенность неособой трехмерной квартики? В том, что на неособой трехмерной квартике максимальная особенность существовать не может, поскольку ее антиканоническая степень относительно невелика.

Приведем набросок доказательства несуществования максимальной особенности на неособой трехмерной квартике (см. §2.1). Пусть $C = g(E_r) \subset V$. Возможны варианты:

- максимальная особенность C является неприводимой кривой;
- максимальная особенность C является точкой.

Пусть C – кривая. Тогда в общей точке кривой C морфизм g является композицией раздутий кривых, доминирующих C , и раздутия самой кривой C . Коэффициент a_r можно вычислить локально в окрестности общей точки кривой C индуктивно по количеству раздутий, из которых состоит морфизм g в общей точке кривой C . Откуда следует неравенство

$$\text{mult}_C(\Lambda_V) > n,$$

которое означает, что кратность общей поверхности из линейной системы Λ_V в общей точке кривой C превышает n . При этом поверхности в Λ_V отсекаются на V гиперповерхностями степени n в $\mathbb{P}^4$. Воспользуемся оригинальным приемом работы [147] для доказательства невозможности неравенства $\text{mult}_C(\Lambda_V) > n$ (см. предложение 1.3.12).

Предположим, что C – прямая. Возьмем общую плоскость Π в $\mathbb{P}^4$, проходящую через прямую C . Тогда выполнено соотношение

$$\Pi \cap V = C \cup Z,$$

где Z – плоская кубическая кривая. Кривые C и Z пересекаются по трем точкам на плоскости Π . Не очевидно, что эти точки пересечения различны, но это следует из общности выбора плоскости Π и неособости трехмерной квартики V (см. доказательство предложения 1.3.12). Очевидно также, что кубическая кривая Z не лежит в базисном множестве линейной системы Λ_V . Ограничивая общую поверхность S из линейной системы Λ_V на кривую Z , мы сразу получаем, что

$$3n = \deg(Z)n = \deg(S|_Z) \geq \sum_{O \in Z \cap C} \text{mult}_O(S) \text{mult}_O(Z) > \sum_{O \in Z \cap C} n = 3n,$$

что является противоречием. В случае, когда кривая C не является прямой, вместо плоскости Π можно рассмотреть общий конус над кривой C и получить противоречие аналогичным образом (см. [147], [48]).

ЗАМЕЧАНИЕ 0.2.7. В разобранным случае из неравенства $\text{mult}_C(\Lambda_V) > n$ сразу следует неравенство $\deg(C) < 4$. Таким образом, вместо приведенной схемы получения противоречия можно разобрать все возможные случаи по степени кривой $C \subset \mathbb{P}^4$ как в работе [94].

Итак, требуется устранить случай, когда C является точкой. Это и есть самое трудное место в доказательстве нерациональности трехмерной кватрики. Невозможность этого случая была доказана в работе [94], используя глобальные методы, однако в работе [149] был найден новый локальный подход к данной проблеме, – было показано, что неканоничность особенностей подвижной лог-пары $(V, \frac{1}{n}\Lambda_V)$ в точке C влечет выполнение неравенства

$$\text{mult}_C(S_1 \cdot S_2) > 4n^2 \quad (0.2.8)$$

для общих дивизоров S_1 и S_2 из линейной системы Λ_V , где пересечение $S_1 \cdot S_2$ понимается в схемном смысле (см. теорему 1.7.18). Из неравенства (0.2.8) сразу следует противоречие; действительно, достаточно пересечь одномерный цикл $S_1 \cdot S_2$ с достаточно общим гиперплоским сечением неособой трехмерной кватрики V , проходящим через точку C , и воспользоваться равенством $-K_V^3 = 4$. Из полученного противоречия следует нерациональность неособой трехмерной кватрики $V \subset \mathbb{P}^4$.

Отметим, что нерациональность кватрики $V \subset \mathbb{P}^4$ обусловлена именно тем фактом, что число $-K_V^3$, которое принято называть степенью многообразия Фано V , относительно невелико. Например, для проективного пространства $\mathbb{P}^3$ выполнено равенство $-K_{\mathbb{P}^3}^3 = 64$, а все многообразия Фано степени больше 24 рациональны (см. [95]).

Неравенство (0.2.8) принято называть $4n^2$ -неравенством. Отметим, что по своей природе неравенство (0.2.8) локально и имеет место без какого-либо отношения к неособой трехмерной кватрике (см. теорему 1.7.18). Как оказалось впоследствии, неравенство (0.2.8) имеет очень глубокий геометрический смысл, связанный с классификацией экстремальных бирациональных стягиваний в неособую трехмерную точку (см. [45], [102]).

§ 0.3. Бирациональная жесткость

Для определения *бirationально жесткого* многообразия необходимо напомнить, что такое *программа минимальных моделей* (см. § 1.1), которая далее везде будет обозначаться ПММ. Напомним, что ПММ есть алгоритм, который бирационально перестраивает любое многообразие X в многообразие Y , для которого выполнена одна из следующих возможностей:

- канонический дивизор K_Y численно эффективен⁸;
- существует морфизм $\xi: Y \rightarrow Z$ такой, что ξ имеет связные слои, морфизм ξ не является бирациональным, антиканонический дивизор $-K_Y$ является ξ -обильным и $\text{rk Pic}(Y) = \text{rk Pic}(Z) + 1$, где ξ -обильность дивизора $-K_Y$ просто означает, что дивизор $-K_Y + \xi^*(D)$ обилён для некоторого обильного дивизора D на Z .

В общем случае конечный продукт ПММ не определен однозначно.

ПРИМЕР 0.3.1. Бирационально эквивалентные поверхности $\mathbb{P}^2$ и $\mathbb{F}_n$ являются конечным продуктом ПММ. Более того, применение ПММ к любой рациональной поверхности бирационально перестраивает ее либо в $\mathbb{P}^2$, либо в поверхность $\mathbb{F}_n$.

С другой стороны, многообразия, удовлетворяющие всем условиям теоремы 0.2.1, также являются конечным продуктом ПММ, но уже однозначно определенным по теореме 0.2.1, даже с точностью до бирегулярного автоморфизма.

⁸ Дивизор D на многообразии X называется численно эффективным, если пересечение дивизора D с любой кривой на многообразии X неотрицательно.

ПРИМЕР 0.3.2. Рассмотрим неособую трехмерную квартику $V \subset \mathbb{P}^4$. Из формулы присоединения и теоремы Лефшеца следует, что квартика V является конечным продуктом ПММ, а из аргументов работы [94] следует, что квартика V является единственным конечным продуктом ПММ. В частности, любые бирациональные перестройки квартики V в процессе применения ПММ приводят назад к трехмерной квартике V , а полученная бирациональная перестройка обязательно является бирегулярным автоморфизмом квартики V , который в свою очередь является проективным автоморфизмом.

В определенном смысле, свойство быть единственным конечным продуктом ПММ и было взято за определение бирационально жесткого многообразия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.3.3. Многообразие Фано X , имеющее терминальные и $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности (см. определение 1.1.1), например неособое, такое, что $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X) = 1$, называется бирационально жестким, если выполнены следующие условия:

- многообразие X не может быть бирационально перестроено в многообразие Y такое, что существует небирациональный сюръективный морфизм $\xi: Y \rightarrow Z$, общий слой которого имеет кодairaovu размерность $-\infty$;
- многообразие X не может быть бирационально перестроено в многообразие Y такое, что Y является многообразием Фано с терминальными и $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями, выполнено равенство $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(Y) = 1$, и многообразие Y не бирегулярно многообразию X .

Бирационально жесткие многообразия Фано нерациональны, они не могут быть бирационально перестроены в расслоения на коники и расслоения на рациональные поверхности, в частности, бирационально жестких поверхностей дель Пешо над алгебраически замкнутым полем не существует, но существуют бирационально жесткие поверхности дель Пешо над алгебраически незамкнутым полем (см. теорему 1.5.1 и [91]). Напомним, что двумерные многообразия Фано называются поверхностями дель Пешо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.3.4. Бирационально жесткое многообразие Фано X , обладающее терминальными и $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями, например неособое, для которого выполнено равенство $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X) = 1$, называется бирационально сверхжестким, если группы бирациональных автоморфизмов $\mathrm{Bir}(X)$ и бирегулярных автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ совпадают.

Существуют бирационально жесткие многообразия Фано, которые не являются бирационально сверхжесткими.

ПРИМЕР 0.3.5. Пусть X – нодальная трехмерная квартика в $\mathbb{P}^4$, т.е. особенности многообразия X состоят из изолированных обыкновенных двойных точек. Предположим, что выполнено равенство $\mathrm{rk} \mathrm{Cl}(X) = 1$. Тогда X является бирационально жестким многообразием Фано с терминальными и $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями (см. [94], [146], [46], [129]), причем трехмерная квартика X является бирационально сверхжесткой только в неособом случае, а равенство $\mathrm{rk} \mathrm{Cl}(X) = 1$ выполнено при $|\mathrm{Sing}(X)| \leq 8$ (см. следствие 2.1.10), но существуют нодальные рациональные трехмерные квартики, например, детерминантальные (см. [139]).

Приведенный в § 0.2 набросок доказательства нерациональности неособой трехмерной квартики V легко модифицировать для доказательства ее бирациональной сверх-

жесткости (см. теорему 1.4.1). Более того, как уже отмечалось в § 0.2, основная причина нерациональности неособой трехмерной кватрики V состоит в том, что выполнено неравенство $-K_V^3 \leq 4$, поскольку доказательство нерациональности кватрики V существенным образом опиралось на неравенство (0.2.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 0.3.6. Среди неособых трехмерных многообразий Фано только следующие четыре многообразия являются бирационально жесткими:

- неособая кватрика в $\mathbb{P}^4$ (см. § 2.1);
- двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в неособой секстике (см. § 2.2), которое также можно реализовать как неособую гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1^4, 3)$;
- двойное накрытие неособой квадрики в $\mathbb{P}^4$ с ветвлением в неособой поверхности степени 8 (см. § 2.3), которое также можно реализовать как неособое полное пересечение квадратичного конуса и кватрики в $\mathbb{P}(1^5, 2)$;
- неособое полное пересечение квадрики и кубики в $\mathbb{P}^5$ (см. § 2.4);

причем бирационально сверхжесткими среди них являются только неособая трехмерная кватрика и двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в неособой секстике.

Теперь рассмотрим произвольное неособое многообразие Фано X размерности n такое, что выполнено равенство $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X) = 1$. Естественно ожидать, что при относительно небольших значениях числа $(-K_X)^n$ многообразие X будет бирационально сверхжестким, поскольку неравенство (0.2.8) верно в любой размерности начиная с трех (см. теорему 1.7.18). Более того, множество примеров подтверждает такое предположение (см. [145], [154], [63], [29]), однако в доказательстве бирациональной сверхжесткости неособой трехмерной кватрики существенным образом использовалась также ее проективная геометрия, поэтому бирациональная сверхжесткость многообразия X при небольших значениях $(-K_X)^n$, вообще говоря, не очевидна. Например, следующая очень естественная гипотеза не доказана пока ни для каких значений n , несмотря на свою кажущуюся очевидность.

ГИПОТЕЗА 0.3.7. Если $(-K_X)^n = 1$, то X бирационально сверхжестко.

Равенство $(-K_X)^n = 1$ невозможно, если $n = 3$. При четном n равенство $(-K_X)^n = 1$ выполнено, например, для неособой гиперповерхности степени $2(n+1)$ во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(1^4, 2, n+1)$. При $n = 2$ условие $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X) = 1$ может быть выполнено, если поле определения многообразия X алгебраически незамкнуто (см. [120], [121]). Существует несколько намного более сильных предположений, аналогичных гипотезе 0.3.7, одно из которых состоит в следующей гипотезе (см. [156]).

ГИПОТЕЗА 0.3.8. Пусть $n \geq 5$, а группа $\mathrm{Pic}(X)$ порождена антиканоническим дивизором многообразия X . Тогда X бирационально сверхжестко.

Число $(-K_X)^n$ называется степенью многообразия Фано X . Из неравенства (0.2.8) несложно следует бирациональная жесткость многообразия X в случае $(-K_X)^n \leq 4$ при условии, что линейная система $| -K_X |$ не имеет базисных точек (см. [87], [145], [29]), однако существует не так много многообразий Фано, удовлетворяющих двум последним свойствам: например, двойные пространства и двойные квадрики. Впервые доказать бирациональную сверхжесткость многообразия Фано, чья степень больше 4, или, неформально говоря, преодолеть *степенной барьер*, удалось в работе [144], где была доказана бирациональная сверхжесткость неособой четырехмерной квинтики в $\mathbb{P}^5$ – многообразия Фано степени 5, но качественный скачок в преодолении *сте-*

пенного барьера был сделан в работе [149], где был получен следующий результат (см. §3.1).

ТЕОРЕМА 0.3.9. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ – общая гиперповерхность степени $n \geq 5$. Тогда гиперповерхность X – бирационально сверхжесткое многообразие Фано степени n .

Позднее методы работы [149] были применены в [151], [153], [156], а в работе [21] было доказано $8n^2$ -неравенство, которое логически обобщало $4n^2$ -неравенство на случай неособых многообразий размерности 4 и выше. Последнее позволило получить новое доказательство бирациональной сверхжесткости неособой четырехмерной квинтики в $\mathbb{P}^5$, а также доказать бирациональную сверхжесткость неособой гиперповерхности степени n в $\mathbb{P}^n$ при $n \leq 8$, позднее методы работы [21] были применены в [27] и [34]. В работе [154] была доказана бирациональная сверхжесткость неособой гиперповерхности степени n в $\mathbb{P}^n$ при всех $n \geq 6$, однако в работе [63] была указана небольшая неточность, содержащаяся в доказательстве основного результата работы [154], которая была устранена в [63] для $n \leq 12$.

Часть 1. Предварительные сведения

§1.1. Программа минимальных моделей.

Хорошим введением в программу минимальных моделей, в дальнейшем просто ПММ, являются статья [106] и книга [126]. Неформально ПММ можно воспринимать как *черный ящик*, в который можно положить многообразие X , а вынуть бирационально эквивалентное многообразие Y , для которого выполнена одна из двух возможностей:

- канонический дивизор K_Y является численно эффективным;
- существует морфизм $\xi: Y \rightarrow Z$ такой, что ξ имеет связные слои, выполнено неравенство $\dim(Z) < \dim(Y)$, антиканонический дивизор $-K_Y$ является ξ -обильным, выполнено равенство $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(Y/Z) = 1$ и, в частности, многообразие Y заматается кривыми, имеющие отрицательное пересечение с K_Y .

В случае численно эффективного канонического дивизора K_Y многообразие Y принято называть *минимальной моделью*. В случае существования морфизма ξ его принято называть *расслоением Мори*, а многообразие Y принято называть *Мори расслоенным пространством*. Конечный продукт ПММ не обязательно определен однозначно (см. пример 0.3.1), но существуют многообразия, для которых конечный продукт ПММ определен однозначно, даже с точностью до бирегулярного автоморфизма. Например, двумерные минимальные модели или канонические модели (см. теорему 0.2.1). На данный момент ПММ доказана для многообразий размерности не больше 4 (см. [106], [134], [171]).

Начиная с размерности 3, в каждом из возможных случаев многообразие Y может быть особым, это неизбежное допущение. В процессе ПММ возникают следующие особенности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.1. Многообразие X имеет терминальные особенности, если канонический дивизор K_X является дивизором $\mathbb{Q}$ -картье, т.е. кратность дивизора K_X есть дивизор Картье, и для произвольного бирационального морфизма $f: W \rightarrow X$

имеем

$$K_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X) + \sum_{i=1}^k a(X, E_i) E_i,$$

где E_i – f -исключительный дивизор, а $a(X, E_i)$ – положительное рациональное число.

Легко видеть, что неособое многообразие имеет терминальные особенности, а в размерности 2 многообразия, имеющие терминальные особенности, неособы. В размерности 3 терминальные особенности хорошо изучены (см. [133], [159]). Изолированные обыкновенные двойные точки являются терминальными особенностями начиная с размерности 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.2. При применении ПММ часто предполагается, что особенности многообразий являются $\mathbb{Q}$ -факториальными, поскольку ПММ сохраняет $\mathbb{Q}$ -факториальность (напомним, что многообразие имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, если некоторая кратность каждого дивизора Вейля на нем является дивизором Картье).

Опишем итерационное применение ПММ к трехмерному многообразию X в предположении, что особенности X терминальны и $\mathbb{Q}$ -факториальны. Пусть $\overline{NE}(X)$ – замыкание конуса одномерных эффективных циклов на многообразии X . Тогда дивизор K_X можно рассматривать как линейную функцию на конусе $\overline{NE}(X)$.

Если $K_X \cdot Z \geq 0$ для любого одномерного цикла $Z \in \overline{NE}(X)$, то дивизор K_X численно эффективен и само многообразие X является конечным продуктом ПММ. В этом случае естественно предположить, что линейная система $|nK_X|$ свободна для $n \gg 0$, что действительно имеет место, даже в более общем контексте (см. [113], [107]). При этом размерность многообразия $\phi_{|nK_X|}(X)$ есть размерность Кодайры $\kappa(X)$ многообразия X . В случае, когда выполнено равенство $\kappa(X) = \dim(X)$, многообразие $\phi_{|nK_X|}(X)$ имеет канонические особенности⁹ и обильный канонический дивизор и называется канонической моделью.

Если канонический дивизор K_X не является численно эффективным, то существует такой экстремальный луч R конуса $\overline{NE}(X)$, что $K_X \cdot R < 0$ и существует сюръективный морфизм со связными слоями $\psi: X \rightarrow Y$ такой, что Y нормально, а любая кривая $C \subset X$ стягивается морфизмом ψ в точку в том и только том случае, когда $C \in R$. Морфизм ψ принято называть стягиванием экстремального луча R . Возможны варианты:

- морфизм ψ бирационален и стягивает кривую $C \subset X$;
- морфизм ψ бирационален и стягивает неприводимый дивизор $E \subset X$;
- многообразие Y – неособая кривая, морфизм ψ есть расслоение на поверхности дель Пешо, и выполнено равенство $\mathrm{rk} \, \mathrm{Pic}(X) = 2$;
- многообразие Y – поверхность, имеющая циклические фактор-особенности, морфизм ψ есть расслоение на коники, и $\mathrm{rk} \, \mathrm{Pic}(X) = \mathrm{rk} \, \mathrm{Pic}(Y) + 1$, причем, существует гипотеза, что особенности Y дювалевские (см. гипотезу III в [90], [141], [142]);
- многообразие Y – точка, а X – многообразие Фано с терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями, и выполнено равенство $\mathrm{rk} \, \mathrm{Pic}(X) = 1$.

⁹ Многообразие V имеет канонические особенности, если K_V – дивизор $\mathbb{Q}$ -картье и для каждого бирационального морфизма $f: W \rightarrow X$ выполнено $K_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X) + \sum_{i=1}^k a(X, E_i) E_i$, где E_i – исключительный дивизор бирационального морфизма f , а $a(X, E_i)$ – неотрицательное рациональное число.

В случае, когда $\dim(Y) < \dim(X)$, многообразие X есть конечный продукт ПММ, а размерность Кодайры многообразия X полагают равной $-\infty$. В случае, когда ψ стягивает неприводимый дивизор $E \subset X$, особенности Y также терминальны и $\mathbb{Q}$ -факториальны, причем выполнено равенство $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(Y) = \mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X) - 1$. В этом случае бирациональный морфизм ψ – итерационный шаг ПММ, поскольку мы можем применить все предыдущие рассуждения к многообразию Y . В случае, когда морфизм ψ стягивает (возможно приводимую) кривую $C \subset X$, дивизор K_Y уже не является дивизором $\mathbb{Q}$ -картье.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.3. Пусть V – трехмерное многообразие, дивизор K_V является $\mathbb{Q}$ -картье дивизором, а $\gamma: V \rightarrow U$ – бирациональное стягивание экстремального луча конуса $\overline{\mathrm{NE}}(V)$, которое стягивает кривую $\Delta \subset V$. Тогда отображение $\rho: V \dashrightarrow \hat{V}$ называется флипом (флопом, антифлипом, соответственно), если существует кривая $\hat{\Delta} \subset \hat{V}$ такая, что ρ индуцирует изоморфизм $V \setminus \Delta \cong \hat{V} \setminus \hat{\Delta}$, а диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & \hat{V} \\ & \searrow \gamma \quad \swarrow \hat{\gamma} & \\ & U & \end{array}$$

коммутативна, где $\hat{\gamma}$ – стягивание экстремального луча конуса $\overline{\mathrm{NE}}(\hat{V})$, и выполнены неравенства $K_V \cdot \Delta < 0$ и $K_{\hat{V}} \cdot \hat{\Delta} > 0$ (выполнены неравенства $K_V \cdot \Delta > 0$ и $K_{\hat{V}} \cdot \hat{\Delta} < 0$, выполнены равенства $K_V \cdot \Delta = K_{\hat{V}} \cdot \hat{\Delta} = 0$, соответственно).

В случае, когда построенный морфизм ψ бирационален и стягивает кривую $C \subset X$, существует флип $\eta: X \rightarrow \hat{X}$ в этой кривой (см. [134], [168]), который рассматривается как итерационный шаг ПММ, поскольку многообразие $\hat{X}$ имеет терминальные и $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности. Более того, можно показать, что не существует бесконечной последовательности флипов трехмерных многообразий, имеющих терминальные особенности. Таким образом, после конечного числа итераций мы получим бирациональную перестройку трехмерного многообразия X либо в минимальную модель, либо в Мори расслоенное пространство.

Алгоритм ПММ выглядит достаточно абстрактно, однако это не так, как видно из следующего примера применения ПММ к конкретной проблеме (см. [8], [83], [17], [18]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.4. Пусть X – нормальное трехмерное многообразие, содержащее обильный эффективный дивизор Картье S с дувалевскими особенностями, являющийся минимальной поверхностью кодировой размерности нуль. Тогда либо X имеет канонические особенности, либо X есть стягивание сечения на $\mathbb{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(S|_S))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что дивизор $-K_X$ является дивизором $\mathbb{Q}$ -картье и выполнено соотношение $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} S$ (см. [18]). Предположим, что особенности X не канонические. Тогда из ПММ следует существование такого бирационального морфизма $\pi: V \rightarrow X$, что многообразие V имеет канонические особенности, а дивизор K_V является π -обильным и, в частности, имеет положительное пересечение с каждой кривой, которая стягивается морфизмом π . Тогда выполнено соотношение $-K_V \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(S) - B$, где B – эффективный и ненулевой π -исключительный дивизор

(см. предложение 2.18 в [113]). Тогда существует экстремальный луч $R \in \overline{\mathbb{NE}}(V)$ такой, что $-B \cdot R < 0$. Пусть $\psi: V \rightarrow Z$ – стягивание луча R . Тогда возможны варианты:

- морфизм ψ бирационален;
- многообразие Z – кривая;
- многообразие Z – поверхность.

Из π -обильности дивизора K_V , ψ -обильности дивизора B и формулы 2.3.2 в [134] сразу следует, что ψ является расслоением на коники. Положим $\hat{S} = \pi^{-1}(S)$. Тогда $\hat{S}$ – сечение морфизма ψ . Теперь из равенств $R^1\psi_*(\mathcal{O}_V) = \text{Ext}^1(\mathcal{O}_S(S|_S), \mathcal{O}_S) = 0$ легко следуют изоморфизмы $V \cong \mathbb{P}(\psi_*(\mathcal{O}_V(\hat{S})))$ и $\psi_*(\mathcal{O}_V(\hat{S})) \cong \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(S|_S)$.

Отметим, что утверждение предложения 1.1.4 обобщает следующие двумерные результаты: особенности кубической поверхности в $\mathbb{P}^3$ с изолированными особенностями не являются дювалевскими тогда и только тогда, когда кубическая поверхность есть конус; особенности двулистного накрытия $\mathbb{P}^2$ с ветвлением в приведенной кватернике не являются дювалевскими тогда и только тогда, когда кривая ветвления есть объединение четырех прямых, проходящих через одну точку.

СЛЕДСТВИЕ 1.1.5. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ – нормальное многообразие такое, что некоторое его гиперплоское сечение S является минимальной неособой поверхностью кодифференциальной размерности нуль. Из классификации поверхностей следует, что S может быть одной из следующих поверхностей: абелева поверхность, биэллиптическая поверхность, поверхность типа КЗ и поверхность Энриквеса. Тогда либо X имеет канонические особенности, а поверхность S есть поверхность типа КЗ или поверхность Энриквеса, либо X является конусом.*

В частности, из утверждения следствия 1.1.5 следует, что абелева поверхность не может быть гиперплоским сечением никакого многообразия кроме конуса (см. [65]).

§ 1.2. Лог-программа минимальных моделей

В силу ряда важных причин, часто требуется рассмотреть бирациональные свойства пары, состоящей из многообразия и некоторого дивизора на нем. Возникающие при этом бирациональные перестройки можно рассмотреть по аналогии с перестройками, возникающими в процессе ПММ. Сделаем это на примере трехмерного многообразия X и эффективного дивизора B_X на нем такого, что $B_X = \sum_{i=1}^r a_i B_i$, где B_i – неприводимое приведенное подмногообразие коразмерности 1 на многообразии X , а a_i – неотрицательное рациональное число, меньшее 1. Такую пару, состоящую из многообразия X и дивизора B_X , принято называть лог-парой и обозначать (X, B_X) . При этом дивизор B_X принято называть границей лог-пары (X, B_X) , а дивизор $K_X + B_X$ принято называть лог-каноническим дивизором.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.1. Лог-пара (X, B_X) имеет лог-терминальные (лог-канонические, соответственно) особенности, если дивизор $K_X + B_X$ является дивизором $\mathbb{Q}$ -карты и для произвольного бирационального морфизма $f: W \rightarrow X$ выполнена эквивалентность

$$K_W + B_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X) + \sum_{i=1}^k a(X, B_X, E_i) E_i,$$

где $B_W = \sum_{i=1}^r a_i f^{-1}(B_i)$, E_i – f -исключительный дивизор, а $a(X, B_X, E_i)$ – рациональное число такое, что $a(X, B_X, E_i) > -1$ ($a(X, B_X, E_i) \geq -1$, соответственно).

Предположим, что лог-пара (X, B_X) имеет лог-терминальные особенности, но лог-канонический дивизор $K_X + B_X$ не является численно эффективным. Тогда существует такой экстремальный луч R конуса $\overline{\text{NE}}(X)$, что $(K_X + B_X) \cdot R < 0$ и существует сюръективный морфизм со связными слоями $\psi: X \rightarrow Y$ такой, что многообразие Y нормально, а любая кривая $C \subset X$ стягивается морфизмом ψ в точку в том и только том случае, когда она содержится в экстремальном луче R . При этом возможны варианты:

- морфизм ψ бирационален и стягивает кривую $C \subset X$;
- морфизм ψ бирационален и стягивает неприводимый дивизор $E \subset X$;
- морфизм ψ является расслоением Мори.

В случае, когда ψ стягивает неприводимый дивизор $E \subset X$, можно рассмотреть новую лог-пару (Y, B_Y) , где $B_Y = \sum_{i=1}^r a_i \psi(B_i)$. Тогда особенности лог-пары (Y, B_Y) также лог-терминальны, причем выполнено равенство $\text{rk Pic}(Y) = \text{rk Pic}(X) - 1$.

В случае, когда морфизм ψ стягивает (возможно приводимую) кривую $C \subset X$, существует бирациональное отображение $\rho: X \dashrightarrow \hat{X}$ такое, что существует (возможно приводимая) кривая $\hat{C} \subset \hat{X}$, отображение ρ задает изоморфизм $X \setminus C \cong \hat{X} \setminus \hat{C}$ и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & \hat{X} \\ \psi \searrow & & \swarrow \hat{\psi} \\ & Y & \end{array}$$

коммутативна, где $\hat{\psi}$ – бирациональный морфизм, стягивающий кривую $\hat{C}$ в точку, который является стягиванием экстремального луча конуса $\overline{\text{NE}}(\hat{X})$, причем выполнено строгое неравенство $(K_{\hat{X}} + B_{\hat{X}}) \cdot \hat{C} > 0$, где $B_{\hat{X}} = \sum_{i=1}^r a_i \rho(B_i)$. Более того, лог-пара $(\hat{X}, B_{\hat{X}})$ также имеет лог-терминальные особенности. Бирациональное отображение ρ принято называть лог-флипом в кривой C для лог-пары (X, B_X) . Существование ρ показано в [171].

Таким образом, в случае, когда морфизм ψ бирационален, мы можем применить все предыдущие аргументы либо к лог-паре (Y, B_Y) , либо к лог-паре $(\hat{X}, B_{\hat{X}})$. Более того, можно показать, что бесконечная последовательность трехмерных лог-флипов не может существовать (см. [106]). Следовательно, после конечного числа итераций мы получим бирациональную перестройку $\sigma: X \dashrightarrow V$ и лог-пару (V, B_V) , где $B_V = \sum_{i=1}^r a_i \sigma(B_i)$, такую, что особенности лог-пары (V, B_V) лог-терминальны и выполнена одна из двух возможностей:

- лог-канонический дивизор $K_V + B_V$ является численно эффективным;
- существует расслоение Мори $\xi: V \rightarrow Z$ такое, что дивизор $-(K_V + B_V)$ является обильным относительно морфизма ξ .

Приведенная схема построения бирационального отображения σ есть общая схема лог-программы минимальных моделей (см. [106], [168], [169]), которая в дальнейшем будет обозначаться просто лог-ПММ. Можно также рассмотреть относительно версию лог-ПММ для многообразий, которые допускают морфизм в данное многообразие (см. [106]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2.2. Легко видеть, что лог-ПММ сохраняет терминальность и $\mathbb{Q}$ -факториальность. Более того, лог-ПММ сохраняет терминальность особенностей, если никакие компоненты границы не стягиваются в процессе лог-ПММ.

У лог-ПММ есть конкретные применения (см. [19], [20], [36]), например, из лог-ПММ вытекает следующий результат (см. [35], [62]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.3. Пусть S – гиперповерхность в $\mathbb{P}^3$ степени 4, имеющая изолированные особенности. Тогда особенности лог-пары $(\mathbb{P}^3, \frac{3}{4}S)$ не лог-терминальны в том и только том случае, когда поверхность S является конусом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что особенности лог-пары $(\mathbb{P}^3, \frac{3}{4}S)$ не лог-терминальны в точке O . Можно показать, что такая точка единственна, а лог-пара $(\mathbb{P}^3, \frac{3}{4}S)$ имеет лог-канонические особенности (см. теорему 1.7.10). Пусть $h: Y \rightarrow \mathbb{P}^3$ – лог-терминальная модификация (см. предложение 2.18 в [113]) лог-пары $(\mathbb{P}^3, \frac{3}{4}S)$. Рассмотрим терминальную модификацию $t: V \rightarrow Y$ многообразия Y . Тогда $f = h \circ t$ бирегулярен вне точки O , многообразие V имеет терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности и

$$K_V + \frac{3}{k}\tilde{S} \sim_{\mathbb{Q}} f^* \left(K_{\mathbb{P}^3} + \frac{3}{k}S \right) - E,$$

где $\tilde{S} = f^{-1}(S)$, а E – эффективный f -исключительный дивизор, носитель которого совпадает с $f^{-1}(O)$, и $[E] \neq 0$. Существует экстремальное стягивание $g: V \rightarrow W$ такое, что дивизор $-(K_V + \frac{3}{k}\tilde{S} + E)$ является g -обильным. Легко видеть, что морфизм g является либо стягиванием поверхности $\tilde{S}$ на кривую, либо расслоением на коники, которое стягивает поверхность $\tilde{S}$ на кривую. Пусть C – общий слой морфизма g . Элементарные вычисления показывают, что $f(C)$ – прямая, откуда следует, что S – конус.

Из утверждение предложения 1.2.3 и теоремы 1.7.10 следует, что конусы имеют наибольший лог-канонический порог (см. [111]) среди двумерных квартик в $\mathbb{P}^3$, имеющих изолированные особенности, а используя результаты, полученные в [177], [74], [75], [52], [84], [143], можно найти все лог-канонические пороги двумерных квартик в $\mathbb{P}^3$ с изолированными особенностями. Последнее важно для более глубокого понимания бирациональной геометрии трехмерных многообразий Фано, поскольку двумерные квартики с изолированными особенностями возникают как гиперплоские сечения неособых трехмерных квартик.

§ 1.3. Подвижные лог-пары

Решение многих важных задач бирациональной геометрии многомерных алгебраических многообразий показало, что естественно исследовать глобальные и локальные свойства пар, состоящих из многообразия и некоторого дивизора на нем (см. § 1.2). С другой стороны, часто удобно использовать также пары, состоящие из многообразия и некоторой, не обязательно полной, линейной системы на нем, которая не имеет неподвижных компонент.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.1. Подвижная лог-пара (X, M_X) состоит из многообразия X и подвижной границы M_X на многообразии X , где $M_X = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{M}_i$ – формальная конечная линейная комбинация, $\mathcal{M}_i$ – линейная система на многообразии X , не имеющая неподвижных компонент, а a_i – рациональные неотрицательные числа.

Подвижная лог-пара может быть рассмотрена как обычная лог-пара с эффективной границей, путем замены каждой линейной системы на взвешенную сумму ее общих элементов, в частности, для подвижной лог-пары (X, M_X) формальную сумму

$K_X + M_X$ можно рассматривать как дивизор на многообразии X , который принято называть лог-каноническим дивизором лог-пары (X, M_X) . В оставшейся части данного параграфа лог-канонические дивизоры всех подвижных лог-пар будут считаться $\mathbb{Q}$ -картье дивизорами.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.2. Для подвижной лог-пары (X, M_X) самопересечение M_X^2 может быть рассмотрено как эффективный цикл коразмерности два на X , если X имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности. А именно, пусть $M_X = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{M}_i$, где $\mathcal{M}_i$ – линейная система без неподвижных компонент на многообразии X . Для каждого индекса i выберем два достаточно общих дивизора S_i и $\hat{S}_i$ в $\mathcal{M}_i$ и положим $M_X^2 = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j S_i \cdot \hat{S}_j$.

Прямой образ подвижной границы при бирациональном отображении корректно определен. Подвижные лог-пары (X, M_X) и (Y, M_Y) называются бирационально эквивалентными, если существует бирациональное отображение $\rho: X \dashrightarrow Y$ такое, что $M_Y = \rho(M_X)$. Для подвижной лог-пары можно определить рациональные числа, называемые дискрепантностями, и несколько классов особенностей так же, как это делается для обычных лог-пар (см. [106], [113], [111]), однако наиболее естественные классы особенностей в данном случае будут состоять из терминальных и канонических особенностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.3. Лог-пара (X, M_X) имеет канонические (терминальные, соответственно) особенности, если для каждого бирационального морфизма $f: W \rightarrow X$ каждое рациональное число $a(X, M_X, E_i)$, определенное соотношением

$$K_W + f^{-1}(M_X) \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + M_X) + \sum_{i=1}^k a(X, M_X, E_i) E_i,$$

неотрицательно (положительно, соответственно), где E_i – исключительный дивизор бирационального морфизма f . Число $a(X, M_X, E_i)$ принято называть дискрепантностью подвижной лог-пары (X, M_X) в дивизоре E_i .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.4. Если особенности лог-пары (X, M_X) терминальны, то для достаточно малого рационального числа $\varepsilon > 1$ особенности лог-пары $(X, \varepsilon M_X)$ также терминальны.

Особенности подвижной лог-пары совпадают с особенностями многообразия вне объединения базисных множества компонент подвижной границы. Таким образом, из существования разрешения особенностей (см. [76]) следует, что каждая подвижная лог-пара бирационально эквивалентна подвижной лог-паре с терминальными особенностями.

ПРИМЕР 1.3.5. Рассмотрим лог-пару $(\mathbb{P}^2, \gamma \mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$ – полная линейная система $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$, а γ – рациональное число. Пусть $\tau: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – рациональное отображение такое, что

$$\tau(x : y : z) = (yz : xz : xy),$$

где $(x : y : z)$ – однородные координаты на $\mathbb{P}^2$. Тогда отображение τ не определено в трех точках $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ и $(0 : 0 : 1)$ и является инволюцией, которую обычно называют *инволюцией Кремоны*. Легко видеть, что $\tau(\mathcal{H})$ является линейной системой, состоящей из коник, проходящих через точки $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ и $(0 : 0 : 1)$. Более того, особенности подвижной лог-пары $(\mathbb{P}^2, \gamma \mathcal{H})$ терминальны при любом выборе γ , а особенности подвижной лог-пары $(\mathbb{P}^2, \gamma \tau(\mathcal{H}))$ терминальны при $\gamma < 1$ и каноничны при $\gamma \leq 1$.

ПРИМЕР 1.3.6. Пусть $\mathcal{M}$ – линейная система без неподвижных компонент на трехмерном многообразии X , которое имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные и терминальные особенности. Тогда из работ [168] и [124] следует, что особенности лог-пары $(X, \mathcal{M})$ терминальны в том и только том случае, когда все базисные точки линейной системы $\mathcal{M}$ изолированы, неособы на общем дивизоре из линейной системы $\mathcal{M}$ и неособы на самом многообразии X .

ПРИМЕР 1.3.7. Пусть X – нормальное многообразие такое, что дуализирующий пучок ω_X локально свободен, $\mathcal{M}$ – линейная система на многообразии X , не имеющая неподвижных компонент, а S – общий дивизор в линейной системе $\mathcal{M}$. Тогда многообразие S имеет канонические особенности в том и только том случае, когда лог-пара $(X, \mathcal{M})$ имеет канонические особенности (см. теоремы 4.5.1 и 7.9 работы [111]).

Применение лог-ПММ к каноническим и терминальным подвижным лог-парам сохраняет их каноничность и терминальность соответственно (см. [106]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.8. Собственное неприводимое подмногообразие Y многообразия X называется центром канонических особенностей подвижной лог-пары (X, M_X) , если существуют такие бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$ и f -исключительный дивизор $E_1 \subset W$, что

$$K_W + f^{-1}(M_X) \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + M_X) + \sum_{i=1}^k a(X, M_X, E_i)E_i,$$

где $a(X, M_X, E_i)$ – рациональное число, E_i – исключительный дивизор бирационального морфизма $f: W \rightarrow X$, $f(E_1) = Y$ и $a(X, M_X, E_1) \leq 0$. Множество всех центров канонических особенностей лог-пары (X, M_X) обозначается символом $\mathbb{CS}(X, M_X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.9. Рассмотрим подвижную лог-пару (X, M_X) и собственное неприводимое подмногообразие $Z \subset X$ такое, что X неособо в общей точке подмногообразия Z . Тогда

$$Z \in \mathbb{CS}(X, M_X) \Rightarrow \text{mult}_Z(M_X) \geq 1,$$

а также $\text{mult}_Z(M_X) \geq 1 \Rightarrow Z \in \mathbb{CS}(X, M_X)$, если $\text{codim}(Z \subset X) = 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.10. Пусть (X, M_X) – подвижная лог-пара, H – достаточно общее гиперплоское сечение многообразия X , а $Z \subset X$ – собственное неприводимое подмногообразие такое, что $Z \in \mathbb{CS}(X, M_X)$. Тогда каждая компонента пересечения $Z \cap H$ принадлежит множеству $\mathbb{CS}(H, M_X|_H)$.

ПРИМЕР 1.3.11. Пусть S – неособая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$, P – некоторая точка на поверхности S , а $\psi: S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – проекция из P . Тогда ψ имеет степень 2 в общей точке поверхности S и задает инволюцию $\tau \in \text{Bir}(S)$. Рассмотрим линейную систему $\mathcal{H}$, состоящую из всех гиперплоских сечений поверхности S , положим $\mathcal{M} = \tau(\mathcal{H})$ и предположим, что точка P не является точкой Эккарда, т.е. P не является точкой пересечения трех прямых, лежащих на поверхности S . Несложно показать, что общая кривая в линейной системе $\mathcal{M}$ имеет кратность 3 в точке P и высекается на поверхности S некоторой квадрикой в $\mathbb{P}^3$, выполнено соотношение $K_S + \frac{1}{2}\mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} 0$, множество $\mathbb{CS}(S, \frac{1}{2}\mathcal{M})$ состоит из точки P , а особенности лог-пары $(S, \frac{1}{2}\mathcal{M})$ не являются каноническими (см. § 1.5).

Таким образом, особенности подвижных лог-пар существенно зависят от кратностей соответствующих подвижных границ. Эффективным средством ограничения последних является следующий результат (см. [147], [27]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.12. Пусть X – неособое полное пересечение $\bigcap_{i=1}^k G_i \subset \mathbb{P}^m$, D – эффективный дивизор на многообразии X такой, что $D \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(n)|_X$, где G_i – гиперповерхность. Тогда выполнено неравенство $\text{mult}_S(D) \leq n$ для любого неприводимого подмногообразия $S \subset X$ такого, что выполнено неравенство $\dim(S) \geq k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\dim(S) = k \leq (m-1)/2$. Рассмотрим конус C над многообразием S с вершиной в общей точке $P \in \mathbb{P}^m$. Тогда $C \cap X = S \cup R$, где R – кривая на полном пересечении X .

Рассмотрим проекцию $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^{m-1}$ из точки P и соответствующее ей подмногообразие ветвления $D_\pi \subset X$. Покажем, что $R \cap S = D_\pi \cap S$ в теоретико-множественном смысле. Пусть

$$C \cap G_i = S \cup R^i,$$

тогда выполнено равенство $R^i \cap S = D_\pi^i \cap S$ по лемме 3 в [154], где $D_\pi^i \subset G_i$ – дивизор ветвления проекции $\pi^i: G_i \rightarrow \mathbb{P}^{m-1}$ из точки P . Таким образом, из теоретико-множественных равенств $R = \bigcap_{i=1}^k R^i$ и $D_\pi = \bigcap_{i=1}^k D_\pi^i$ следует, что $R \cap S = D_\pi \cap S$.

Рассмотрим однородные координаты $(z_0 : \dots : z_m)$ на $\mathbb{P}^m$, в которых точка P имеет координаты $(p_0 : \dots : p_m)$, а G_j задается уравнением $F_j = 0$. Тогда D_π задается k уравнениями

$$\sum_{i=0}^m \frac{\partial F_j}{\partial z_i} p_i = 0,$$

а линейные системы дивизоров вида $\sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial F_j}{\partial z_i} = 0$ свободны на X ввиду неособости многообразия X , где $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Значит, теоретико-множественное пересечение $D_\pi \cap S$ состоит из различных $d \prod_{i=1}^k (d_i - 1)$ точек, где d_i – степень гиперповерхности G_i , а d – степень многообразия $S \subset \mathbb{P}^m$. Таким образом, выполнено неравенство

$$\begin{aligned} nd \prod_{i=1}^k (d_i - 1) &= \deg(D|_R) \geq \sum_{O \in R \cap S} \text{mult}_O(D) \geq \sum_{O \in R \cap S} \text{mult}_S(D) \\ &= \text{mult}_S(D) d \prod_{i=1}^k (d_i - 1), \end{aligned}$$

откуда следует, что $\text{mult}_S(D) \leq n$.

СЛЕДСТВИЕ 1.3.13. В условиях и обозначениях предложения 1.3.12 пусть μ – положительное рациональное число такое, что $\mu < \frac{1}{n}$. Тогда множество $\text{CS}(X, \mu D)$ не содержит подмногообразий полного пересечения X , чья размерность больше либо равна k .

Усилить утверждение предложения 1.3.12 нельзя.

ПРИМЕР 1.3.14. Рассмотрим неособое полное пересечение $X \subset \mathbb{P}^5$ квадратичной Q и кубической V гиперповерхностей. Пусть C – неприводимая коника на многообразии X такая, что плоскость $\Pi \subset \mathbb{P}^5$, содержащая конику C , содержится в Q . Тогда $\Pi \cap V$ состоит из коники C и некоторой прямой L ; с другой стороны, общий слой F проекции из Π является неособой плоской кубической кривой, которая пересекает L по одной точке. На эллиптической кривой F естественным образом определена инволюция – отражение в $L \cap F$, которая индуцирует бирациональную инволюцию τ .

Возьмем полную линейную систему $\mathcal{H}$, состоящую из гиперплоских сечений многообразия X , положим $\mathcal{M} = \tau(\mathcal{H})$ и рассмотрим общую поверхность D в линейной системе $\mathcal{M}$. Тогда можно показать (см. предложение 4.5 в [87]), что $D \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(13)|_X$, но выполнено равенство $\text{mult}_C(D) = 14$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.15. Для подвижной лог-пары (X, M_X) рассмотрим бирационально эквивалентную ей подвижную лог-пару (W, M_W) с каноническими особенностями и натуральное число m такое, что дивизор $m(K_W + M_W)$ является дивизором Картье. Определим размерность Кодайры $\kappa(X, M_X)$ подвижной лог-пары (X, M_X) как максимальную размерность многообразия $\phi_{|nm(K_W + M_W)|}(W)$ при $n \gg 0$ в случае, если хотя бы одна из полных линейных систем $|nm(K_W + M_W)|$ непуста, а в противном случае положим $\kappa(X, M_X) = -\infty$.

Размерность Кодайры подвижной лог-пары является бирациональным инвариантом и неубывающей функцией от коэффициентов границы.

ЛЕММА 1.3.16. *Размерность Кодайры подвижной лог-пары корректно определена, а именно, она не зависит от выбора бирационально эквивалентной подвижной лог-пары с каноническими особенностями в определении 1.3.15.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (X, M_X) и (Y, M_Y) – подвижные лог-пары, имеющие канонические особенности, такие, что $M_X = \rho(M_Y)$ для бирационального отображения $\rho: Y \dashrightarrow X$, а m – натуральное число такое, что оба дивизора $m(K_X + M_X)$ и $m(K_Y + M_Y)$ являются дивизорами Картье. Для доказательства необходимого утверждения достаточно показать, что либо $|nm(K_X + M_X)|$ и $|nm(K_Y + M_Y)|$ пусты для всех натуральных n , либо

$$\phi_{|nm(K_X + M_X)|}(X) = \phi_{|nm(K_Y + M_Y)|}(Y)$$

для всех $n \gg 0$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ g \swarrow & & \searrow f \\ X & \dashrightarrow_{\rho} & Y \end{array}$$

с неособым W , где g и f – бирациональные морфизмы. Тогда

$$K_W + M_W \sim_{\mathbb{Q}} g^*(K_X + M_X) + \sum_{i=1}^k a_i G_i \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_Y + M_Y) + \sum_{i=1}^l b_i F_i,$$

где $M_W = g^{-1}(M_X)$, a_i и b_j – рациональные числа, а G_i и F_i – исключительные дивизоры бирациональных морфизмов g и f соответственно. Более того, из каноничности подвижных лог-пар (X, M_X) и (Y, M_Y) следует, что $a_i \geq 0$ и $b_j \geq 0$. Из леммы 2.19 в [113] следует, что размерность $|nm(K_W + M_W)|$, $|g^*(nm(K_X + M_X))|$ и $|f^*(nm(K_Y + M_Y))|$ одинакова и

$$\phi_{|nm(K_W + M_W)|} = \phi_{|g^*(nm(K_X + M_X))|} = \phi_{|f^*(nm(K_Y + M_Y))|}$$

в случае, когда они непусты, откуда следует требуемое утверждение.

В случае пустой границы определение 1.3.15 совпадает с классическим определением размерности Кодайры (см. определение 0.2.3). Для произвольных лог-пар размерность Кодайры можно определить точно так же, как и для подвижных лог-пар (см. [173], [106]), а утверждение леммы 1.3.16 останется верным, при этом размерность Кодайры можно использовать для бирациональной классификации плоских кривых (см. [80], [81]). Например, из результатов работы [173] следует, что для неприводимой кривой $C \subset \mathbb{P}^2$ равенство $\kappa(\mathbb{P}^2, C) = -\infty$ выполнено тогда и только тогда, когда существует $\sigma \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ такой, что $\sigma(C)$ является прямой, а в [79] показано, что для двух неприводимых плоских кривых C_1 и C_2 существует $\rho \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ такой, что $\rho(C_1) \cup \rho(C_2)$ – объединение двух прямых, тогда и только тогда, когда выполнено равенство $\kappa(\mathbb{P}^2, C_1 + C_2) = -\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.17. Пусть (X, M_X) – подвижная лог-пара такая, что выполнена эквивалентность $K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Тогда $\kappa(X, M_X) \leq 0$, причем равенство $\kappa(X, M_X) = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда особенности подвижной лог-пары (X, M_X) канонические.

ПРИМЕР 1.3.18. Рассмотрим неособую трехмерную кватрику $X \subset \mathbb{P}^4$ и прямую L на ней. Пусть $\psi: W \rightarrow X$ – раздутие прямой L . Отметим, что неособая кватрика X содержит одномерное семейство прямых (см. [42], [166]). Тогда линейная система $|-K_W|$ свободна и задает эллиптическое расслоение $\phi: W \rightarrow \mathbb{P}^2$. Положим $M_X = \mu\psi(|-K_W|)$ для $\mu \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$\kappa(X, M_X) = \begin{cases} -\infty & \text{для } \mu < 1, \\ 0 & \text{для } \mu = 1, \\ 2 & \text{для } \mu > 1. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.19. Подвижная лог-пара (V, M_V) называется канонической моделью подвижной лог-пары (X, M_X) , если существует бирациональное отображение $\psi: X \dashrightarrow V$ такое, что $M_V = \psi(M_X)$, дивизор $K_V + M_V$ обилен, а особенности (V, M_V) каноничны.

Данное определение совпадает с классическим определением канонической модели в случае пустой границы, а из доказательства леммы 1.3.16 вытекает следующее утверждение¹⁰.

ТЕОРЕМА 1.3.20. *Каноническая модель единственна, если существует.*

Практически во всех приложениях используются подвижные лог-пары с границей, состоящей из единственной линейной системы без неподвижных компонент, умноженной на некоторое положительное рациональное число (см. [46]). С другой стороны, все утверждения, которые могут быть доказаны для подвижных лог-пар, по линейности выводятся из аналогичных утверждений для подвижных лог-пар, чьи границы имеют ровно одну компоненту, но иногда возникает необходимость использовать и более сложно устроенные лог-пары.

¹⁰В случае пустой подвижной границы утверждение теоремы 1.3.20 о единственности канонической модели алгебраического многообразия хорошо известно. В частности, из теоремы 1.3.20 следует, что все бирациональные автоморфизмы канонической модели бирегулярны, но именно это свойство является классическим атрибутом бирационально сверхжесткого многообразия (см. определение 0.3.4). Более того, именно теорема 1.3.20 объясняет геометрическую природу этого феномена в обоих случаях (см. § 1.4).

§ 1.4. Неравенства Нётера–Фано–Исковских

Рассмотрим многообразия Фано X , имеющее терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, такое, что $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X) = 1$. Формально, следующая теорема доказана в [45], однако многие ее частные случаи содержатся в работах [120], [121], [94].

ТЕОРЕМА 1.4.1. *Пусть особенности каждой подвижной лог-пары (X, M_X) являются каноническими, если $K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Тогда X бирационально жестко.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho: X \dashrightarrow Y$ – бирациональное отображение такое, что либо многообразие Y обладает структурой расслоения $\tau: Y \rightarrow Z$ на многообразия, чья кодайра размерность равна $-\infty$, либо Y является многообразием Фано с $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями и $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(Y) = 1$. Требуется показать, что первый случай невозможен, а во втором случае рациональное отображение ρ бигулярно.

Предположим, что существует расслоение $\tau: Y \rightarrow Z$ на многообразия кодайровой размерности $-\infty$. Выберем произвольно достаточно общий очень обильный дивизор H на многообразии Z и рассмотрим подвижную границу $M_Y = \mu|\tau^*(H)|$ для произвольного положительного рационального числа μ . По построению размерность Кодайры $\kappa(Y, M_Y)$ подвижной лог-пары (Y, M_Y) равна $-\infty$. Пусть $M_Y = \mu\rho^{-1}(|\tau^*(H)|)$. Тогда

$$\kappa(X, M_X) = \kappa(Y, M_Y) = -\infty$$

по определению размерности Кодайры (см. лемму 1.3.16). Теперь выберем рациональное число μ так, чтобы $K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Тогда $\kappa(X, M_X) = 0$, поскольку лог-пара (X, M_X) имеет канонические особенности по предположению теоремы. Противоречие.

Пусть $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(Y) = 1$, а Y – многообразие Фано с терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями. Положим $M_Y = \frac{\mu}{n}|-nK_Y|$ и $M_X = \rho^{-1}(M_Y)$ для $n \gg 0$ и $\mu \in \mathbb{Q}$ и выберем μ таким образом, чтобы выполнялось соотношение $K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$. Тогда особенности подвижной лог-пары (X, M_X) каноничны по предположению теоремы. В частности, выполнены равенства $\kappa(X, M_X) = \kappa(Y, M_Y) = 0$, откуда $\mu = 1$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму (см. [76])

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ X & \dashrightarrow \frac{\rho}{\rho} \dashrightarrow & Y \end{array}$$

такую, что W неособо, а g и f – бирациональные морфизмы. Тогда выполнено соотношение

$$\sum_{j=1}^k a(X, M_X, F_j) F_j \sim_{\mathbb{Q}} \sum_{i=1}^l a(Y, M_Y, G_i) G_i,$$

где G_i – g -исключительный дивизор, а F_j – f -исключительный дивизор.

Особенности лог-пар (X, M_X) и (Y, M_Y) каноничны. Более того, особенности подвижной лог-пары (Y, M_Y) терминальны. В частности, все числа $a(X, M_X, F_j)$ неотрицательны, а все числа $a(Y, M_Y, G_i)$ строго положительны. Из леммы 2.19 работы [113] следует, что выполнено равенство $a(X, M_X, E) = a(Y, M_Y, E)$ для каждого

дивизора E на W , откуда следует, что особенности подвижной лог-пары (X, M_X) терминальны.

Возьмем рациональное число $\zeta > 1$ такое, что особенности $(X, \zeta M_X)$ и $(Y, \zeta M_Y)$ терминальны (см. замечание 1.3.4). Тогда дивизоры $K_X + \zeta M_X$ и $K_Y + \zeta M_Y$ обильны, а каждая из подвижных лог-пар $(X, \zeta M_X)$ и $(Y, \zeta M_Y)$ является канонической моделью. Значит, рациональное отображение ρ бирегулярно по теореме 1.3.20.

Утверждение теоремы 1.4.1 верно над произвольным полем характеристики нуль.

ПРИМЕР 1.4.2. Рассмотрим неособую поверхность дель Пеццо S , определенную над $\mathbb{Q}$, такую, что $K_S^2 = 1$ и $\text{rk Pic}(S) = 1$. Тогда из теоремы 1.4.1, равенства $K_S^2 = 1$ и замечания 1.3.9 следует, что S бирационально сверхжестка (см. теорему 1.5.1, [120], [121], [91], [23], [48]).

Можно показать, что утверждение теоремы 1.4.1 является критерием бирациональной сверхжесткости многообразия Фано X при условии существования лог-ПММ.

СЛЕДСТВИЕ 1.4.3. Пусть $\dim(X) = 3$. Тогда X бирационально сверхжестко, если и только если особенности каждой подвижной лог-пары (X, M_X) , для которой выполнено соотношение $K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$, являются каноническими.

Следующее обобщение теоремы 1.4.1 было получено в работе [23].

ТЕОРЕМА 1.4.4. Пусть $\zeta: X \dashrightarrow Z$ — отображение такое, что нормализация общего слоя отображения ζ есть эллиптическая кривая. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \rho \swarrow & & \searrow \tau \\ X & \xleftarrow{\quad \zeta \quad} & Z \end{array},$$

где V — неособое многообразие, τ — эллиптическое расслоение, а морфизм ρ бирационален, возьмем очень обильный дивизор D на Z , рассмотрим линейную систему $\mathcal{D} = |\tau^*(D)|$ и положим $\mathcal{M} = \rho(\mathcal{D})$. Тогда $\text{CS}(X, \gamma \mathcal{M}) \neq \emptyset$, где γ — положительное рациональное число, такое что выполнено соотношение $K_X + \gamma \mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{CS}(X, \gamma \mathcal{M}) = \emptyset$. Тогда особенности лог-пары $(X, \gamma \mathcal{M})$ терминальны, а лог-пара $(X, \varepsilon \mathcal{M})$ является канонической моделью для некоторого рационального числа $\varepsilon > \gamma$ (см. замечание 1.3.4). В частности, выполнены равенства

$$\kappa(V, \varepsilon \mathcal{D}) = \kappa(X, \varepsilon \mathcal{M}) = \dim(X),$$

но $\kappa(V, \varepsilon \mathcal{D}) \leq \dim(Z) = \dim(X) - 1$. Противоречие.

Легко видеть, что утверждение теоремы 1.4.4 можно обобщить на случай бирациональной перестройки в расслоение, чей общий слой имеет кодацирову размерность нуль, либо на случай бирациональной перестройки в многообразие Фано, имеющее произвольные канонические особенности (см. [23]).

§ 1.5. Кубические поверхности

Рассмотрим неособую кубическую поверхность $S \subset \mathbb{P}^3$, которая определена над некоторым полем $\mathbb{F}$ характеристики нуль. Из формулы присоединения следует выполнение рациональной эквивалентности $-K_S \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|_S$. В частности, поверхность S является поверхностью дель Пешо. Хорошо известно, что S рациональна, если поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Однако поверхность S не обязательно рациональна, если поле $\mathbb{F}$ не является алгебраически замкнутым. Имеет место следующий результат (см. [120]–[122], [45], [91]).

ТЕОРЕМА 1.5.1. *Предположим, что выполнено равенство $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(S) = 1$. Тогда S – бирационально жесткая поверхность дель Пеццо.*

В частности, поверхность S нерациональна, если $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(S) = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1.5.2. *Пусть Y – неособая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ и выполнены равенства $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(S) = \mathrm{rk} \mathrm{Pic}(Y) = 1$. Тогда поверхности S и Y бирационально эквивалентны тогда и только тогда, когда они проективно эквивалентны.*

Неособые кубические поверхности с группой Пикара $\mathbb{Z}$ действительно существуют.

ПРИМЕР 1.5.3. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, а уравнение

$$2x^3 + 3y^3 + 5z^3 + 7w^3 = 0 \subset \mathrm{Proj}(\mathbb{Q}[x, y, z, w]) \cong \mathbb{P}^3$$

задает поверхность $S \subset \mathbb{P}^3$. Тогда $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(S) = 1$ (см. [164], [122], [48]).

Покажем, как доказать теорему 1.5.1, используя теорему 1.4.1, на примере доказательства следствия 1.5.2. Предположим, что $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(S) = 1$. В частности, поле $\mathbb{F}$ не алгебраически замкнуто. Пусть $\rho: S \dashrightarrow Y$ – бирациональное отображение такое, что Y – неособая кубическая поверхность с $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(Y) = 1$. Требуется показать, что S и Y проективно эквивалентны, причем последнее следует из того, что поверхности S и Y изоморфны.

Положим $\mathcal{M} = \rho^{-1}(|-K_Y|)$. Тогда существует натуральное число n такое, что выполнена эквивалентность $\mathcal{M} \sim -nK_S$. Рассмотрим подвижную лог-пару $(S, \frac{1}{n}\mathcal{M})$. Тогда особенности лог-пары $(S, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ канонические, если и только если ρ – изоморфизм (см. доказательство теоремы 1.4.1). Предположим, что ρ не является изоморфизмом. Тогда существует определенное над полем $\mathbb{F}$ неприводимое, но возможно геометрически приводимое нульмерное подмногообразие $Z \subset S$ такое, что $\mathrm{mult}_Z(\mathcal{M}) > n$ (см. замечание 1.3.9).

Пусть $\overline{\mathbb{F}}$ – алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}$. Тогда над $\overline{\mathbb{F}}$ подмногообразие Z состоит из конечного числа $\overline{\mathbb{F}}$ -точек $O_1, \dots, O_r$ таких, что $\mathrm{mult}_{O_i}(\mathcal{M}) > n$. В частности, для двух общих кривых C_1 и C_2 в линейной системе $\mathcal{M}$ имеем

$$3n^2 = C_1 \cdot C_2 \geq \sum_{P \in C_1 \cap C_2} \mathrm{mult}_P(C_1) \mathrm{mult}_P(C_2) \geq \sum_{i=1}^r \mathrm{mult}_{O_i}(C_1) \mathrm{mult}_{O_i}(C_2) > n^2 r,$$

откуда следует, что $r \leq 2$.

Пусть $r = 2$, $\alpha: W \rightarrow S$ – раздутие поверхности S в Z , а E – исключительный дивизор раздутия α , который распадается в несвязное объединение неособых рациональных кривых над полем $\overline{\mathbb{F}}$. Тогда из условий

$$\mathrm{mult}_{O_1}(\mathcal{M}) = \mathrm{mult}_{O_2}(\mathcal{M}) > n$$

сразу следует, что W – неособая поверхность дель Пешо такая, что W определена над полем $\mathbb{F}$ и $K_W^2 = 1$. Хорошо известно, что поверхность W является гиперповерхностью степени 6 в $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$, а естественная проекция $W \rightarrow \mathbb{P}(1, 1, 2)$ является двулистным накрытием и совпадает с отображением $\phi|_{-2K_W}$. Пусть τ – бигекулярная инволюция поверхности W , переставляющая слои накрытия $\phi|_{-2K_W}$, и $\sigma_1 = \alpha \circ \tau \circ \alpha^{-1}$. Тогда

$$\begin{cases} \tau^*(\alpha^*(-K_S)) = 5\alpha^*(-K_S) - 6E, \\ \tau^*(E) = 4\alpha^*(-K_S) - 5E. \end{cases} \quad (1.5.4)$$

Пусть $r = 1$, т.е. Z является $\mathbb{F}$ -точкой. Рассмотрим раздутие $\beta: U \rightarrow S$ кубической поверхности S в точке Z и обозначим исключительный дивизор бирационального морфизма β символом F . Тогда из неравенства $\text{mult}_Z(\mathcal{M}) > n$ сразу следует, что U – неособая поверхность дель Пешо такая, что U определена над полем $\mathbb{F}$ и $K_U^2 = 2$, причем поверхность U является гиперповерхностью степени 4 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$, а естественная проекция поверхности U на $\mathbb{P}^2$ является двулистным накрытием, которое совпадает с антиканоническим отображением $\phi|_{-K_U}$. Пусть η – инволюция поверхности U , переставляющая слои двулистного накрытия $\phi|_{-K_U}$, и $\sigma_1 = \beta \circ \eta \circ \beta^{-1}$. Тогда

$$\begin{cases} \eta^*(\beta^*(-K_S)) = 2\beta^*(-K_S) - 3F, \\ \eta^*(F) = 4\beta^*(-K_S) - 2F. \end{cases} \quad (1.5.5)$$

Инволюция σ_1 бирациональна и небигекулярна. В случае $r = 2$ инволюцию σ_1 принято называть инволюцией Бертини, а в случае $r = 1$ бирациональную инволюцию σ_1 принято называть инволюцией Гейзера. Пусть $\mathcal{B} = \sigma_1(\mathcal{M})$, а k – такое натуральное число, что выполнена рациональная эквивалентность $\mathcal{B} \sim -kK_S$. Тогда из соотношений (1.5.4) и (1.5.5) сразу следует выполнение неравенства $k < n$. Таким образом, из доказательства теоремы 1.4.1 следует, что либо бирациональное отображение $\rho \circ \sigma_1: S \dashrightarrow Y$ является изоморфизмом, либо особенности подвижной лог-пары $(S, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ не являются каноническими. В последнем случае мы можем применить к подвижной лог-паре $(S, \frac{1}{k}\mathcal{B})$ аргументы, примененные нами ранее к подвижной лог-паре $(S, \frac{1}{n}\mathcal{M})$. Таким образом, мы показали, что существуют $s \leq n$ бирациональных инволюций Бертини или Гейзера $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ таких, что отображение $\rho \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_s$ является изоморфизмом. В частности, поверхности S и Y изоморфны.

Легко видеть, что аргументы приведенного доказательства следствия 1.5.2 доказывают теорему 1.5.1, а также и следующий хорошо известный результат.

ТЕОРЕМА 1.5.6. *Пусть $\text{rk Pic}(S) = 1$. Тогда группа $\text{Bir}(S)$ порождена проективными автоморфизмами поверхности S , инволюциями Бертини и инволюциями Гейзера.*

Возможные соотношения между инволюциями Бертини и инволюциями Гейзера поверхности S описаны в теореме 7.8 главы V книги [122]. Из доказательства следствия 1.5.2 легко увидеть, что результаты, аналогичные теоремам 1.5.1 и 1.5.6, имеют место для поверхностей дель Пешо степени 1 и 2 (см. [120], [121]).

§ 1.6. Программа Саркисова

Рассмотрим морфизм $\pi: X \rightarrow Z$ такой, что многообразие X имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные и терминальные особенности, дивизор $-K_X$ является π -обильным, $\dim(Z) <$

$\dim(X)$, выполнено равенство $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X) = \mathrm{rk} \mathrm{Pic}(Z) + 1$, а π имеет связные слои. В этом случае многообразие X принято называть Мори расслоенным пространством, а морфизм π принято называть расслоением Мори. В случае когда Z – точка, многообразие X является многообразием Фано с $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями таким, что $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X) = 1$.

Когда Z – точка, теорема 1.4.1 дает необходимое условие, а в трехмерном случае и критерий (см. следствие 1.4.3) бирациональной сверхжесткости многообразия X . Естественнo рассмотреть следующие два вопроса:

- как обобщить утверждение теоремы 1.4.1 и утверждение следствия 1.4.3 на случай $\dim(Z) > 0$;
- как обобщить утверждение теоремы 1.4.1 на случай, когда Z – точка, но многообразие X не является бирационально жестким.

В определенном смысле, ответом на оба поставленных вопроса является программа Саркисова (см. [45]), которая доказана пока только в размерности 3, причем даже в трехмерном случае ее доказательство нетривиально. С другой стороны, геометрический смысл программы Саркисова легко понять и почувствовать, не вникая в технические тонкости доказательства обрыва последовательности элементарных линков. В оставшейся части данного параграфа мы покажем, как логически подойти к трехмерной программе Саркисова, исходя из двух поставленных выше вопросов.

Пусть $\dim(X) = 3$. Тогда естественным обобщением теоремы 1.4.1, утверждение которого легко следует из доказательства теоремы 1.4.1, является следующий результат, который в свою очередь является теоремой 4.2 работы [45].

ТЕОРЕМА 1.6.1. *Пусть $\bar{\pi}: \bar{X} \rightarrow \bar{Z}$ – расслоение Мори, а $\rho: X \dashrightarrow \bar{X}$ – бирациональное отображение. Возьмем очень обильный дивизор D на $\bar{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что линейная система $|-nK_{\bar{X}} + \bar{\pi}^*(nD)|$ не имеет базисных точек, и обозначим символом $\mathcal{M}$ собственный прообраз этой линейной системы на многообразии X . Рассмотрим положительное рациональное число μ такое, что $K_X + \mu\mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(H)$ для некоторого дивизора H на многообразии Z . Предположим, что подвижная лог-пара $(X, \mu\mathcal{M})$ имеет канонические особенности, а дивизор H является численно эффективным. Тогда ρ – изоморфизм и существует изоморфизм $\alpha: Z \rightarrow \bar{Z}$ такой, что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho} & \bar{X} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ Z & \xrightarrow{\alpha} & \bar{Z} \end{array} \quad (1.6.2)$$

Получить критерий бирациональной сверхжесткости расслоения Мори $\pi: X \rightarrow Z$, аналогичный следствию 1.4.3, в терминах численных свойств подвижных лог-пар на многообразии X невозможно при $\dim(Z) \neq 0$. Основная причина этого в том, что бирациональная сверхжесткость (соответственно жесткость) расслоения Мори π определяется как единственность Мори расслоенного пространства в данном классе бирациональной эквивалентности с точностью до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow & \bar{X} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ Z & \dashrightarrow & \bar{Z} \end{array}, \quad (1.6.3)$$

где ρ и α – бирациональные, а не бирегулярные изоморфизмы, причем рациональное отображение ρ индуцирует бирегулярный изоморфизм общих слоев расслоений π и $\bar{\pi}$ (соответственно бирациональный изоморфизм общих слоев расслоений π и $\bar{\pi}$, которые при этом изоморфны). В частности, если π бирационально сверхжестко (соответственно жестко), то общий слой расслоения π является бирационально сверхжестким (соответственно жестким) многообразием Фано, которое рассматривается как многообразие, определенное над полем рациональных функций многообразия Z . Однако, как видно из теоремы 1.6.1, удовлетворение определенных численных свойств подвижными лог-парами на Мори расслоенном пространстве X скорее повлекут существование коммутативной диаграммы (1.6.2).

Несложно доказать следующий критерий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6.4. *Расслоение Мори $\pi: X \rightarrow Z$ бирационально сверхжестко тогда и только тогда, когда $\kappa(X, M_X) \geq 0$ для каждой подвижной лог-пары (X, M_X) , для которой выполнено соотношение $K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(H)$, где H – дивизор на многообразии Z .*

В случае $\dim(Z) = 1$ в утверждении предложения 1.6.4 неявно содержится условие несуществования *сверхмаксимальной особенности* (см. [150]), а в случае $\dim(Z) = 2$ геометрический смысл предложения 1.6.4 раскрыт в работе [162]. Утверждение предложения 1.6.4 есть следствие 1.4.3 при $\dim(Z) = 0$.

Теперь предположим, что Мори расслоенное пространство X не является бирационально сверхжестким, т.е. существует расслоение Мори $\bar{\pi}: \bar{X} \rightarrow \bar{Z}$, но не существует коммутативной диаграммы (1.6.3). Возьмем очень обильный дивизор D на $\bar{Z}$ и положим

$$\mathcal{M} = \rho^{-1}(|-nK_{\bar{X}} + \bar{\pi}^*(nD)|)$$

для $n \gg 0$. Рассмотрим положительное рациональное число μ такое, что выполнено соотношение $K_X + \mu\mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(H)$ для некоторого дивизора H на многообразии Z . Тогда из теоремы 1.6.1 следует, что либо особенности подвижной лог-пары $(X, \mu\mathcal{M})$ не являются каноническими, либо дивизор H не является численно эффективным.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6.5. Легко видеть, что $6/\mu \in \mathbb{N}$ в случае, когда $\dim(Z) > 0$. В случае, когда многообразие Z является точкой, из работы [103] следует, что многообразие X принадлежит конечному числу деформационных семейств, откуда следует существование некоторой абсолютной константы λ такой, что $\lambda/\mu \in \mathbb{N}$. Аналогичный результат верен в более общих предположениях, например, для произвольных трехмерных многообразий Фано с каноническими особенностями (см. [12], [116], [13]). Ограниченность неособых многообразий Фано произвольной фиксированной размерности доказана в работах [137], [114]).

Сначала рассмотрим случай, когда особенности подвижной лог-пары $(X, \mu\mathcal{M})$ канонические, но дивизор H не является численно эффективным. В частности, многообразие Z не является точкой и возможны два случая:

- $\dim(Z) = 1$, т.е. π – расслоение на поверхности дель Пеццо;
- $\dim(Z) = 2$, т.е. π – расслоение на коники.

Пусть $\dim(Z) = 1$. В этом случае $\text{rk Pic}(X) = 2$. Пусть $\overline{\text{NE}}(X) \subset \mathbb{R}^2$ – замыкание конуса одномерных эффективных циклов на многообразии X . Тогда конус $\overline{\text{NE}}(X)$ двумерен и, в частности, он обладает ровно двумя экстремальными лучами R_1 и R_2 , один из которых, скажем луч R_1 , порожден кривой, содержащейся в слоях π . С другой стороны, из численной неэффективности дивизора H следует, что $(K_X + \mu\mathcal{M}) \cdot R_2 < 0$.

Теперь из лог-ПММ следует, что существует стягивание $\psi: X \rightarrow Y$ такое, что Y нормально, морфизм ψ сюръективен и имеет связные слои и любая кривая $C \subset X$ стягивается морфизмом ψ в точку в том и только том случае, когда $C \in R_2$. Возможны следующие варианты:

- морфизм ψ бирационален и стягивает кривую $C \subset X$;
- морфизм ψ бирационален и стягивает неприводимый дивизор $E \subset X$;
- морфизм ψ есть расслоение на поверхности дель Пешо;
- морфизм ψ есть расслоение на коники;

причем, в случае, когда ψ – малое стягивание, существует лог-флип $\gamma: X \dashrightarrow \hat{X}$ для подвижной лог-пары $(X, \mu\mathcal{M})$, и мы можем применить все предыдущие аргументы к подвижной лог-паре $(\hat{X}, \mu\gamma(\mathcal{M}))$. Значит, имеется диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & X \xrightarrow{\xi} W & \\ \pi \swarrow & & \searrow v \\ Z & & U, \end{array} \quad (1.6.6)$$

где ξ – композиция флипов, флопов и антифлипов, а v – либо дивизориальное стягивание, либо расслоение на поверхности дель Пешо, либо расслоение на коники. В случае, когда морфизм v не является бирациональным, положим $X' = W$, $Z' = U$ и $\pi' = v$, а в противном случае пусть $X' = U$, Z' – точка, а $\pi': X' \rightarrow Z'$ – сюръекция. Тогда π' – расслоение Мори.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6.7. В терминологии работ [45] и [46] или теоремы 1.6.14 построенная бирациональная диаграмма (1.6.6) является линком Саркисова типа IV в случае, когда v является расслоением Мори, и линком Саркисова типа III в случае, когда v бирационально.

Теперь пусть $\dim(Z) = 2$. Как и прежде, мы считаем, что дивизор H не является численно эффективным. Ситуация в этом случае не сильно отличается от предыдущего случая, но количество возможных бирациональных комбинаций становится больше, поскольку многообразие Z является поверхностью, а не кривой, и обладает своей бирациональной геометрией. Существует эффективный дивизор Δ на многообразии Z такой, что имеет место рациональная эквивалентность $H \sim_{\mathbb{Q}} K_Z + \Delta$, а лог-пара (Z, Δ) имеет лог-терминальные особенности (см. [107], [105]). Следовательно, мы можем применить лог-ПММ к построенной лог-паре (Z, Δ) , при этом соотношение

$$K_X + \mu\mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(K_Z + \Delta)$$

сразу обеспечит возможность *синхронного* применения лог-ПММ к лог-паре (Z, Δ) и подвижной лог-паре $(X, \mu\mathcal{M})$. В частности, существует сюръективное отображение со связными слоями $\tau: Z \rightarrow S$ такое, что возможны следующие варианты:

- $\dim(S) = 2$, т.е. морфизм τ стягивает неприводимую рациональную кривую;
- $\dim(S) = 1$, т.е. морфизм τ является $\mathbb{P}^1$ -расслоением над кривой S ;
- $\dim(S) = 0$, т.е. поверхность Z является поверхностью дель Пешо с лог-терминальными особенностями такой, что $\text{rk Pic}(Z) = 1$;

причем случай $\dim(S) = 0$ полностью аналогичен случаю $\dim(Z) = 1$, поскольку в этом случае $\text{rk Pic}(X) = 2$. Применяя лог-ПММ, мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 & X \xrightarrow{\xi} W & \\
 \pi \swarrow & & \searrow v \\
 Z & & U, \\
 \tau \searrow & & \swarrow \zeta \\
 & S &
 \end{array} \quad (1.6.8)$$

где отображение ξ бирационально и является изоморфизмом в коразмерности один, т.е. является композицией конечного числа флопов, флипов и антифлипов. Более того, в случае, когда $\dim(S) = 2$, морфизм v является дивизориальным стягиванием, а ζ является расслоением на коники. В случае, когда $\dim(S) = 1$, морфизм v является либо расслоением на коники, либо расслоением на поверхности дель Пеццо, причем в последнем случае отображение ζ просто изоморфизм. В случае когда $\dim(S) = 0$, морфизм v либо бирационален, либо является расслоением Мори. В случае, когда построенный морфизм v является расслоением Мори, положим $X' = W$, $Z' = U$ и $\pi' = v$. В случае, когда морфизм v бирационален, положим $X' = U$, $Z' = S$ и $\pi' = \zeta$. Тогда π' – расслоение Мори.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6.9. В терминологии работ [45] и [46] или теоремы 1.6.14 построенная бирациональная диаграмма (1.6.8) является линком Саркисова типа III в случае, когда v бирационален, и линком Саркисова типа IV в противном случае.

Таким образом, предположение о том, что особенности лог-пары $(X, \mu\mathcal{M})$ канонические, но при этом дивизор H не является численно эффективным, привело к построению бирациональной перестройки Мори расслоенного пространства X в Мори расслоенное пространство X' . Пусть $\sigma: X \dashrightarrow X'$ – построенная перестройка, $\mathcal{M}' = \sigma(\mathcal{M})$ и μ' – рациональное число такое, что выполнено соотношение $K_{X'} + \mu'\mathcal{M}' \sim_{\mathbb{Q}} \pi'^*(H')$ для некоторого дивизора H' на многообразии Z' . Тогда либо существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{\rho \circ \sigma^{-1}} & \overline{X} \\
 \pi' \downarrow & & \downarrow \overline{\pi} \\
 Z' & \xrightarrow{\alpha} & \overline{Z},
 \end{array} \quad (1.6.10)$$

где $\rho \circ \sigma^{-1}$ и α – изоморфизмы, либо особенности подвижной лог-пары $(X', \mu'\mathcal{M}')$ не являются каноническими, либо дивизор H' не является численно эффективным.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6.11. По построению выполнено неравенство $\mu' > \mu$, где μ' принадлежит множеству с условием обрыва возрастающих цепей (см. замечание 1.6.5).

Теперь рассмотрим случай, когда особенности подвижной лог-пары $(X, \nu\mathcal{M})$ не являются каноническими. Тогда подвижная лог-пара $(X, \nu\mathcal{M})$ канонична, но не терминальна для некоторого рационального числа $\nu < \mu$ и либо особенности лог-пары

$(X, \mu\mathcal{M})$ являются каноническими над общей точкой многообразия Z , либо не являются. В первом случае из лог-ПММ следует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ Z & \xrightarrow{\alpha} & Z', \end{array}$$

где π' – расслоение Мори, σ и α – бирациональные отображения и σ индуцирует бигеометрический изоморфизм общих слоев расслоений π и π' . С другой стороны, в случае, когда многообразие Z является точкой, из лог-ПММ и существования экстремального раздутия для лог-пар, имеющих канонические особенности, сразу следует существование диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & V \xrightarrow{\xi} W & \\ \chi \swarrow & & \searrow v \\ X & & U, \end{array} \quad (1.6.12)$$

где χ – дивизориальное стягивание такое, что

$$K_V + \nu\chi^{-1}(\mathcal{M}) \sim_{\mathbb{Q}} \chi^*(K_X + \nu\mathcal{M}),$$

отображение ξ является изоморфизмом в коразмерности один, а ν – либо дивизориальное стягивание, либо расслоение на поверхности дель Пеццо, либо расслоение на коники.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6.13. В терминологии работ [45] и [46] или теоремы 1.6.14 построенная бирациональная диаграмма (1.6.12) является линком Саркисова типа III.

Приведенные аргументы в рассмотренных нами случаях несложно обобщить на все оставшиеся случаи и получить еще несколько примеров элементарных небирегулярных бирациональных перестроек Мори расслоенного пространства X в некоторое отличное от него Мори расслоенное пространство. При этом теорема 1.6.1 обеспечивает либо разложение бирационального преобразования ρ в композицию конечного числа таких элементарных бирациональных преобразований, либо необходимые условия существования еще одного элементарного преобразования. Единственный нетривиальный вопрос – может ли существовать бесконечная цепочка таких преобразований? Ответ на него, конечно, отрицательный (см. [45]). Таким образом, имеется следующая теорема, утверждение которой и есть трехмерная программа Саркисова.

ТЕОРЕМА 1.6.14. Пусть $\pi: X \rightarrow Z$ и $\bar{\pi}: \bar{X} \rightarrow \bar{Z}$ – расслоения Мори, $\dim(X) = \dim(\bar{X}) = 3$, и существует бирациональное отображение $\rho: X \dashrightarrow \bar{X}$. Тогда отображение ρ является композицией $\eta \circ \rho_n \circ \dots \circ \rho_1$, где $\eta: \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ – бигеометрический автоморфизм такой, что существует изоморфизм $\omega: \bar{Z} \rightarrow \bar{Z}$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} & \xrightarrow{\eta} & \bar{X} \\ \bar{\pi} \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ \bar{Z} & \xrightarrow{\omega} & \bar{Z}, \end{array}$$

а $\rho_{i+1}: X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ – бирациональное отображение, называемое также элементарным линком или линком Саркисова, такое, что ρ_{i+1} определяется одним из следующих способов:

- линк типа I, $\rho_{i+1} = \xi_{i+1} \circ \chi_i^{-1}$ и существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & V_i & \xrightarrow{\xi_{i+1}} X_{i+1} \\ \chi_i \swarrow & & \downarrow \pi_{i+1} \\ X_i & & \\ \pi_i \downarrow & \xleftarrow{\tau_{i+1}} & Z_{i+1} \\ Z_i & & \end{array};$$

- линк типа II, $\rho_{i+1} = \check{\chi}_{i+1} \circ \xi_{i+1} \circ \hat{\chi}_i^{-1}$ и существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & \hat{V}_i & \xrightarrow{\xi_{i+1}} & \check{V}_{i+1} & \\ \hat{\chi}_i \swarrow & & & & \searrow \check{\chi}_{i+1} \\ X_i & & & & X_{i+1} \\ \pi_i \searrow & & & & \swarrow \pi_{i+1} \\ Z_i & \xRightarrow{\quad} & & & Z_{i+1} \end{array};$$

- линк типа III, $\rho_{i+1} = \chi_{i+1} \circ \xi_{i+1}$ и существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\xi_{i+1}} & V_i \\ \pi_i \downarrow & & \searrow \chi_{i+1} \\ & & X_{i+1} \\ & & \downarrow \pi_{i+1} \\ Z_i & \xrightarrow{\tau_{i+1}} & Z_{i+1} \end{array};$$

- линк типа IV, $\rho_{i+1} = \xi_{i+1}$ и существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\xi_{i+1}} & X_{i+1} \\ \pi_i \downarrow & & \downarrow \pi_{i+1} \\ Z_i & & Z_{i+1} \\ \alpha_i \searrow & & \swarrow \beta_i \\ & S & \end{array};$$

где $X_0 = X$, $X_n = \overline{X}$, $\pi_0 = \pi$, $\pi_n = \overline{\pi}$, $Z_0 = Z$, $Z_n = \overline{Z}$, многообразия V_i и X_i имеют терминальные и $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, π_i – расслоение Мори, ξ_{i+1} – композиция конечного числа флипов, флопов и антифлипов, χ_i , $\hat{\chi}_i$ и $\check{\chi}_i$ – бирациональные стягивания неприводимого дивизора, τ_{i+1} , α_i и β_i – сюръективные отображения со связными слоями.

Конечно, утверждение теоремы 1.6.14 верно и для алгебраических поверхностей. В двумерном случае утверждение теоремы 1.6.14 намного проще и конкретнее, поскольку существует всего два типа Мори расслоенных поверхностей – $\mathbb{P}^2$ и $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ – векторное расслоение на некоторой неособой кривой, экстремальные бирациональные стягивания поверхностей суть просто обыкновенные сдутия в неособые точки, а изоморфизмы в коразмерности два являются изоморфизмами. Вместо того, чтобы переписывать утверждение теоремы 1.6.14 для алгебраических поверхностей, докажем следующий классический результат, используя программу Саркисова и следуя аргументам работы [1].

ТЕОРЕМА 1.6.15. *Группа $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ порождена элементами группы $\text{Aut}(\mathbb{P}^2) \cong \text{PGL}(3, \mathbb{C})$ и инволюцией τ такой, что $\tau(x : y : z) = (yz : xz : xy)$, где $(x : y : z)$ – однородные координаты на $\mathbb{P}^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть σ – бирациональный автоморфизм $\mathbb{P}^2$. Под отображением Кремоны будем понимать преобразование, раздувающее 3 точки на плоскости $\mathbb{P}^2$, не лежащие на одной прямой, которое стягивает прообразы трех прямых, проходящих через эти точки, в некоторые 3 точки на $\mathbb{P}^2$. Требуется показать, что σ раскладывается в композицию отображений Кремоны.

Пусть τ – отображение Кремоны. Тогда существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & \hat{S} & & \check{S} & \\
 \hat{\alpha} \swarrow & & \hat{\beta} \searrow & \check{\beta} \swarrow & \check{\alpha} \searrow \\
 \mathbb{F}_1 & & \mathbb{F}_0 & \Longrightarrow & \mathbb{F}_0 & & \mathbb{F}_1 \\
 \hat{\pi} \swarrow & & \pi \searrow & & \check{\pi} \swarrow & & \pi \searrow \\
 & \mathbb{P}^1 & & & \mathbb{P}^1 & & \\
 \hat{\gamma} \swarrow & & & & & & \check{\gamma} \searrow \\
 \mathbb{P}^2 & \text{-----} \tau \text{-----} & & & & & \mathbb{P}^2
 \end{array} \quad (1.6.16)$$

где $\hat{\gamma}$ и $\check{\gamma}$ – раздутия точки, π – естественная проекция, $\hat{\pi}$ и $\check{\pi}$ – различные проекции поверхности $\mathbb{F}_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\hat{\alpha}$ и $\check{\alpha}$ – раздутия точки, не лежащей на исключительном сечении поверхности $\mathbb{F}_1$, а $\hat{\beta}$ и $\check{\beta}$ – стягивание собственного прообраза слоев, в которых были раздуты точки морфизмами $\hat{\alpha}$ и $\check{\alpha}$ соответственно. Коммутативная диаграмма (1.6.16) – факторизация отображения τ на элементарные линки. Бирациональные отображения $\hat{\beta} \circ \hat{\alpha}^{-1}$ и $\check{\alpha} \circ \check{\beta}^{-1}$ суть элементарные преобразования поверхности $\mathbb{F}_1$ в поверхность $\mathbb{F}_0$ и линейчатой поверхности $\mathbb{F}_0$ в линейчатую поверхность $\mathbb{F}_1$ соответственно, построение которых можно обобщить на общий случай и определить элементарное преобразование линейчатой поверхности $\mathbb{F}_k$ в линейчатую поверхность $\mathbb{F}_{k \pm 1}$.

Отображение σ допускает следующую факторизацию на элементарные линки:

$$\begin{array}{c} \mathbb{F}_{k_0} \xrightarrow{\psi_1} \mathbb{F}_{k_1} \xrightarrow{\psi_2} \dots \xrightarrow{\psi_{n-1}} \mathbb{F}_{k_{n-1}} \xrightarrow{\psi_n} \mathbb{F}_{k_n} \\ \downarrow \tilde{v} \qquad \qquad \qquad \downarrow \check{v} \\ \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}^2, \end{array} \quad (1.6.17)$$

где $k_i \geq 0$ – целое число такое, что $k_{i+1} = k_i \pm 1$ и $k_0 = k_n = 1$, ψ_{k_i} – элементарное преобразование линейчатой поверхности $\mathbb{F}_{k_{i-1}}$ в поверхность $\mathbb{F}_{k_i}$, а $\tilde{v}$ и $\check{v}$ – раздутия точек.

Назовем число $\max(k_1, \dots, k_n) \geq 1$ высотой факторизации (1.6.17) и будем говорить что факторизация (1.6.17) минимальна, если $k_i \neq 1$ для всех индексов i . Из коммутативной диаграммы (1.6.16) следует, что σ есть композиция отображений Кремоны в случае, когда высота факторизации (1.6.17) равна 1. Проведем индукцию по высоте факторизации (1.6.17). Предположим, что высота факторизации (1.6.17) не меньше двух. Можно считать, что факторизация (1.6.17) минимальна, поскольку в противном случае σ можно представить как композицию бирациональных автоморфизмов, для которых существует минимальная факторизация, чья высота не превышает высоты факторизации (1.6.17), и требуемое индуктивное утверждение можно доказать для каждого бирационального автоморфизма по отдельности.

Из сделанных предположений следует, что $k_1 = 2$. Пусть $\xi: \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{F}_0$ – элементарное преобразование, неопределенное в достаточно общей точке поверхности $\mathbb{F}_1$. Тогда факторизация (1.6.17) индуцирует коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{c} \mathbb{F}_1 \xrightarrow{\xi} \mathbb{F}_0 \xrightarrow{\eta} \mathbb{F}_1 \qquad \mathbb{F}_1 \xrightarrow{\xi^{-1}} \mathbb{F}_0 \xrightarrow{\phi_1} \dots \xrightarrow{\phi_n} \mathbb{F}_1 \\ \swarrow \bar{v} \qquad \searrow \tilde{v} \qquad \searrow \check{v} \qquad \swarrow \acute{v} \\ \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\nu} \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\chi} \mathbb{P}^2, \end{array} \quad (1.6.18)$$

где $\bar{v}$, $\tilde{v}$, $\check{v}$, $\acute{v}$ – раздутия точек, ϕ_i и η – элементарное преобразование линейчатых поверхностей, $\sigma = \chi \circ \nu$, а ν есть отображение Кремоны.

Можно считать, что коммутативная диаграмма (1.6.18) содержит факторизацию бирационального отображения χ на элементарные линки, которая, однако, уже не обязательно минимальна. Тем не менее, из построения следует, что высота факторизации (1.6.18) строго меньше, чем высота факторизации (1.6.17). Значит, бирациональный автоморфизм χ представим в качестве композиции конечного числа отображений Кремоны по предположению индукции, но $\sigma = \chi \circ \nu$, где ν – отображение Кремоны.

Определяющие соотношения для образующих группы $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ найдены в работе [67], а более простое решение этого вопроса получено в работе [88]. В случае алгебраически незамкнутого поля определения образующие группы $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ описаны в работе [89], а соотношения между ними в работе [97]. Тем не менее, с двумерной группой Кремоны связано много открытых вопросов. Например, имеет место следующая гипотеза (см. [68]).

ГИПОТЕЗА 1.6.19. *Группа $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ проста.*

Отметим, что утверждение теоремы 1.6.14 верно также для поверхностей, определенных над любым, не обязательно алгебраически замкнутым совершенным полем (см. [91]).

§ 1.7. Лог-присоединение и связность

В силу естественных причин, подвижные лог-пары (см. определение 1.3.1) хорошо отражают бирациональную геометрию данного многообразия (см. теорему 1.3.20), канонические и терминальные особенности – наиболее естественный класс особенностей для таких лог-пар, а многие важные вопросы бирациональной геометрии могут быть очень просто сформулированы в терминах подвижных лог-пар (см. теорему 1.4.1).

С другой стороны, можно рассматривать и лог-пары, имеющие как подвижные, так и неподвижные компоненты, по аналогии с тем, что существуют линейные системы, имеющие подвижную и неподвижную часть. Более того, в принципе, можно рассматривать и лог-пары с отрицательными коэффициентами при компонентах границы, причем такие допущения делать не только можно, но и нужно по следующим соображениям:

- даже при элементарных раздутиях, наиболее точно отражает свойство подвижной лог-пары на раздутом многообразии не ее естественно определенный собственный прообраз, а ее лог-прообраз (см. определение 1.7.1), который может иметь как неподвижные компоненты, так и отрицательные коэффициенты компонент границ;
- центры канонических особенностей (см. определение 1.3.8) не обладают хорошими геометрическими свойствами, когда рассматриваются вне бирационального контекста, в отличие от центров лог-канонических особенностей (см. определение 1.7.2), чья роль в геометрии огромна (см. [106], [113], [111], [168], [154], [63]).

В данном параграфе не будут накладываться никакие ограничения на коэффициенты границ, хотя это не очень удобно, а порой и излишне. В частности, границы могут не быть эффективными, если это не оговорено особо, однако все лог-канонические дивизоры будут считаться $\mathbb{Q}$ -карты дивизорами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7.1. Для лог-пары (X, B_X) и бирационального морфизма $f: V \rightarrow X$ лог-пара (V, B^V) называется лог-поднятием лог-пары (X, B_X) , если выполнены соотношения

$$B^V = f^{-1}(B_X) - \sum_{i=1}^n a(X, B_X, E_i) E_i \quad \text{и} \quad K_V + B^V \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X),$$

где $a(X, B_X, E_i) \in \mathbb{Q}$ и дивизор E_i является f -исключительным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7.2. Собственное неприводимое подмногообразие $Y \subset X$ называется центром лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X) , если существуют бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$ и, не обязательно f -исключительный, дивизор $E \subset W$, который содержится в носителе эффективной части дивизора $[B^Y]$. Множество всех центров лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X) обозначим символом $\text{LCS}(X, B_X)$, а объединение центров лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X) , рассматриваемое как собственное подмножество многообразия X , будем называть множеством лог-канонических особенностей и обозначать символом $\text{LCS}(X, B_X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7.3. Пусть (X, B_X) – лог-пара, H – достаточно общее гиперплоское сечение многообразия X , и $Z \in \mathbb{LCS}(X, B_X)$. Тогда $Z \cap H \in \mathbb{LCS}(H, B_X|_H)$.

Рассмотрим лог-пару (X, B_X) , где $B_X = \sum_{i=1}^k a_i B_i$, $a_i \in \mathbb{Q}$, а B_i является либо эффективным, неприводимым и приведенным дивизором на многообразии X , либо линейной системой на X , не имеющей неподвижных компонент. Скажем, что граница B_X эффективна, если выполнено неравенство $a_i \geq 0$ для всех индексов i . Скажем, что B_X подвижна, если B_i – линейная система без неподвижных компонент для всех индексов i .

ПРИМЕР 1.7.4. Рассмотрим неособую точку O на многообразии X . Предположим, что точка O принадлежит множеству $\mathbb{LCS}(X, B_X)$. Пусть $f: V \rightarrow X$ – обыкновенное раздутие неособой точки O , а E – f -исключительный дивизор. Тогда либо $E \in \mathbb{LCS}(V, B^V)$, либо существует подмногообразие $Z \subsetneq E$ такое, что $Z \in \mathbb{LCS}(V, B^V)$, причем $E \in \mathbb{LCS}(V, B^V)$ в том и только том случае, когда $\text{mult}_O(B_X) = \dim(X)$.

Пусть $f: Y \rightarrow X$ – бирациональный морфизм, многообразие Y неособо, а объединение всех дивизоров $f^{-1}(B_i)$ и всех f -исключительных дивизоров образует дивизор с простыми нормальными пересечениями. В этом случае бирациональный морфизм f называется лог-разрешением лог-пары (X, B_X) и выполнено соотношение $K_Y + B^Y \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X)$ для лог-поднятия (Y, B^Y) лог-пары (X, B_X) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7.5. Подсхема, ассоциированная с пучком идеалов

$$\mathcal{I}(X, B_X) = f_*([-B^Y]),$$

называется подсхемой лог-канонических особенностей и обозначается $\mathcal{L}(X, B_X)$.

Отметим, что $\text{Supp}(\mathcal{L}(X, B_X)) = \text{LCS}(X, B_X) \subset X$. Следующий результат является теоремой Шокурова об обращении в нуль (см. [168]).

ТЕОРЕМА 1.7.6. Пусть граница B_X эффективна, а H – произвольный численно эффективный и объемный дивизор на многообразии X такой, что дивизор $D = K_X + B_X + H$ есть дивизор Картье. Тогда $H^i(X, \mathcal{I}(X, B_X) \otimes D) = 0$ для всех $i > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль

$$R^i f_*(f^*(K_X + B_X + H) + [-B^W]) = 0$$

для всех $i > 0$ (см. теорему 1.2.3 в [106]). Из вырождения соответствующей спектральной последовательности и равенства пучков

$$R^0 f_*(f^*(K_X + B_X + H) + [-B^W]) = \mathcal{I}(X, B_X) \otimes D$$

следует, что для всех $i \geq 0$ имеет место равенство групп когомологий

$$H^i(X, \mathcal{I}(X, B_X) \otimes D) = H^i(W, f^*(K_X + B_X + H) + [-B^W]),$$

но для $i > 0$ группы когомологий

$$H^i(W, f^*(K_X + B_X + H) + [-B^W])$$

тривиальны по теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль.

Рассмотрим следующее применение теоремы 1.7.6 (см. [33]).

ЛЕММА 1.7.7. Пусть Σ – конечное подмножество в $\mathbb{P}^n$, а $\mathcal{M}$ – линейная система, состоящая из гиперповерхностей степени k , содержащих Σ . Предположим, что базисное множество линейной системы $\mathcal{M}$ нульмерно. Тогда точки множества Σ накладывают независимые линейные условия на гиперповерхности в $\mathbb{P}^n$, имеющие степень $n(k-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Λ – конечное подмножество в $\mathbb{P}^n$, которое является базисным множеством линейной системы $\mathcal{M}$. Тогда $\Sigma \subseteq \Lambda$. Рассмотрим общие дивизоры $H_1, \dots, H_s$ в линейной системе $\mathcal{M}$ для $s \gg 0$, положим $X = \mathbb{P}^n$ и $B_X = \frac{n}{s} \sum_{i=1}^s H_i$. Тогда

$$\text{Supp}(\mathcal{L}(X, B_X)) = \Lambda,$$

где $\mathcal{L}(X, B_X)$ – подсхема лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X) .

Чтобы доказать требуемое утверждение, достаточно для произвольно выбранной точки $P \in \Sigma$ построить гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени $n(k-1)$, которая проходит через все точки множества $\Sigma \setminus P$, но не проходит через точку P .

Пусть $\Sigma \setminus P = \{P_1, \dots, P_k\}$, где P_i – точки многообразия $X = \mathbb{P}^n$, а $f: V \rightarrow X$ – раздутие всех точек множества $\Sigma \setminus P$. Тогда

$$K_V + (B_V + \sum_{i=1}^k (\text{mult}_{P_i}(B_X) - n)E_i) + f^*(H) = f^*(n(k-1)H) - \sum_{i=1}^k E_i,$$

где $E_i = f^{-1}(P_i)$, $B_V = f^{-1}(B_X)$, а H – гиперплоскость в $\mathbb{P}^n$. По построению

$$\text{mult}_{P_i}(B_X) = n \text{mult}_{P_i}(\mathcal{M}) \geq n,$$

а дивизор $\widehat{B}_V = B_V + \sum_{i=1}^k (\text{mult}_{P_i}(B_X) - n)E_i$ эффективен.

Пусть $\overline{P} = f^{-1}(P)$. Тогда $\overline{P} \in \mathbb{LCS}(V, \widehat{B}_V)$ и точка $\overline{P}$ является изолированным центром лог-канонических особенностей лог-пары $(V, \widehat{B}_V)$, поскольку в окрестности точки P бирациональный морфизм $f: V \rightarrow X$ является изоморфизмом. С другой стороны, отображение

$$H^0\left(\mathcal{O}_V\left(f^*(n(k-1)H) - \sum_{i=1}^k E_i\right)\right) \rightarrow H^0\left(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, \widehat{B}_V)} \otimes \mathcal{O}_V\left(f^*(n(k-1)H) - \sum_{i=1}^k E_i\right)\right)$$

сюръективно по теореме 1.7.6, но в окрестности точки $\overline{P}$ носитель схемы $\mathcal{L}(V, \widehat{B}_V)$ состоит только из точки $\overline{P}$, откуда следует, что существует дивизор $D \in |f^*(n(k-1)H) - \sum_{i=1}^k E_i|$, который не проходит через точку $\overline{P}$. Дивизор $f(D)$ – гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени $n(k-1)$, которая проходит через все точки множества $\Sigma \setminus P$, но не проходит через точку $P \in \Sigma$.

СЛЕДСТВИЕ 1.7.8. Пусть V – гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени n , имеющая изолированные обыкновенные двойные точки. Известно, что V является $\mathbb{Q}$ -факториальной в том и только том случае, когда ее особые точки накладывают независимые линейные условия на гиперповерхности в $\mathbb{P}^4$ степени $2n-5$ (см. [51]). Предположим, что $\text{Sing}(V)$ есть теоретико-множественное пересечение гиперповерхностей в $\mathbb{P}^4$, имеющих степень строго меньше, чем $\frac{n}{2}$. Тогда V является $\mathbb{Q}$ -факториальной.

Рассмотрим еще одно элементарное применение теоремы 1.7.6 (см. [25]).

ЛЕММА 1.7.9. Пусть $V = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, а B_V – эффективная граница на поверхности V би-степени (a, b) , где a и $b \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$. Тогда $\mathbb{LCS}(V, B_V) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_V = \sum_{i=1}^k a_i B_i$ для положительных рациональных чисел a_i и неприводимых приведенных кривых $B_i \subset V$. Тогда $a_i \leq \max(a, b) < 1$ для всех i , поскольку пересечение границы B_V со слоями двух проекций на $\mathbb{P}^1$ равно a и b соответственно, откуда следует, что множество $\mathbb{LCS}(V, B_V)$ не содержит кривых.

Допустим, что $\mathbb{LCS}(V, B_V)$ содержит точку $O \in V$. Рассмотрим дивизор H на V би-степени $(1 - a, 1 - b)$. Тогда $H^0(\mathcal{O}_V(K_V + B_V + H)) = 0$, но из теоремы 1.7.6 следует сюръективность отображения

$$H^0(\mathcal{O}_V(K_V + B_V + H)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)}(K_V + B_V + H)),$$

что невозможно, поскольку $H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)}(K_V + B_V + H)) = H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(V, B_V)}) \neq 0$. Противоречие.

Утверждение леммы 1.7.9 есть частный случай следующего результата (см. [25]).

ТЕОРЕМА 1.7.10. Пусть X – неособая гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^n$ степени k , где $n \geq 3$, граница B_X эффективна и $B_X \sim_{\mathbb{Q}} rH$ для рационального числа $r > 0$, где H – гиперплоское сечение. Тогда $\text{lt}(X, B_X) \geq \min(\frac{n-1}{rk}, \frac{1}{r})$.

Лог-канонический порог $\text{lt}(X, B_X)$ лог-пары (X, B_X) есть наибольшее вещественное число λ такое, что особенности лог-пары $(X, \lambda B_X)$ лог-канонические (см. [111]). Отметим, что из работ [25], [35], [63] следует, что, в обозначениях и условиях теоремы 1.7.10, выполнено равенство $\text{lt}(X, B_X) = \min(\frac{n-1}{rk}, \frac{1}{r})$ тогда и только тогда, когда имеет место один из следующих возможных случаев: $k \geq n$ и $B_X = rS$, где S – гиперплоское сечение неособой гиперповерхности X , которое является конусом (см. предложение 1.2.3); $n > k$ и $B_X = rS$, где S – произвольное гиперплоское сечение гиперповерхности X ; $n = 3 > k$ и $B_X = rS + \Sigma$, где S – кривая, а Σ – эффективная граница с $[\Sigma] = \emptyset$.

Идея доказательств лемм 1.7.7 и 1.7.9 может быть применена для получения более общего результата. А именно, для дивизора Картье D на многообразии X рассмотрим точную последовательность групп когомологий

$$H^0(\mathcal{O}_X(D)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(X, B_X)}(D)) \rightarrow H^1(\mathcal{I}(X, B_X) \otimes D),$$

применим теорему 1.7.6, и получим следующие две теоремы о связности (см. [168]).

ТЕОРЕМА 1.7.11. Пусть B_X эффективна, а дивизор $-(K_X + B_X)$ численно эффективен и обремен. Тогда множество $\mathbb{LCS}(X, B_X) \subset X$ связно.

ТЕОРЕМА 1.7.12. Пусть B_X эффективна, дивизор $-(K_X + B_X)$ численно эффективен и обремен относительно некоторого морфизма $g: X \rightarrow Z$ со связными слоями. Тогда множество $\mathbb{LCS}(X, B_X)$ связно в окрестности каждого слоя морфизма g .

Аналогичные аргументы доказывают следующий результат (см. теорему 17.4 в [113]).

ТЕОРЕМА 1.7.13. Пусть $g: X \rightarrow Z$ — сюръективный морфизм, имеющий связанные слои, такой, что дивизор $-(K_X + B_X)$ является численно эффективным и объемным относительно морфизма g и $\text{codim}(g(B_i) \subset Z) \geq 2$ при $b_i < 0$. Тогда $\text{LCS}(Y, B^Y)$ связно в окрестности каждого слоя морфизма $g \circ f: Y \rightarrow Z$.

Центр канонических особенностей и множество центров канонических особенностей подвижной лог-пары были определены для подвижных лог-пар (см. определение 1.3.8), но подвижность границы при этом нигде реально не использовалась. Основное применение теоремы 1.7.13 состоит в следующем индуктивном результате.

ТЕОРЕМА 1.7.14. Пусть граница B_X эффективна, $Z \in \mathbb{CS}(X, B_X)$ и многообразие Z содержится в носителе эффективного и приведенного дивизора Картье $H \subset X$, который не является компонентой границы B_X и неособ в общей точке Z . Тогда $\mathbb{LCS}(H, B_X|_H) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим лог-пару $(X, B_X + H)$. Тогда

$$\{Z, H\} \subset \mathbb{LCS}(X, B_X + H).$$

Пусть $f: W \rightarrow X$ — лог-разрешение лог-пары $(X, B_X + H)$. Тогда

$$K_W + \hat{H} \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X + H) + \sum_{E \neq \hat{H}} a(X, B_X + H, E)E,$$

где $\hat{H} = f^{-1}(H)$. Применяя теорему 1.7.13 к лог-поднятию лог-пары $(X, B_X + H)$ на многообразии W , мы видим, что $\hat{H} \cap E \neq \emptyset$ для некоторого f -исключительного дивизора E на многообразии W такого, что $f(E) = Z$ и $a(X, B_X, E) \leq -1$. Теперь из эквивалентности

$$K_{\hat{H}} \sim (K_W + \hat{H})|_{\hat{H}} \sim_{\mathbb{Q}} f|_{\hat{H}}^*(K_H + B_X|_H) + \sum_{E \neq \hat{H}} a(X, B_X + H, E)E|_{\hat{H}}$$

следует необходимое утверждение.

Из доказательства теоремы 1.7.14 следуют следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1.7.15. Пусть граница B_X эффективна, а лог-пара (X, B_X) имеет лог-терминальные особенности в проколотой окрестности неособой точки $O \in X$, которая принадлежит множеству $\mathbb{CS}(X, B_X)$. Тогда $O \in \mathbb{LCS}(H, B_H)$, где H — приведенный эффективный дивизор на многообразии X , содержащий точку O , и $B_H = B_X|_H$.

СЛЕДСТВИЕ 1.7.16. Пусть граница B_X эффективна, лог-пара (X, B_X) имеет лог-терминальные особенности в проколотой окрестности изолированной гиперповерхностной особой точки многообразия X такой, что $O \in \mathbb{CS}(X, B_X)$. Тогда точка O принадлежит множеству $\mathbb{LCS}(S, B_S)$, где $S = \bigcap_{i=1}^k H_i$, $B_S = B_X|_S$, а H_i — общее гиперплоское сечение многообразия X , проходящее через точку O .

Следующий результат является теоремой 3.1 работы [46].

ТЕОРЕМА 1.7.17. Пусть H – поверхность, O – гладкая точка на H , M_H – эффективная подвижная граница на H , Δ_1 и Δ_2 – неприводимые и приведенные кривые на H , которые пересекаются нормально в точке O . Предположим, что

$$O \in \text{LCS}(H, (1 - a_1)\Delta_1 + (1 - a_2)\Delta_2 + M_H)$$

для некоторых неотрицательных рациональных чисел a_1 и a_2 . Тогда

$$\text{mult}_O(M_H^2) \geq \begin{cases} 4a_1a_2 & \text{в случае } a_1 \leq 1 \text{ или } a_2 \leq 1, \\ 4(a_1 + a_2 - 1) & \text{в случае } a_1 > 1 \text{ и } a_2 > 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D = (1 - a_1)\Delta_1 + (1 - a_2)\Delta_2 + M_H$. Рассмотрим бирациональный морфизм $f: S \rightarrow H$ такой, что поверхность S гладкая и

$$K_S + f^{-1}(D) \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_H + D) + \sum_{i=1}^k a(H, D, E_i)E_i,$$

где E_i – f -исключительная кривая, $a(H, D, E_i) \in \mathbb{Q}$, $a(H, D, E_1) \leq -1$, а бирациональный морфизм f является композицией k раздутий гладких точек. В случае $k = 1$ требуемое утверждение очевидно. Предположим, что необходимое утверждение уже доказано во всех случаях, когда либо $a_1 \leq 1$, либо $a_2 \leq 1$. Пусть $a_1 > 1$ и $a_2 > 1$. Тогда

$$O \in \text{LCS}(H, (2 - a_1 - a_2)\Delta_2 + M_H),$$

откуда следует, что $\text{mult}_O(M_H^2) \geq 4(a_1 + a_2 - 1)$, поскольку утверждение теоремы выполнено для лог-пары $(H, (2 - a_1 - a_2)\Delta_2 + M_H)$ по предположению. Таким образом, можно считать, что $a_1 \leq 1$. Теперь требуемое утверждение несложно получается индукцией по k .

Из теоремы 1.7.17 и следствия 1.5.15 следует следующий результат (см. [45], [152], [102]).

ТЕОРЕМА 1.7.18. Пусть $\dim(X) \geq 3$, B_X эффективна и подвижна, а O – неособая точка на многообразии X такая, что $O \in \text{CS}(X, B_X)$. Тогда $\text{mult}_O(B_X^2) \geq 4$ и выполнение равенства $\text{mult}_O(B_X^2) = 4$ влечет $\text{mult}_O(B_X) = 2$ и $\dim(X) = 3$.

Естественным четырехмерным обобщением теоремы 1.7.18 является следующее предложение, которое мы будем неформально называть $8n^2$ -неравенством.

ТЕОРЕМА 1.7.19. Пусть Y – многообразие размерности $r \geq 4$, $\mathcal{M}$ – линейная система на многообразии Y , не имеющая неподвижных компонент, S_1 и S_2 – общие дивизоры в линейной системе $\mathcal{M}$, P – неособая точка на многообразии Y , которая принадлежит множеству $\text{CS}(Y, \frac{1}{n}\mathcal{M})$, где $n \in \mathbb{N}$, а особенности лог-пары $(Y, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ канонические в проколотой окрестности точки P . Пусть $\pi: \hat{Y} \rightarrow Y$ – раздутие точки P , а Π – исключительный дивизор морфизма π . Тогда существует линейное подпространство $\Lambda \subset \Pi \cong \mathbb{P}^{r-1}$, имеющее коразмерность 2, такое, что выполнено неравенство

$$\text{mult}_P(S_1 \cdot S_2 \cdot \Delta) \geq 8n^2$$

для любого эффективного дивизора Δ на Y такого, что:

- дивизор Δ содержит точку P и неособ в ней;
- прямая $\Lambda \subset \Pi \cong \mathbb{P}^3$ содержится в дивизоре $\pi^{-1}(\Delta)$;
- дивизор Δ не содержит подмногообразий в Y коразмерности 2, содержащихся в базисном множестве линейной системы $\mathcal{M}$;

причем неравенство строгое при $r \geq 5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [28] и [34].

Из теоремы 1.7.14 следует следующий результат (см. теорему 3.10 в [46]).

ТЕОРЕМА 1.7.20. Пусть B_X – эффективная граница, O – изолированная обыкновенная двойная точка на X , $O \in \mathbb{CS}(X, B_X)$ и $\dim(X) \geq 3$. Тогда $\text{mult}_O(B_X) \geq 1$, причем неравенство строгое при $\dim(X) \geq 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: W \rightarrow X$ – раздутие точки O . Тогда

$$B_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(B_X) - \text{mult}_O(B_X)E,$$

где $B_W = f^{-1}(B_X)$, а E – исключительный дивизор бирационального морфизма f . Предположим, что выполнено неравенство $\text{mult}_O(B_X) < 1$. Ввиду следствия 1.7.16 можно считать, что выполнено равенство $\dim(X) = 3$. Тогда из соотношения

$$K_W + B_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X) + (1 - \text{mult}_O(B_X))E$$

следует, что существует подмногообразие $Z \subset E$, которое является центром канонических особенностей лог-пары (W, B_W) . Следовательно, $\mathbb{LCS}(E, B_W|_E) \neq \emptyset$ по теореме 1.7.14, что противоречит лемме 1.7.9, так как $E \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Утверждение теоремы 1.7.20 можно обобщить несколькими способами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7.21. Пусть граница B_X эффективна, $\dim(X) = 3$, а $\mathbb{CS}(X, B_X)$ содержит особую точку O многообразия X , которое локально изоморфно гиперповерхности

$$y^3 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \subset \mathbb{C}^4 \cong \text{Spec}(\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, y])$$

в окрестности точки O . Тогда $\text{mult}_O(B_X) \geq \frac{1}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: W \rightarrow X$ – раздутие многообразия X в точке O . Тогда

$$B_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(B_X) - \text{mult}_O(B_X)E,$$

где $B_W = f^{-1}(B_X)$, а E – исключительный дивизор бирационального морфизма f . Трехмерное многообразие W неособо, а исключительный дивизор E есть конус в $\mathbb{P}^3$ над неособой коникой. Более того, ограничение $-E|_E$ рационально эквивалентно гиперплоскому сечению конуса $E \subset \mathbb{P}^3$ и выполнено соотношение

$$K_W + B_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X) + (1 - \text{mult}_O(B_X))E.$$

Предположим, что $\text{mult}_O(B_X) < \frac{1}{2}$. Тогда

$$\mathbb{CS}(W, B_W) \subset \mathbb{CS}(W, B_W + (\text{mult}_O(B_X) - 1)E),$$

поскольку $\text{mult}_O(B_X) - 1 < 0$. С другой стороны, лог-пара

$$(W, B_W + (\text{mult}_O(B_X) - 1)E)$$

является лог-поднятием лог-пары (X, B_X) и $O \in \mathbb{CS}(X, B_X)$, откуда следует, что существует собственное неприводимое подмногообразие $Z \subset E$ такое, что $Z \in \mathbb{CS}(W, B_W)$, откуда сразу следует, что $\mathbb{LCS}(E, B_W|_E) \neq \emptyset$ по теореме 1.7.14.

Пусть $B_E = B_W|_E$. Тогда множество $\mathbb{LCS}(E, B_E)$ не может содержать кривых на квадратичном конусе E , поскольку в противном случае пересечение границы B_E с образующей конуса E будет больше $\frac{1}{2}$, что невозможно ввиду $\text{mult}_O(B_X) < \frac{1}{2}$. Таким образом, выполнено равенство $\dim(\text{Supp}(\mathcal{L}(E, B_E))) = 0$.

Пусть H – гиперплоское сечение конуса $E \subset \mathbb{P}^3$. Тогда

$$K_E + B_E + (1 - \text{mult}_O(B_X))H \sim_{\mathbb{Q}} -H$$

и $H^0(\mathcal{O}_E(-H)) = 0$, но последовательность групп когомологий

$$H^0(\mathcal{O}_E(-H)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(E, B_E)}(-H)) \rightarrow H^1(E, \mathcal{I}(E, B_E) \otimes \mathcal{O}_E(-H))$$

точна и $H^1(E, \mathcal{I}(E, B_E) \otimes \mathcal{O}_E(-H)) = 0$ по теореме 1.7.6, откуда $H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(E, B_E)}(-H)) = 0$, что невозможно, поскольку $\mathbb{LCS}(E, B_E) \neq \emptyset$.

Из следствия 1.7.22 и теоремы 1.7.20 следует следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7.22. Пусть B_X – эффeктивная граница, $\dim(X) \geq 4$, O – особая точка многообразия X , которое локально изоморфно гиперповерхности

$$y^3 = \sum_{i=1}^{\dim(X)} x_i^2 \subset \mathbb{C}^{\dim(X)+1} \cong \text{Spec}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_{\dim(X)}, y])$$

в окрестности точки O , и $O \in \mathbb{CS}(X, B_X)$. Тогда $\text{mult}_O(B_X) > 1$.

Можно также доказать следующее обобщение теоремы 1.7.20.

ТЕОРЕМА 1.7.23. Пусть $r = \dim(X) \geq 4$, а O – изолированная обыкновенная двойная точка многообразия X такая, что $O \in \mathbb{CS}(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$, а лог-пара $(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ канонична в проколотой окрестности точки O , где $\mathcal{M}$ – линейная система без неподвижных компонент на многообразии X и $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\pi: V \rightarrow X$ – раздутие точки O , E – π -исключительный дивизор, который можно отождествлять с квадрикой в $\mathbb{P}^r$. Тогда существует линейное подпространство $\Lambda \subset E$ коразмерности 3 в $\mathbb{P}^r$ такое, что¹¹

$$\text{mult}_O(S_1 \cdot S_2 \cdot \Delta) = \text{mult}_O(S_1|_{\Delta} \cdot S_2|_{\Delta}) \geq 6n^2$$

для любого эффeктивного дивизора Δ на X такого, что:

- дивизор Δ содержит точку O ;
- точка O является обыкновенной двойной точкой на Δ при $r = 4$, либо O является обыкновенной двойной точкой на гиперплоском сечении дивизора Δ при $r = 5$;
- дивизор $\pi^{-1}(\Delta)$ содержит Λ ;
- дивизор Δ не содержит подмногообразий в X коразмерности 2, содержащихся в базисном множестве линейной системы $\mathcal{M}$;

причем неравенство строгое при $\dim(X) \geq 5$.

Легко видеть, что условие существования линейного подпространства в теореме 1.7.23 пусто при $\dim(X) \geq 6$ по теореме Лефшеца.

¹¹Кратности $\text{mult}_O(S_1 \cdot S_2 \cdot \Delta)$ и $\text{mult}_O(S_1|_{\Delta} \cdot S_2|_{\Delta})$ можно формально определить посредством численного соотношения между полным и собственным прообразами границы на раздутие соответствующей особой точки.

СЛЕДСТВИЕ 1.7.24. В условиях и обозначениях теоремы 1.7.23 предположим, что выполнено неравенство $\dim(X) \geq 6$. Тогда $\text{mult}_O(S_1 \cdot S_2) > 6n^2$.

Идея доказательств теорем 1.7.19 и 1.7.23 аналогична идее доказательства следующего результата, который является следствием 3.5 работы [46].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7.25. Пусть B_X подвижна и эффективна, $\dim(X) = 3$, O – неособая точка на X , содержащаяся в $\mathbb{CS}(X, B_X)$, $\text{mult}_O(B_X) < 2$, и $f: V \rightarrow X$ – раздутие точки многообразия X в точке O . Тогда существует прямая $L \subset E \cong \mathbb{P}^2$, принадлежащая множеству $\mathbb{LCS}(V, B_V + (\text{mult}_O(B_X) - 1)E)$, где $B_V = f^{-1}(B_X)$ и $E = f^{-1}(O)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение локально по X , можно считать, что $X \cong \mathbb{C}^3$, а O – начало координат в $\mathbb{C}^3$. Рассмотрим общее гиперплоское сечение H многообразия X , которое проходит через точку O , положим $T = f^{-1}(H)$. Тогда выполнено соотношение

$$K_V + B_V + (\text{mult}_O(B_X) - 1)E + T \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X + H)$$

и $\text{mult}_O(B_X) \geq 1$ (см. замечание 1.3.9). Из общности H и теоремы 1.7.14 немедленно следует, что $O \in \mathbb{LCS}(H, B_X|_H)$ и, даже более того, что

$$\mathbb{LCS}(T, B_V|_T + (\text{mult}_O(B_X) - 1)E|_T) \neq \emptyset,$$

поскольку $\text{mult}_O(B_X) < 2$ по предположению (см. пример 1.7.4). Теперь из применения теоремы 1.7.12 к морфизму f сразу следует, что множество

$$\mathbb{LCS}(T, B_V|_T + (\text{mult}_O(B_X) - 1)E|_T)$$

состоит из некоторой единственной точки $P \in E \cap T$, но, с другой стороны, из общности выбора H следует, что точка P является пересечением поверхности T с некоторым элементом множества $\mathbb{LCS}(V, B_V + (\text{mult}_O(B_X) - 1)E)$. Значит, множество

$$\mathbb{LCS}(T, B_V + (\text{mult}_O(B_X) - 1)E)$$

содержит некоторую кривую $L \subset E$, чье пересечение с поверхностью T состоит в точности из точки P , следовательно, кривая L – прямая в $E \cong \mathbb{P}^2$.

СЛЕДСТВИЕ 1.7.26. Предположим, что граница B_X подвижна и эффективна, многообразие X трехмерно и существует неособая точка $O \in X$ такая, что $\text{mult}_O(B_X) \leq 2$, но лог-пара (X, B_X) не является каноничной в O , т.е. $O \in \mathbb{CS}(X, \mu B_X)$ для некоторого рационального $\mu < 1$. Пусть $f: V \rightarrow X$ – раздутие точки O . Тогда существует такая прямая $L \subset E \cong \mathbb{P}^2$, что лог-пара $(V, B_V + (\text{mult}_O(B_X) - 1)E)$ не лог-канонична в общей точке прямой L , где $B_V = f^{-1}(B_X)$ и $E = f^{-1}(O)$.

С помощью теоремы 1.7.10 можно несложно получить обобщение теоремы 1.7.20 на случай обыкновенной гиперповерхностной особой точки произвольной кратности.

Часть 2. Трехмерные многообразия

§ 2.1. Трехмерная кватрика

Пусть $X \subset \mathbb{P}^4$ – гиперповерхность степени 4, имеющая не более чем изолированные особенности. Тогда X – трехмерное многообразие Фано степени 4 такое, что выполнено соотношение $-K_X \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)|_X$. Следующий результат доказан в работе [94].

ТЕОРЕМА 2.1.1. *Пусть X неособо. Тогда X бирационально сверхжестко.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что X не бирационально сверхжестко (см. определения 0.3.3 и 0.3.4). Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Из теоремы Лефшеца следует, что группа $\text{Pic}(X)$ порождена антиканоническим дивизором $-K_X$. Значит, из теоремы 1.4.1 следует существование линейной системы $\mathcal{M}$ на гиперповерхности X , не имеющей неподвижных компонент, такой, что особенности подвижной лог-пары $(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ не являются каноническими, где n – натуральное число такое, что выполнено соотношение $\mathcal{M} \sim -nK_X$. В частности, множество $\text{CS}(X, \mu\mathcal{M})$ непусто для некоторого положительного рационального числа $\mu < \frac{1}{n}$.

Пусть $P \subset X$ – неприводимое подмногообразие, принадлежащее $\text{CS}(X, \mu\mathcal{M})$, т.е. подвижная лог-пара $(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ не канонична в P . Тогда из замечания 1.3.9 следует выполнение неравенства $\text{mult}_P(\mathcal{M}) > n$, а из предложения 1.3.12 следует, что P – точка.

Пусть S_1 и S_2 – достаточно общие поверхности в линейной системе $\mathcal{M}$. Тогда по теореме 1.7.18 выполнено неравенство $\text{mult}_P(S_1 \cdot S_2) > 4n^2$. Пусть H – общее гиперплоское сечение кватрики X , проходящее через точку P . Тогда

$$4n^2 = S_1 \cdot S_2 \cdot H \geq \text{mult}_P(S_1 \cdot S_2) \text{mult}_P(H) > 4n^2,$$

что является противоречием.

Обобщением теоремы 2.1.1 является следующий результат, доказанный в [146] и [129].

ТЕОРЕМА 2.1.2. *Пусть X нодально и $\mathbb{Q}$ -факториально. Тогда X бирационально жестко.*

Условие $\mathbb{Q}$ -факториальности нодальной кватрики X означает, что все дивизоры Вейля на кватрике X являются дивизорами Картье, что эквивалентно либо топологическому условию $\text{rk } H_4(X, \mathbb{Z}) = 1$, либо тому, что группа $\text{Cl}(X)$ порождается классом гиперплоского сечения. Без условия $\mathbb{Q}$ -факториальности теорема 2.1.2 просто не верна, например, кватрика Бурхарда

$$w^4 - w(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) + 3xyzt = 0 \subset \mathbb{P}^4 \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w])$$

нодальна и детерминантальна, откуда следует, что она рациональна. Нодальная трехмерная кватрика не может иметь больше чем 45 особых точек (см. [178]), при этом существуют нодальные кватрики с любым количеством особых точек вплоть до 45 (см. [39]), а из работы [100] следует, что кватрика Бурхарда является единственной нодальной кватрикой, которая имеет ровно 45 особых точек (см. [174], [140]). Кватрика Бурхарда – единственный инвариант степени 4 простой группы $\text{PSp}(4, \mathbb{Z}_3)$ порядка 25920 (см. [66], [77]), а особые точки кватрики Бурхарда каноническим образом соответствуют 45 трикасательным неособой кубической поверхности, что связано с тем, что группа Вейля E_6 является расширением группы $\text{PSp}(4, \mathbb{Z}_3)$ группой $\mathbb{Z}_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.3. Нодальная гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени 5 и выше нерациональна, нодальные квадрики в $\mathbb{P}^4$ рациональны, нодальная кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ нерациональна тогда и только тогда, когда она неособа (см. [41]). Таким образом, вопрос о нерациональности нодальных трехмерных квартик – единственный нерешенный пока вопрос о рациональности трехмерных нодальных гиперповерхностей.

Существуют нерациональные трехмерные особые квартики, которые не являются бирационально жесткими. Например, следующий результат доказан в работе [47].

ТЕОРЕМА 2.1.4. Пусть X – достаточно общая квартика, заданная уравнением

$$x^2 + yz + xf_3(y, z, t, w) + g_4(y, z, t, w) = 0 \subset \mathbb{P}^4 \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где f_3 и g_4 – однородные многочлены степени 3 и 4 соответственно. Тогда особенности трехмерной квартики X терминальны и $\mathbb{Q}$ -факториальны, и $\text{rk Pic}(X) = 1$, причем квартика X может быть бирационально перестроена в полное пересечение V квартики и кубики в $\mathbb{P}(1^4, 2, 2)$ такое, что $\text{rk Pic}(V) = 1$, а V имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности. Более того, многообразия X и V являются единственными Мори расслоенными пространствами в классе бирациональной эквивалентности многообразия X . В частности, квартика X не является бирационально жесткой, но она нерациональна, бирационально не изоморфна расслоению на коники и расслоению на рациональные поверхности.

В работе [31] доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.1.5. Пусть X – очень общая трехмерная квартика, содержащая двумерное линейное подпространство в $\mathbb{P}^4$. Тогда X нодальна и нерациональна.

Квартика X , удовлетворяющая условиям теоремы 2.1.5, может быть бирационально перестроена посредством антипроекций (см. пример 2.1.7) в расслоение на кубические поверхности и полное пересечение двух кубик в $\mathbb{P}(1^5, 2)$, которые являются Мори расслоенными пространствами.

ГИПОТЕЗА 2.1.6. Пусть X – нодальная трехмерная квартика, которая содержит двумерное линейное подпространство $\Pi \subset \mathbb{P}^4$, такая, что $\text{rk Cl}(X) = 2$, $\eta: X \dashrightarrow V$ – антипроекция, где V – полное пересечение двух кубик в $\mathbb{P}(1^5, 2)$, а $\pi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ – проекция из плоскости Π . Предположим, что существует расслоение Мори $\tau: Y \rightarrow Z$ и бирациональное отображение $\rho: X \dashrightarrow Y$. Тогда существует бирациональный автоморфизм σ квартики X такой, что либо $\rho = \eta \circ \sigma$, либо $\rho \circ \tau = \pi \circ \sigma$.

Конечно, существуют нодальные трехмерные квартики, не содержащие плоскостей, которые не являются $\mathbb{Q}$ -факториальными.

ПРИМЕР 2.1.7. Пусть X – общая трехмерная квартика, проходящую через неособую квадратичную поверхность $Q \subset \mathbb{P}^4$. В этом случае квартика X может быть задана уравнением

$$\begin{aligned} & a_2(x, y, z, t, w)h_2(x, y, z, t, w) \\ & = b_3(x, y, z, t, w)g_1(x, y, z, t, w) \subset \mathbb{P}^4 \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]), \end{aligned}$$

где a_2 , h_2 , b_3 и g_1 – однородные многочлены степени 2, 2, 3 и 1 соответственно, а Q задана уравнениями $h_2 = g_1 = 0$. Более того, кватрика X нодальна и имеет 12 особых точек, заданных уравнениями $h_2 = g_1 = a_2 = b_3 = 0$. Очевидно, что X не $\mathbb{Q}$ -факториальна.

Вводя новую переменную $\alpha = a_2/g_1$, можно антиспроектировать кватрику X на полное пересечение $V \subset \mathbb{P}^5$, заданное уравнениями

$$\alpha g_1(x, y, z, t, w) - a_2(x, y, z, t, w) = \alpha h_2(x, y, z, t, w) - b_3(x, y, z, t, w) = 0 \subset \mathbb{P}^5,$$

такое, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \psi \swarrow & & \searrow \phi \\ X & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & V, \end{array}$$

где ρ – антипроекция, V неособо вне обыкновенной двойной точки P , которая задается уравнениями $x = y = z = t = w = 0$, ϕ стягивает поверхность, изоморфную $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, а морфизм ψ стягивает собственные прообразы 12 прямых на полном пересечении V , проходящих через точку P . Аналогичным образом, вводя новую переменную $\beta = h_2/g_1$, можно антиспроектировать кватрику X на полное пересечение $V' \subset \mathbb{P}^5$, заданное уравнениями

$$\beta g_1(x, y, z, t, w) - h_2(x, y, z, t, w) = \beta a_2(x, y, z, t, w) - b_3(x, y, z, t, w) = 0 \subset \mathbb{P}^5.$$

Нерациональность трехмерной кватрики $X \subset \mathbb{P}^4$, удовлетворяющей всем условиям примера 2.1.7, неизвестна (см. [87], [96], [46]).

ГИПОТЕЗА 2.1.8. *В обозначениях примера 2.1.7 полные пересечения V и V' являются единственными Мори расслоенными пространствами, которые бирационально эквивалентны трехмерной кватрике $X \subset \mathbb{P}^4$.*

Для эффективного применения теоремы 2.1.2 докажем следующий результат (см. [31]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.9. *Пусть кватрика X нодальна и $|\text{Sing}(X)| \leq 9$. Тогда кватрика X является $\mathbb{Q}$ -факториальной в том и только том случае, когда X не содержит двумерных линейных подпространств в $\mathbb{P}^4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из работ [40], [51] следует, что X является $\mathbb{Q}$ -факториальной в том и только том случае, когда ее особые точки накладывают независимые линейные условия на кубические гиперповерхности в $\mathbb{P}^4$. Предположим, что X не содержит плоскостей. Покажем, что особые точки кватрики X накладывают независимые линейные условия на кубические гиперповерхности в $\mathbb{P}^4$.

Пусть X задается уравнением

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \subset \mathbb{P}^4 \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]),$$

где f – однородный многочлен степени 4. Рассмотрим линейную систему

$$\mathcal{L} = \left| \sum_{i=0}^4 \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \right| \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(3)|,$$

где $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Базисное множество линейной системы $\mathcal{L}$ состоит в точности из особых точек кватрики X . С другой стороны, любая кривая в $\mathbb{P}^4$ степени d пересекает общую поверхность в линейной системе $\mathcal{L}$ не более чем по $3d$ точкам. Таким образом, имеет место следующее:

- не более 3 точек множества $\text{Sing}(X)$ лежит на прямой;
- не более 6 точек множества $\text{Sing}(X)$ лежит на конике.

Пусть Σ – плоскость в $\mathbb{P}^4$ и $T = \Sigma \cap X$. Тогда T – плоская кривая степени 4, причем кривая T можем быть приводимой и неприведенной. Тем не менее, легко видеть, что

$$\text{Sing}(V) \cap \Sigma \subset \text{Sing}(T),$$

откуда следует, что $|\text{Sing}(X) \cap \Sigma| \leq 6$ в случае, когда кривая T неприведена, поскольку не более 3 особых точек кватрики X могут лежать на прямой и не более 6 особых точек кватрики X могут лежать на конике. С другой стороны, если кривая T приведена, то выполнено неравенство $|\text{Sing}(T)| \leq 6$. Значит, не более 8 особых точек кватрики X лежат на одной плоскости в $\mathbb{P}^4$.

Рассмотрим произвольное подмножество $\Sigma \subsetneq \text{Sing}(X)$ и точку $P \in \text{Sing}(X) \setminus \Sigma$. Необходимо показать, что существует кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$, которая проходит через все точки множества Σ , но не содержит при этом точки P . Без ограничения общности можно считать, что $|\text{Sing}(X)| = |\Sigma| + 1 = 9$.

Предположим, что существует гиперплоскость $\Gamma \subset \mathbb{P}^4$ такая, что $\text{Sing}(X)$ содержится в гиперплоскости Γ . Покажем, что тогда существует кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$, которая проходит через все точки множества Σ , но не содержит при этом точки P , для чего достаточно показать, что существует кубическая поверхность в Γ , которая проходит через все точки множества Σ , но не содержит при этом точки P .

Пусть $\varepsilon \geq 2$ – максимальное число точек множества Σ , которые принадлежат некоторому двумерному линейному подпространству $\Pi \subset \Gamma$ вместе с точкой P . Тогда $\varepsilon \leq 7$. Пусть

$$\Sigma = \{P_1, \dots, P_8\},$$

где точки $P_1, \dots, P_\varepsilon$ содержатся в Π вместе с точкой P . Тогда точки P и $P_1, \dots, P_\varepsilon$ не лежат на одной прямой. Мы разберем только два случая: $\varepsilon = 2$ и $\varepsilon = 7$.

Пусть $\varepsilon = 2$. Тогда разделим множество Σ на три, возможно пересекающихся, подмножества, каждое из которых содержит три точки множества Σ , а их объединение есть все множество Σ . Тогда гиперплоскости в Γ , порожденные каждым из построенных подмножеств, не могут содержать P , так как выполнено равенство $\varepsilon = 2$. Таким образом, объединение этих трех гиперплоскостей и есть искомая кубическая поверхность.

Пусть $\varepsilon = 7$. Тогда либо из работы [9], либо из элементарных свойств *почти поверхностей дель Пеццо* (см. [73], [119]) следует существование кубической кривой C на плоскости Π , проходящей через все точки множества $\Sigma \cap \Pi$, но не проходящей через точку P , следовательно, конус в Γ над кривой C с вершиной в P_8 является кубической поверхностью в Γ , проходящей через Σ и не проходящей через точку P .

Таким образом, можно считать, что не существует гиперплоскости в $\mathbb{P}^4$, которая содержит все особые точки кватрики X . Пусть $\delta \geq 3$ – наибольшее число точек в Σ , которые содержатся в некоторой гиперплоскости $\Xi \subset \mathbb{P}^4$ вместе с P . Тогда $\delta \leq 7$. Пусть $\Sigma = \{P_1, \dots, P_8\}$, где $P_1, \dots, P_\delta$ содержатся в Ξ вместе с точкой P . Мы разберем только случай $\delta = 4$.

Пусть $\delta = 4$. Тогда существуют прямые L_1 и L_2 в гиперплоскости Ξ , каждая из которых содержит пару точек множества $\Sigma \cap \Xi$, при этом не проходя через P . Можно считать, что прямая L_1 содержит P_1 и P_2 , а прямая L_2 содержит P_3 и P_4 . Более того, не более двух точек множества $\{P_5, P_6, P_7, P_8\}$ могут лежать на одной прямой, содержащей P , откуда следует, что существуют две точки в $\Sigma \setminus \Xi$, например, точки P_5 и P_6 , такие, что прямая, проходящая через них, не содержит P . Значит, объединение общей гиперплоскости, проходящей через прямую L_1 и точку P_7 , общей гиперплоскости, проходящей через прямую L_2 и точку P_8 , и общей гиперплоскости, проходящей через точки P_5 и P_6 , есть кубическая гиперповерхность, которая проходит через все точки множества Σ , но не содержит P .

СЛЕДСТВИЕ 2.1.10. *Предположим, что трехмерная квартика X нодальна и выполнено неравенство $|\text{Sing}(X)| \leq 8$. Тогда квартика X является $\mathbb{Q}$ -факториальной.*

Утверждение предложения 2.1.9 можно нетривиальным образом обобщить следующим образом (см. [35]), используя лемму 1.7.7.

ТЕОРЕМА 2.1.11. *Пусть V – нодальная гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени n такая, что выполнено неравенство $|\text{Sing}(V)| \leq (n-1)^2/4$. Тогда V является $\mathbb{Q}$ -факториальной.*

Из работы [51] следует, что, в обозначениях и условиях теоремы 2.1.11, нодальная гиперповерхность V является $\mathbb{Q}$ -факториальной в том и только том случае, когда ее особые точки накладывают независимые линейные условия на гиперповерхности в $\mathbb{P}^4$, имеющие степень $2n-5$. Как видно из утверждения предложения 2.1.9, неравенство в теореме 2.1.11 не является точным. Тем не менее, с асимптотической точки зрения неравенство в теореме 2.1.11 все-таки достаточно точное, как следует из следующего примера.

ПРИМЕР 2.1.12. *Пусть V – нодальная гиперповерхность, заданная уравнением*

$$xg_{n-1}(x, y, z, t, w) + yf_{n-1}(x, y, z, t, w) = 0 \subset \mathbb{P}^4 \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где g_{n-1} и f_{n-1} – общие однородные многочлены степени $n-1$. Тогда $|\text{Sing}(V)| = (n-1)^2$, но гиперповерхность V не является $\mathbb{Q}$ -факториальной.

В работе [39] показано, что неособая поверхность, содержащаяся в нодальной гиперповерхности $V \subset \mathbb{P}^4$ степени n , является дивизором Картье на гиперповерхности V , если выполнено неравенство $|\text{Sing}(V)| < (n-1)^2$. Естественно сделать следующее предположение, которое доказано только для кубик и квартик (см. предложение 2.1.9 и [64]).

ГИПОТЕЗА 2.1.13. *Пусть V – нодальная гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени n такая, что выполнено неравенство $|\text{Sing}(V)| < (n-1)^2$. Тогда V является $\mathbb{Q}$ -факториальной.*

В завершение данного параграфа приведем аналог теоремы 2.2.10 для неособых трехмерных квартик (см. [23], [26]).

ТЕОРЕМА 2.1.14. *Пусть X неособо, а $\rho: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – отображение, нормализация общего слоя которого является эллиптической кривой. Тогда $\rho = \sigma \circ \gamma$,*

где $\gamma: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – проекция из некоторой прямой, лежащей на X , а σ – бирациональный автоморфизм $\mathbb{P}^2$.

Отметим, что на неособой трехмерной кватерике существует однопараметрическое семейство прямых (см. [42]). На данный момент, классификация бирациональных перестроек в расслоения на эллиптические кривые рассмотрена для многих многомерных рационально связных многообразий (см. [53], [21], [22], [24], [161], [27], [29], [30], [37]).

§ 2.2. Двойное пространство

Пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^3$ – двойное накрытие с ветвлением в поверхности $S \subset \mathbb{P}^3$ степени 6, имеющей только изолированные обыкновенные двойные точки. Известно, что S не может иметь более чем 65 обыкновенных двойных точек (см. [98], [180]) и для любого натурального числа $m \leq 65$ можно найти S , имеющую m особых точек (см. пример 2.2.2, [5], [15]), многообразие X является терминальным многообразием Фано степени 2, $-K_X \sim \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$, а $\mathbb{Q}$ -факториальность многообразия X эквивалентна равенству $\text{rk Cl}(X) = 1$. Имеет место следующий результат (см. [87], [148], [37]).

ТЕОРЕМА 2.2.1. *Пусть $\text{rk Cl}(X) = 1$. Тогда X бирационально сверхжестко.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что многообразие X не является бирационально сверхжестким. Покажем, что сделанные предположения приводят к противоречию. На многообразии X существует подвижная лог-пара (X, M_X) с эффективной границей M_X такая, что множество $\text{CS}(X, M_X)$ непусто, а дивизор $-(K_X + M_X)$ обилиен (см. теорему 1.4.1), в частности, выполнено соотношение $M_X \sim_{\mathbb{Q}} -rK_X$ для некоторого положительного рационального числа $r < 1$. Пусть $C \subset X$ – элемент множества $\text{CS}(X, M_X)$.

Пусть C – гладкая точка многообразия X . Тогда $\text{mult}_C(M_X^2) \geq 4$ по теореме 1.7.18, откуда следует неравенства $2 > M_X^2 \cdot H \geq 4$ для достаточно общего дивизора H в полной линейной системе $|\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))|$, который содержит точку C . Противоречие.

Пусть C – обыкновенная двойная точка на X . Тогда из теоремы 1.7.20 следует выполнение неравенства $\text{mult}_C(M_X) \geq 1$. Рассмотрим два достаточно общих дивизора H_1 и H_2 в линейной системе $|\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))|$, проходящие через точку C . Тогда

$$2 > M_X \cdot H_1 \cdot H_2 \geq 2 \text{mult}_C(M_X) \text{mult}_C(H_2) \text{mult}_C(H_2) \geq 2,$$

что является противоречием.

Итак, показано, что C – неприводимая кривая. Пусть H – достаточно общий дивизор в полной линейной системе $|\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))|$, который содержит C . Тогда

$$2 = H^3 > 2r^2 = M_X^2 \cdot H \geq \text{mult}_C(M_X^2) H \cdot C \geq -K_X \cdot C,$$

поскольку $\text{mult}_C(M_X^2) \geq \text{mult}_C^2(M_X) \geq 1$. Значит, выполнено равенство $-K_X \cdot C = 1$. Следовательно, кривая $\pi(C)$ – прямая, кривая C неособа и рациональна, а $\pi|_C$ – изоморфизм.

Предположим, что кривая C целиком содержится в множестве неособых точек многообразия X . Пусть $f: W \rightarrow X$ – раздутие C , $E = f^{-1}(C)$ и $M_W = f^{-1}(M_X)$. Тогда

$$M_W = f^{-1}(M_X) = f^*(M_X) - \text{mult}_C(M_X)E,$$

где $\text{mult}_C(M_X) \geq 1$, но базисное множество пучка $|-K_W|$ состоит из кривой $\tilde{C}$ такой, что кривая $\tilde{C}$ неособа и рациональна и $\pi \circ f(\tilde{C}) = \pi(C)$. Причем $\tilde{C} \subset E$ тогда и только тогда, когда $\pi(C) \subset S$. Пусть $H = f^*(-K_X)$. Тогда пересечение дивизора $3H - E$ со всеми кривыми на многообразии W , кроме кривой $\tilde{C}$, заведомо неотрицательно. Покажем, что дивизор $3H - E$ численно эффективен. Очевидно, что $(3H - E) \cdot \tilde{C} = 0$ в случае, когда базисная кривая $\tilde{C}$ не содержится в исключительном дивизоре E . Таким образом, можно считать, что кривая $\tilde{C}$ содержится в E . Рассмотрим нормальный пучок $\mathcal{N}_{C/X}$ кривой C на многообразии X . Из рациональности кривой C следует, что

$$\mathcal{N}_{C/X} \cong \mathcal{O}_C(a) \oplus \mathcal{O}_C(b)$$

для некоторых целых чисел $a \geq b$. Из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow \mathcal{I}_X|_C \rightarrow \mathcal{N}_{C/X} \rightarrow 0$$

следует $\deg(\mathcal{N}_{C/X}) = a + b = -K_X \cdot C + 2g(C) - 2 = -1$, но кривая C целиком содержится в множестве неособых точек поверхности $\hat{S} = \pi^{-1}(S) \cong S$. Из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{C/\hat{S}} \rightarrow \mathcal{N}_{C/X} \rightarrow \mathcal{N}_{\hat{S}/X}|_C \rightarrow 0$$

и $\mathcal{N}_{C/\hat{S}} \cong \mathcal{O}_C(-4)$ следует, что $b \geq -4$. В частности, $a - b \leq 7$. Пусть s_∞ — исключительное сечение рационально линейчатой поверхности $f|_E: E \rightarrow C$. Тогда из выполнения равенств

$$E^3 = -\deg(\mathcal{N}_{C/X}) = 1$$

и $-K_X \cdot C = 1$ следует, что

$$(3H - E) \cdot s_\infty = \frac{7 + b - a}{2} \geq 0,$$

откуда следует численная эффективность дивизора $3H - E$. В частности, мы имеем

$$0 \leq (3H - E) \cdot M_W^2 = 6r^2 - 4 \text{mult}_C^2(M_X) - 2r \text{mult}_C(M_X) < 0,$$

поскольку $r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ и $M_X \sim_{\mathbb{Q}} -rK_X$. Противоречие. Таким образом, показано, что неприводимая рациональная кривая C содержит особую точку многообразия X .

Предположим, что $\pi(C) \not\subset S$. Пусть $\mathcal{H}$ — линейная система, состоящая из поверхностей в линейной системе $|-K_X|$, которые содержат кривую C . Тогда $\mathcal{H}$ — пучок, а его базисное множество состоит из кривой C и кривой $\tilde{C}$ такой, что $\pi(C) = \pi(\tilde{C})$. Пусть D — общая поверхность в пучке $\mathcal{H}$. Тогда ограничение $M_X|_D$ уже не будет подвижной границей, но

$$M_X|_D = \text{mult}_C(M_X)C + \text{mult}_{\tilde{C}}(M_X)\tilde{C} + R_D,$$

где R_D — подвижная граница на D . Поверхность D неособа вне особых точек P_i многообразия X , которые содержатся в кривой C . Из общности дивизора D следует, что каждая из точек P_i является обыкновенной двойной точкой на D . Выполнены равенства

$$C^2 = \tilde{C}^2 = -2 + \frac{k}{2},$$

где k – число особых точек P_i , но $k \leq 3$, поскольку $\pi(C)$ – прямая, не содержащаяся в поверхности S , а степень поверхности $S \subset \mathbb{P}^3$ равна 6. Таким образом, $C^2 = \tilde{C}^2 < 0$, откуда

$$(1 - \text{mult}_{\tilde{C}}(M_X))\tilde{C}^2 \geq (\text{mult}_C(M_X) - 1)C \cdot \tilde{C} + R_D \cdot \tilde{C} \geq 0$$

и, в частности, $\text{mult}_{\tilde{C}}(M_X) \geq 1$. Пусть H – общий дивизор в $|-K_X|$. Тогда

$$2 = H \cdot K_X^2 > H \cdot M_X^2 \geq \text{mult}_C^2(M_X)H \cdot C + \text{mult}_{\tilde{C}}^2(M_X)H \cdot \tilde{C} \geq 2,$$

что невозможно. Таким образом, кривая $\pi(C)$ содержится в поверхности S .

Пусть P – достаточно общая точка на кривой C , а $L \subset \mathbb{P}^3$ – общая прямая, которая касается поверхности S в точке $\pi(P)$, и пусть $\tilde{L} = \pi^{-1}(L)$. Заметим, что кривая $\tilde{L}$ неприводима и особа в точке P . Более того, кривая $\tilde{L}$ не может содержаться в базисном множестве компонент подвижной границы M_X , поскольку и точка P , и прямая L были выбраны достаточно общими. Следовательно, выполнены неравенства

$$2 > \tilde{L} \cdot M_X \geq \text{mult}_P(\tilde{L}) \text{mult}_P(M_X) \geq 2 \text{mult}_C(M_X) \geq 2,$$

что является противоречием.

Без условия $\mathbb{Q}$ -факториальности многообразие X может быть даже рациональным.

ПРИМЕР 2.2.2. Пусть $S \subset \mathbb{P}^3$ – секстика Барта (см. [5])

$$4(\tau^2 x^2 - y^2)(\tau^2 y^2 - z^2)(\tau^2 z^2 - x^2) = t^2(1 + 2\tau)(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)^2 \subset \mathbb{P}^3 \\ \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t]),$$

где $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Тогда X нодально, а количество его особых точек равно 65, причем можно показать, что никакая нодальная секстика в $\mathbb{P}^3$ не может иметь более чем 65 обыкновенных двойных точек (см. [98], [180]). Более того, существует детерминантальная нодальная квартика $Y \subset \mathbb{P}^3$, имеющая 42 особые точки, такая, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}^4 \\ | & & | \\ \rho | & & | \gamma \\ X & \xrightarrow{\quad \pi \quad} & \mathbb{P}^3 \end{array}$$

коммутативна (см. [56], [139]), где γ – проекция из особой точки квартики Y , а ρ – бирациональное отображение. В частности, многообразие X рационально, поскольку детерминантальные квартики рациональны.

Несложно построить пример многообразия X , которое не является $\mathbb{Q}$ -факториальным и имеет 15 особых точек (см. пример 2.2.6). С другой стороны, по аналогии с предложением 2.1.9 можно доказать следующий результат (см. [36]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2.3. *Многообразие X является $\mathbb{Q}$ -факториальным при $|\text{Sing}(S)| \leq 14$.*

СЛЕДСТВИЕ 2.2.4. *Предположим, что $|\text{Sing}(X)| \leq 14$. Тогда X бирационально сверхжестко, нерационально и бирационально не изоморфно расслоению на коники.*

Утверждение предложения 2.2.3 можно обобщить следующим образом (см. [33]).

ТЕОРЕМА 2.2.5. Пусть $\gamma: V \rightarrow \mathbb{P}^3$ – двойное накрытие с ветвлением в нодальной поверхности $F \subset \mathbb{P}^3$ степени $2r$ и $|\text{Sing}(V)| \leq (2r - 1)r/3$. Тогда V является $\mathbb{Q}$ -факториальным.

Из работы [40] следует, что, в обозначениях и условиях теоремы 2.2.5, нодальное многообразие V является $\mathbb{Q}$ -факториальным, если и только если обыкновенные двойные точки поверхности F накладывают независимые линейные условия на гиперповерхности в $\mathbb{P}^3$ степени $3r - 4$. Неравенство в теореме 2.2.5 не является точным (см. предложение 2.2.3), тем не менее, асимптотически оно отражает общую картину верно.

ПРИМЕР 2.2.6. Рассмотрим гиперповерхность $V \subset \mathbb{P}(1^4, r)$:

$$u^2 = g_r^2(x, y, z, t) + h_1(x, y, z, t)f_{2r-1}(x, y, z, t) \subset \mathbb{P}(1^4, r) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, u]),$$

где g_i , h_i и f_i – достаточно общие многочлены степени i . Пусть $\gamma: V \rightarrow \mathbb{P}^3$ – естественная проекция. Тогда γ – двойное накрытие, разветвленное над нодальной гиперповерхностью степени $2r$, такое, что $|\text{Sing}(V)| = (2r - 1)r$, но V не является $\mathbb{Q}$ -факториальным.

Можно высказать следующее предположение.

ГИПОТЕЗА 2.2.7. Пусть $\gamma: V \rightarrow \mathbb{P}^3$ – двойное накрытие с ветвлением в нодальной поверхности $F \subset \mathbb{P}^3$ степени $2r$ и $|\text{Sing}(V)| < (2r - 1)r$. Тогда V является $\mathbb{Q}$ -факториальным.

Помимо бирациональной сверхжесткости X обладает еще рядом интересных свойств.

ПРИМЕР 2.2.8. Пусть O – особая точка многообразия X , а $\gamma: \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – проекция из точки $\pi(O)$. Тогда общий слой отображения $\gamma \circ \pi$ – неособая эллиптическая кривая.

ПРИМЕР 2.2.9. Пусть L – прямая на S такая, что $|\text{Sing}(X) \cap L| = 4$. Тогда для достаточно общей точки P многообразия X существует единственная гиперплоскость $H \subset \mathbb{P}^3$, содержащая точку $\pi(P)$ и прямую L . Пусть C – кривая степени 5, лежащая на плоскости H , такая, что выполнено соотношение $S \cap H = L \cup C$. Тогда пересечение $L \cap (C \setminus \text{Sing}(X))$ состоит из некоторой точки Q и, следовательно, существует единственная прямая $Z \subset \mathbb{P}^3$, проходящая через точки Q и $\pi(P)$. Таким образом, построено отображение $\Xi_L: X \dashrightarrow \text{Gr}(2, 4)$, сопоставляющее точке P многообразия X прямую $\Xi_L(P) = Z$, а нормализация общего слоя рационального отображения Ξ_L является эллиптической кривой.

Имеет место следующий результат (см. [23], [24], [36]).

ТЕОРЕМА 2.2.10. Предположим, что особенности многообразия X являются $\mathbb{Q}$ -факториальными, но существует бирациональное отображение $\rho: X \dashrightarrow Y$ такое, что многообразие Y неособо и существует морфизм $\tau: Y \rightarrow Z$, общий слой которого является эллиптической кривой. Тогда выполнено одно из следующего:

– для некоторой особой точки O на X существует коммутативная диа-

грамма

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\rho} & Y \\
 \pi \swarrow & & \downarrow \tau \\
 \mathbb{P}^3 & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{P}^2 \\
 & & \searrow \beta \\
 & & Z
 \end{array}
 \quad (2.2.11)$$

где γ – проекция из $\pi(O)$, а β – бирациональное отображение;
 – поверхность S содержит прямую $L \subset \mathbb{P}^3$, которая проходит ровно через 4 особых точки поверхности S , и существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\Xi_L} & \mathbb{P}^2 \\
 \rho \swarrow & & \searrow \beta \\
 Y & \xrightarrow{\tau} & Z
 \end{array}
 \quad (2.2.12)$$

где β – бирациональное отображение, а Ξ_L – рациональное отображение, построенное в примере 2.2.9.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим очень обильный дивизор $\check{H}$ на Z . Пусть $\mathcal{M}$ – собственный прообраз линейной системы $|\tau^*(\check{H})|$ на X . Тогда $\mathcal{M} \subset |-nK_X|$ для $n \in \mathbb{N}$, и $\mathcal{M}$ не составлена из пучка. Положим $M_X = \frac{1}{n}\mathcal{M}$. Тогда $\mathbb{CS}(X, M_X) \neq \emptyset$ по теореме 1.4.4, а из доказательства теоремы 2.2.1 следует, что множество $\mathbb{CS}(X, M_X)$ не может содержать неособых точек многообразия X .

Пусть $\mathbb{CS}(X, M_X)$ содержит особую точку $O \in X$, $f: W \rightarrow X$ – ее раздутие, C – общий слой эллиптического расслоения $\phi|_{-K_W}: W \rightarrow \mathbb{P}^2$, а D – общая поверхность в линейной системе $f^{-1}(\mathcal{M})$. Тогда

$$2(n - \text{mult}_O(\mathcal{M})) = C \cdot D \geq 0,$$

но $\text{mult}_O(\mathcal{M}) \geq n$ по теореме 1.7.20. Значит, линейная система $f^{-1}(\mathcal{M})$ лежит в слоях расслоения $\phi|_{-K_W}$, откуда следует существование коммутативной диаграммы (2.2.11).

Таким образом, можно считать, что множество $\mathbb{CS}(X, M_X)$ не содержит точек многообразия X , откуда следует, что оно содержит некоторую кривую $C \subset X$ такую, что выполнено неравенство $\text{mult}_C(\mathcal{M}) \geq n$. Пусть H – общий дивизор в $|-K_X|$. Тогда

$$2 = H \cdot K_X^2 \geq H \cdot M_X^2 \geq \text{mult}_C(M_X^2) H \cdot C \geq -K_X \cdot C,$$

откуда следует, что выполнено равенство $-K_X \cdot C \leq 2$.

Пусть $-K_X \cdot C = 2$. Тогда $\text{Supp}(M_X^2) = C$ и $\text{mult}_C(M_X^2) = \text{mult}_C^2(M_X) = 1$, откуда следует, что для двух различных поверхностей M_1 и M_2 в $\mathcal{M}$ выполнены равенства

$$\text{mult}_C(M_1 \cdot M_2) = \text{mult}_C(M_1) = \text{mult}_C(M_2) = n$$

и теоретико-множественное тождество $M_1 \cap M_2 = C$. Пусть P – достаточно общая точка в дополнении $X \setminus C$, а $\mathcal{D}$ – линейная подсистема в $\mathcal{M}$, состоящая из поверхностей,

проходящих через точку P . Тогда линейная система $\mathcal{D}$ не имеет неподвижных компонент, поскольку линейная система $\mathcal{M}$ не составлена из пучка. Пусть D_1 и D_2 – две общих поверхности в линейной системе $\mathcal{D}$. Тогда в теоретико-множественном смысле

$$P \in D_1 \cap D_2 = M_1 \cap M_2 = C,$$

поскольку D_1 и D_2 содержатся в $\mathcal{M}$. Противоречие.

Итак, показано, что выполнено равенство $-K_X \cdot C = 1$. Значит, $\pi(C)$ – прямая в $\mathbb{P}^3$, а ограничение $\pi|_C: C \rightarrow \pi(C)$ является изоморфизмом. Более того, из предыдущих аргументов следует, что множество $\mathbb{CS}(X, M_X)$ не содержит никаких подмногообразий многообразия X кроме кривой C и выполнено неравенство $\text{mult}_C(\mathcal{M}^2) < 2n^2$.

Пусть $\pi(C) \not\subset S$. Рассмотрим пучок $\mathcal{H}$ в линейной системе $|-K_X|$, состоящий из поверхностей, содержащих C . Тогда базисное множество пучка $\mathcal{H}$ состоит из кривой C и еще одной кривой $\tilde{C}$ такой, что $\pi(C) = \pi(\tilde{C})$. Пусть D – общий дивизор в $\mathcal{H}$. Тогда $M_X|_D$ уже не является подвижной границей, но

$$M_X|_D = \text{mult}_C(M_X)C + \text{mult}_{\tilde{C}}(M_X)\tilde{C} + R_D,$$

где R_D – подвижная граница на D . По построению

$$\text{Sing}(D) \cap C = \{P_1, \dots, P_k\},$$

где P_i – особые точки многообразия X , лежащие на кривой C . Более того, точка P_i является обыкновенной двойной точкой на D ввиду общности выбора поверхности D в линейной системе $\mathcal{H}$. На поверхности D выполнены равенства $C^2 = \tilde{C}^2 = -2 + k/2$, но $k \leq 3$, откуда

$$(1 - \text{mult}_{\tilde{C}}(M_X))\tilde{C}^2 = (\text{mult}_C(M_X) - 1)C \cdot \tilde{C} + R_D \cdot \tilde{C} \geq 0,$$

что влечет $\tilde{C} \in \mathbb{CS}(X, M_X)$. Противоречие. Значит, прямая $\pi(C)$ содержится в $S \subset \mathbb{P}^3$.

Пусть H – общая гиперплоскость в $\mathbb{P}^3$, содержащая прямую $\pi(C)$. Тогда кривая

$$D = H \cap S = \pi(C) \cup Q$$

приведена и $\pi(C) \not\subset \text{Supp}(Q)$, где Q – плоская кривая степени 5, причем кривая D особа в каждой особой точке P_i поверхности S , лежащей на прямой $\pi(C)$, где $i = 1, \dots, k$, однако множество $\pi(C) \cap Q$ состоит не более чем из 5 точек, но

$$\text{Sing}(D) \cap \pi(C) = Q \cap C,$$

откуда следует, что $k = |\text{Sing}(X) \cap C| \leq 5$.

Пусть $k \leq 3$. Тогда из теоремы Бертини следует, что пересечение $\pi(C) \cap Q$ содержит по крайней мере две различные точки, назовем их O_1 и O_2 , отличные от точек P_i . В этом случае, гиперплоскость H касается S в точках O_1 и O_2 . Положим $\tilde{O}_j = \pi^{-1}(O_j)$. Пусть L_j – общая прямая в H , проходящая через O_j , а $\tilde{L}_j$ – собственный прообраз L_j на X . Тогда L_j касается поверхности S в точке O_j , кривая $\tilde{L}_j$ неприводима и особа в точке $\tilde{O}_j$, с другой стороны, мы имеем $-K_X \cdot \tilde{L}_j = 2$. Пусть $\tilde{H} = \pi^{-1}(H)$, а M – общая поверхность в $\mathcal{M}$. Тогда

$$M|_{\tilde{H}} = \text{mult}_C(M_X)C + R,$$

где R – эффективный дивизор на $\tilde{H}$ такой, что $C \not\subset \text{Supp}(R)$, и

$$2n = M \cdot \tilde{L}_j \geq \text{mult}_{\tilde{O}_j}(\tilde{L}_j) \text{mult}_C(M) + \sum_{P \in (M \setminus C) \cap \tilde{L}_j} \text{mult}_P(M) \cdot \text{mult}_P(\tilde{L}_j) \geq 2n,$$

откуда следует, что $M \cap \tilde{L}_j \subset C$. При варьировании L_1 и L_2 в H кривые $\tilde{L}_1$ и $\tilde{L}_2$ порождают два различных пучка на $\tilde{H}$, базисное множество которых состоит из $\tilde{O}_1$ и $\tilde{O}_2$ соответственно, откуда сразу следует, что $R = \emptyset$. Таким образом, в теоретико-множественном смысле выполнено равенство $M \cap \tilde{H} = C$ для общего дивизора $\tilde{H}$ в линейной системе $| -K_X |$, проходящего через кривую C , и произвольного дивизора M в линейной системе $\mathcal{M}$ такого, что выполнено соотношение $\tilde{H} \not\subset \text{Supp}(M)$. Пусть $\tilde{P}$ – общая точка в $\tilde{H} \setminus C$, а $\tilde{\mathcal{M}}$ – линейная подсистема линейной системы $\mathcal{M}$, состоящая из поверхностей, содержащих $\tilde{P}$. Тогда $\tilde{\mathcal{M}}$ не имеет неподвижных компонент, поскольку $\mathcal{M}$ не составлена из пучка. Пусть $\tilde{M}$ – общая поверхность в $\tilde{\mathcal{M}}$. Тогда $\tilde{P} \in \tilde{M} \cap \tilde{H} = C$, так как $\tilde{H} \not\subset \text{Supp}(\tilde{M})$. Противоречие.

Итак, показано, что либо $k = 4$, либо $k = 5$. Пусть $g: V \rightarrow X$ – раздутие пучка идеалов кривой C , а F – g -исключительный дивизор. Тогда

$$-K_V \sim_{\mathbb{Q}} M_V \sim_{\mathbb{Q}} g^*(-K_X) - F,$$

где $M_V = g^{-1}(M_X)$, поскольку $\text{mult}_C(M_X) = 1$, так как многообразие X бирационально сверхжестко по теореме 2.2.1. Можно показать (см. [36], [176]), что выполнено следующее:

- многообразие V имеет k особых точек типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, каждая из которых доминирует особую точку многообразия X , которая принадлежит кривой C ;
- морфизм $g|_F: F \rightarrow C$ имеет четыре приводимых слоя, каждый из которых состоит из двух рациональных кривых, пересекающихся трансверсально в особой точке многообразия V , которая является обыкновенной двойной точкой на F ;
- линейная система $| -K_V |$ является пучком, а ее базисное множество состоит из неособой кривой $\tilde{C}$, которая содержится в F и является сечением морфизма $g|_F$;
- выполнено соотношение $\tilde{C} \equiv K_V^2$, а дивизор $-K_V$ является численно эффективным в том и только том случае, когда $-K_V^3 = -2 + \frac{k}{2} \geq 0$.

Таким образом, дивизор $-K_V$ численно эффективен. С другой стороны, образ каждого элемента множества $\text{CS}(V, M_V)$ на X обязан принадлежать $\text{CS}(X, M_X)$, так как

$$K_V + M_V \sim_{\mathbb{Q}} g^*(K_X + M_X),$$

откуда следует, что каждый элемент множества $\text{CS}(V, M_V)$ является кривой в F , доминирующей кривую C , и, следовательно, его существование влечет $\text{mult}_C(\mathcal{M}) \geq 2n^2$, что невозможно по доказанному ранее. Таким образом, для некоторого рационального $\lambda > 1$ особенности лог-пары $(V, \lambda M_V)$ терминальны. Значит, линейная система $| -rK_V |$ свободна при $r \gg 0$ (см. теорему 3.1.1 в [106]).

Пусть $k = 4$. Тогда морфизм $\phi|_{-rK_V}$ является расслоением на эллиптические кривые, а из равенства $K_V^2 \cdot M_V = 0$ вытекает, что линейная система $g^{-1}(\mathcal{M})$ лежит в слоях $\phi|_{-rK_V}$, откуда несложно следует существование коммутативной диаграммы (2.2.12).

Пусть $k = 5$. Тогда имеется бирациональный морфизм $\phi|_{-rK_V}: V \rightarrow U$, где U – многообразие Фано с каноническими особенностями, $-K_U^2 = \frac{1}{2}$ и выполнено соотношение

$$K_V + \lambda M_V \sim_{\mathbb{Q}} \phi|_{-rK_V}^*(K_U + \lambda M_U),$$

где $M_U = \phi|_{-rK_V}(M_V)$. Таким образом, лог-пара $(U, \lambda M_U)$ – каноническая модель. В частности, выполнено равенство $\kappa(U, \lambda M_U) = 3$, но

$$\kappa(U, \lambda M_U) = \kappa\left(Y, \frac{\lambda}{n}|\tau^*(\check{H})|\right) \leq \dim(Z) = 2,$$

что является противоречием.

Утверждение теоремы 2.2.10 верно над любым полем определения $\mathbb{F}$ характеристики нуль. Можно показать (см. [36]), что утверждение теоремы 2.2.10 верно над любым совершенным полем $\mathbb{F}$ в случае, когда $\text{char}(\mathbb{F}) \notin \{2, 3, 5\}$, но уже не верно, если $\text{char}(\mathbb{F}) = 5$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2.13. *Пусть X неособо. Тогда многообразие X не может быть бирационально перестроено в расслоения на эллиптические кривые.*

Бирациональные перестройки неособых трехмерных многообразий Фано в эллиптические расслоения и свойства точек кручения определенных над числовым полем эллиптических кривых (см. [130]) были использованы в [10], [11], [72] для доказательства потенциальной плотности¹² рациональных точек на трехмерных многообразиях Фано, где было получено следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.2.14. *Рациональные точки потенциально плотны на всех гладких трехмерных многообразиях Фано кроме, быть может, двойного накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в секстике.*

Возможное исключение в теореме 2.2.14 возникло из-за того, что двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в гладкой секстике не удалось бирационально перестроить в эллиптическое расслоение. Из классификации неособых трехмерных многообразий Фано следует, что гладкое двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в секстике является единственным неособым трехмерным многообразием Фано, которое не может быть бирационально перестроено в эллиптическое расслоение (см. следствие 2.2.13 и [95]). Из унирациональности алгебраического многообразия, определенного над числовым полем, следует, что рациональные точки на нем потенциально плотны. Хорошо известна *ослабленная гипотеза Ленга* о том, что рациональные точки на многообразиях общего типа не потенциально плотны, которая доказана для подмногообразий абелевых многообразий (см. [58], [59]). Геометрия бирационально сверхжестких многообразий во многом напоминает геометрию многообразий общего типа, что дает надежду на то, что на некоторых бирационально сверхжестких многообразиях рациональные точки не потенциально плотны и, следовательно, существуют неунирациональные рационально связные многообразия.

¹²Рациональные точки многообразия V , определенного над некоторым числовым полем $\mathbb{F}$, потенциально плотны, если существует конечное расширение полей $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ такое, что множество $\mathbb{K}$ -точек плотно в топологии Зариского на многообразии V .

§ 2.3. Двойное накрытие квадрики

Пусть $\psi: X \rightarrow Q$ – двойное накрытие трехмерной квадрики $Q \subset \mathbb{P}^4$, разветвленное в поверхности $S \subset Q$ такой, что X имеет не более чем изолированные обыкновенные двойные точки, а S высекается на квадрике Q кватрикой. Тогда X является многообразием Фано степени 4, выполнено соотношение $-K_X \sim \psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)|_Q)$, многообразие X унирационально и имеет место следующая теорема (см. [87]).

ТЕОРЕМА 2.3.1. *Пусть X неособо. Тогда X бирационально жестко.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X не является бирационально жестким. Например, предположим для наглядности, что существует бирациональное отображение $\rho: X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию, а доказательства оставшихся возможных случаев опустим.

Пусть σ – бирациональный автоморфизм многообразия X . Рассмотрим линейную систему $\mathcal{M} = (\rho \circ \sigma)^{-1}(|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|)$. Из теоремы Лефшеца следует, что группа $\text{Pic}(X)$ порождена антиканоническим дивизором $-K_X$. Значит, существует такое натуральное число n , что выполнено соотношение $\mathcal{M} \sim -nK_X$. Число n зависит также и от бирационального автоморфизма σ , следовательно, можно считать, что бирациональный автоморфизм σ выбран таким образом, что число n принимает наименьшее значение.

Особенности лог-пары $(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ не канонические (см. доказательство теоремы 1.4.1). Более того, из доказательства теорем 2.1.1 и 2.2.1 сразу следует, что особенности подвижной лог-пары $(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ не являются каноническими в общей точке некоторой неприводимой кривой $C \subset X$ такой, что выполнено неравенство $-K_X \cdot C \leq 3$. В частности, выполнено неравенство $\text{mult}_C(\mathcal{M}) > n$.

Предположим, что $-K_X \cdot C = 2$, а кривая $\psi(C)$ является прямой. Пусть η – композиция двойного накрытия ψ с проекцией из прямой $\psi(C)$, а L – достаточно общая кривая на многообразии X , которая стягивается отображением η в точку. Тогда L – неособая эллиптическая кривая такая, что $-K_X \cdot L = 2$, а пересечение $L \cap C$ состоит из двух различных точек. Пусть S – общая поверхность в линейной системе $\mathcal{M}$. Тогда $L \not\subset S$, поскольку линейная система $\mathcal{M}$ не имеет неподвижных компонент. С другой стороны, имеем

$$2n = S \cdot L \geq \sum_{O \in L \cap C} \text{mult}_O(S) \text{mult}_O(L) \geq \sum_{O \in L \cap C} \text{mult}_C(S) > 2n,$$

что есть противоречие.

Предположим, что $-K_X \cdot C = 1$ и $\psi(C) \subset S$. Тогда $\psi(C)$ – прямая. Пусть L – общая кривая на X такая, что $-K_X \cdot L = 2$, а образ $\psi(L)$ является прямой на квадрике Q , которая касается поверхности S в точке прямой $\psi(C)$. Тогда из условия $\psi(C) \subset S$ следует, что кривая L не содержится в базисном множестве линейной системы $\mathcal{M}$. Пусть O – точка пересечения кривых C и L . Тогда $\text{mult}_O(L) \geq 2$, откуда сразу следует противоречие с неравенством $\text{mult}_C(\mathcal{M}) > n$, как и в случае, когда $-K_X \cdot C = 2$, а $\psi(C)$ – прямая.

Предположим, что $-K_X \cdot C = 1$, но $\psi(C) \not\subset S$. Тогда $\psi(C)$ – прямая и существует неособая кривая $Z \subset X$, отличная от C , такая, что $\psi(Z) = \psi(C)$. Пусть η – композиция двойного накрытия ψ с проекцией из $\psi(C)$, $\pi: V \rightarrow X$ – композиция раздутия неособой кривой C и последующего раздутия собственного прообраза неособой кривой Z , E – исключительный дивизор морфизма π , доминирующий кривую C , а G – исключительный дивизор, доминирующий кривую Z . Тогда отображение

$$\eta \circ \pi: V \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$

является морфизмом над общей точкой $\mathbb{P}^2$, его общий слой является эллиптической кривой, а поверхности E и G являются сечениями отображения $\eta \circ \pi$. Пусть γ – отображение общего слоя отображения $\eta \circ \pi$ в сечении G , которое можно воспринимать как точку на соответствующей эллиптической кривой. Тогда инволюция γ индуцирует бирациональную инволюцию $\tau = \pi \circ \gamma \circ \pi^{-1}$ многообразия X . Легко видеть, что инволюция τ не является бирегулярной. Значит, выполнена рациональная эквивалентность

$$\tau(\mathcal{M}) \sim -n'K_X,$$

где n' – натуральное число. Более того, рассуждая как в доказательстве теоремы 1.5.1, мы видим, что $n' < n$, что противоречит минимальности числа n .

Таким образом, мы показали, что либо $-K_X \cdot C = 2$, либо $-K_X \cdot C = 3$, причем ограничение $\psi|_C$ является изоморфизмом. В частности, кривая C неособа, а кривая $\psi(C)$ является либо неприводимой неособой коникой, либо неособой рациональной кривой степени 3.

Пусть $\xi: W \rightarrow X$ – раздутие кривой C , а F – исключительный дивизор бирационального морфизма ξ , $\mathcal{B} = \xi^{-1}(\mathcal{M})$ и $d = -K_X \cdot C$. Тогда, как и в доказательстве теоремы 2.2.1, несложно показать, что дивизор $\xi^*(-dK_X) - F$ численно эффективен. Таким образом, для двух общих поверхностей S_1 и S_2 в линейной системе $\mathcal{B}$ выполнено

$$0 > (\xi^*(-dK_X) - F)(\xi^*(-nK_X) - \text{mult}_C(\mathcal{M})F)^2 = S_1 \cdot S_2 \cdot (\xi^*(-dK_X) - F) \geq 0,$$

поскольку выполнено неравенство $\text{mult}_C(\mathcal{M}) > 0$. Противоречие.

Для каждой кривой $L \subset X$, такой что $-K_X \cdot L = 1$ и $\psi(L) \not\subset S$, существует бирациональная инволюция τ многообразия X , которая небирегулярна. В неособом случае таких кривых на многообразии X имеется одномерное семейство, а соответствующие бирациональные инволюции не связаны никакими соотношениями (см. [87]). Пусть Γ – подгруппа в $\text{Bir}(X)$, порожденная этими бирациональными инволюциями. Тогда доказательство теоремы 2.3.1 влечет следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.3.2. *Пусть X неособо. Тогда существует точная последовательность групп*

$$1 \rightarrow \Gamma \rightarrow \text{Bir}(X) \rightarrow \text{Aut}(X) \rightarrow 1.$$

ГИПОТЕЗА 2.3.3. *Пусть X является $\mathbb{Q}$ -факториальным. Тогда X бирационально жестко.*

Утверждение гипотезы 2.3.3 доказано в работе [70] в дополнительном предположении, что многообразие X имеет одну обыкновенную двойную точку и удовлетворяет некоторым требованиям общности. Более того, в работе [71] доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.3.4. *Пусть Q – конус, поверхность S неособа и не проходит через вершину конуса Q , а $\alpha: X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ и $\beta: X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ – отображения, индуцированные различными проекциями основания конуса Q , которое изоморфно $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Тогда общие слои расслоений α и β суть поверхности дель Пеццо степени 2, а X не является $\mathbb{Q}$ -факториальным многообразием. Предположим, что существуют*

расслоение Мори $\tau: Y \rightarrow Z$ и бирациональное отображение $\rho: X \dashrightarrow Y$, а поверхность S достаточно общая. Тогда существует бирациональный автоморфизм σ многообразия X такой, что $\rho \circ \tau = \alpha \circ \sigma$ или $\rho \circ \tau = \beta \circ \sigma$.

В работе [146] утверждение теоремы 2.3.1 было обобщено следующим образом.

ТЕОРЕМА 2.3.5. Пусть $\zeta: V \rightarrow Y$ – двойное накрытие неособой квадрики $Y \subset \mathbb{P}^n$, разветвленное в неособом дивизоре $D \subset Y$, где $n \geq 5$ и $D \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2n-4)|_Y$. Тогда V – бирационально сверхжесткое многообразие Фано степени 4.

Можно показать, что из теоремы 1.7.23 следует утверждение теоремы 2.3.5 в полном случае. Результат, аналогичный теореме 2.2.10, получен в [26] для X в неособом случае.

§ 2.4. Пересечение квадрики и кубики

Пусть $X = Q \cap V \subset \mathbb{P}^5$ – неособое полное пересечение, где Q – квадрика, а V – кубика. Тогда $-K_X \sim \psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1)|_X)$. Таким образом, многообразие X является неособым многообразием Фано степени 6, а из теоремы Лефшеца следует, что группа $\text{Pic}(X)$ порождена дивизором $-K_X$. Известно, что многообразие X унирационально (см. [87]) и обладает небирегулярными бирациональными автоморфизмами (см. пример 1.3.14).

ПРИМЕР 2.4.1. Пусть L – прямая на X , а $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ – проекция из нее. Тогда отображение ψ является двулистным накрытием над общей точкой в $\mathbb{P}^3$ и индуцирует бирациональную инволюцию τ многообразия X , которая, как легко видеть, не является бирегулярной.

Имеет место следующий результат (см. [87], [96]).

ТЕОРЕМА 2.4.2. Пусть X достаточно общее. Тогда X бирационально жестко и существует точная последовательность групп

$$1 \rightarrow \Gamma \rightarrow \text{Bir}(X) \rightarrow \text{Aut}(X) \rightarrow 1,$$

где Γ – свободное произведение групп, порожденных инволюциями примеров 2.4.1 и 1.3.14.

В оставшейся части данного параграфа мы приведем набросок доказательства бирациональной жесткости многообразия X . Например, предположим, что существует бирациональное отображение $\rho: X \dashrightarrow Y$ такое, что существует морфизм $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$, являющийся расслоением на коники. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Рассмотрим линейную систему

$$\mathcal{M} = (\rho \circ \sigma)^{-1}(|\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|),$$

где σ – бирациональный автоморфизм многообразия X . Выберем натуральное число n такое, что $\mathcal{M} \sim -nK_X$, и выберем бирациональный автоморфизм σ таким образом, что число n принимает наименьшее значение из всех возможных. Тогда особенности подвижной лог-пары $(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ не канонические (см. доказательство теоремы 1.4.1). В частности, для некоторого положительного рационального числа $\mu < \frac{1}{n}$ множество $\text{CS}(X, \mu\mathcal{M})$ непусто.

Предположим, что множество $\mathbb{CS}(X, \mu\mathcal{M})$ содержит кривую Z , лежащую на многообразии X . Тогда $\text{mult}_Z(\mathcal{M}) > n$, откуда следует, что $\deg(Z) \leq 5$. В случае, когда Z является прямой, пусть τ – инволюция из примера 2.4.1, а в случае, когда Z является коникой, такой что содержащая ее плоскость лежит на квадрике Q , пусть τ – инволюция, построенная в примере 1.3.14. Тогда $\tau(\mathcal{M}) \sim -\hat{n}K_X$ для натурального $\hat{n} < n$, что противоречит минимальности натурального числа n . Во всех оставшихся случаях противоречие выводится из неравенства $\text{mult}_Z(\mathcal{M}) > n$ как в доказательстве теоремы 2.3.1 (см. [87]).

Таким образом, множество $\mathbb{CS}(X, \mu\mathcal{M})$ содержит точку $P \in X$. Воспользуемся рассуждениями работы [46]. Пусть T – пересечение двух гиперплоскостей в $\mathbb{P}^5$, касающихся квадрики Q и кубики V в точке P соответственно. Предположим, что X достаточно общее в следующем смысле: кривая $T \cap X$ является кривой степени 6 такой, что $\text{mult}_P(T \cap X) = 4$, особенность кривой $T \cap X$ в точке P аналитически эквивалентна конусу над 4 общими точками в $\mathbb{P}^2$, при этом возможны следующие варианты:

- пересечение $T \cap X$ есть неприводимая кривая Δ степени 6, где $\text{mult}_P(\Delta) = 4$;
- пересечение $T \cap X$ состоит из объединения неприводимой кривой Δ степени 5 и прямой Γ_1 , проходящей через точку P , при этом $\text{mult}_P(\Delta) = 3$;
- пересечение $T \cap X$ состоит из объединения неприводимой кривой Δ степени 4 и прямых Γ_1 и Γ_2 , проходящих через точку P , при этом $\text{mult}_P(\Delta) = 2$;
- пересечение $T \cap X$ состоит из объединения неприводимой неособой рациональной кривой Δ степени 3 и прямых $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, проходящих через точку P .

Мы рассмотрим только случай, когда пересечение $T \cap X$ состоит из объединения неприводимой неособой рациональной кривой Δ степени 3 и прямых $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, проходящих через точку P . Пусть $\xi: U \rightarrow X$ – раздутие точки P , F – исключительный дивизор бирационального морфизма ξ , а S – общее гиперплоское сечение полного пересечения X , которое содержит $T \cap X$. Положим $\bar{S} = \xi^{-1}(S)$, $\Phi = F|_{\bar{S}}$, $\bar{\Delta} = \xi^{-1}(\Delta)$ и $\bar{\Gamma} = \xi^{-1}(\Gamma)$. Тогда поверхность $\bar{S}$ неособа и на ней выполнены равенства

$$\begin{cases} \Phi^2 = \bar{\Delta}^2 = \bar{\Gamma}_i^2 = -2, \\ \bar{\Delta} \cdot \bar{\Gamma}_i = \Phi \cdot \bar{\Gamma}_i = \bar{\Delta} \cdot \Phi = 1, \\ \bar{\Gamma}_i \cdot \bar{\Gamma}_j = 0 \iff i \neq j. \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии U . Тогда

$$\mathcal{B}|_{\bar{S}} - m\bar{\Delta} - \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\Gamma}_i = \mathcal{D} \sim \varepsilon \Phi + \delta \bar{\Delta} + \sum_{i=1}^3 \gamma_i \bar{\Gamma}_i,$$

где $\mathcal{D}$ – линейная система без неподвижных компонент, а m и m_i – неотрицательные целые числа, $m < n$, $m_i < n$, $\varepsilon = 2n - \text{mult}_P(\mathcal{M})$, $\delta = n - m$ и $\gamma_i = n - m_i$. Таким образом, для двух достаточно общих кривых D_1 и D_2 в линейной системе $\mathcal{D}$ имеем

$$D_1 \cdot D_2 = 2n^2 \left(\varepsilon \delta - \varepsilon^2 - \delta^2 - \sum_{i=1}^3 \gamma_i^2 + (\varepsilon + \delta) \sum_{i=1}^3 \gamma_i \right) \geq 0. \quad (2.4.3)$$

Предположим, что $\text{mult}_P(\mathcal{M}) > 2n$. Тогда

$$D_1 \cdot D_2 = n^2 (6\varepsilon\delta - \gamma_3^2 - (\gamma_1 - \gamma_2)^2 - (\varepsilon + \delta - \gamma_1 - \gamma_2)^2 - (\varepsilon + \delta - \gamma_3)^2) < 0,$$

поскольку $\varepsilon \leq 0$. Значит, выполнено неравенство $\text{mult}_P(\mathcal{M}) \leq 2n$, и из следствия 1.7.26 следует, что существует прямая $\Lambda \subset F \cong \mathbb{P}^2$ такая, что лог-пара

$$\left(U, \frac{1}{n}\mathcal{B} + (1 - \text{mult}_P(\mathcal{M})/n)F \right)$$

не лог-канонична в Λ , но $\overline{S}$ пересекает Λ в двух различных точках. Итак, лог-пара

$$\left(\overline{S}, \frac{1}{n}\mathcal{D} + (1 - \delta/n)\overline{\Delta} + \sum_{i=1}^3 (1 - \gamma_i/n)\Gamma_i + (1 - \text{mult}_P(\mathcal{M})/n)\Phi \right)$$

не лог-канонична в двух различных точках O_1 и O_2 , лежащих на кривой Φ , в силу общности выбора поверхности S . Теперь из теоремы 1.7.17 мы получаем

- $D_1 \cdot D_2 > 8n^2\varepsilon\delta$, если $O_1 \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ и $O_2 \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$,
- $D_1 \cdot D_2 > 4n^2\varepsilon(\gamma_i + \gamma_j)$, если $O_1 \in \Gamma_i$ и $O_2 \in \Gamma_j$, где $i \neq j$,
- $D_1 \cdot D_2 > 4n^2\varepsilon(\delta + \gamma_i)$, если $O_1 \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, но $O_2 \in \Gamma_i$,
- $D_1 \cdot D_2 > 4n^2\varepsilon(\delta + \gamma_i)$, если $O_1 \in \Gamma_i$, но $O_2 \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$,

что, как несложно видеть, противоречит неравенству (2.4.3).

§ 2.5. Взвешенные гиперповерхности

Пусть $X \subset \mathbb{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4)$ – квазигладкая гиперповерхность степени d такая, что

$$-K_X \sim_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4)}(1),$$

выполнены неравенства $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, а гиперповерхность X имеет терминальные особенности. Тогда для пятерки (d, a_1, a_2, a_3, a_4) имеется 95 возможностей, которые были получены в [78] путем компьютерных вычислений. Полнота полученного в [78] списка доказана в работе [99].

Пусть S – достаточно общая поверхность в линейной системе $|-K_X|$. Тогда S является квазигладкой гиперповерхностью в $\mathbb{P}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ степени d , которая имеет дювалевские особенности, и выполнено соотношение $K_S \sim 0$. Таким образом, поверхность S является поверхностью типа $K3$. Оказывается, верен и обратный результат – каждая квазигладкая гиперповерхность во взвешенном проективном пространстве, являющаяся поверхностью типа $K3$ с дювалевскими особенностями, может быть получена с помощью описанной конструкции. Такие поверхности были классифицированы М. Ридом, но он не опубликовал этот результат, независимая классификация была получена в [181]. В работе [7] было показано, что выполнено равенство $\text{rk Pic}(S) = 1$, если X очень общее. Последнее утверждение обобщает классический результат о том, что группа Пикара очень общей гиперповерхности в $\mathbb{P}^3$ степени больше трех порождена гиперплоским сечением (см. [132]). Можно предположить, что аналогичное утверждение выполнено для очень общей квазигладкой гиперповерхности в $\mathbb{P}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ степени δ при $\delta \geq \sum_{i=1}^4 a_i$, однако последнее предположение доказано только в частных случаях (см. [172], [50], [101]).

Пусть n – порядковый номер X в обозначениях работы [78].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5.1. В случае $n = 1$ многообразие X является неособой трехмерной кватрикой, в случае $n = 3$ многообразие X является двулистным накрытием $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в неособой поверхности степени 6, во всех оставшихся случаях многообразие X особо.

Предположим, что X является достаточно общим. Хорошо известно, что X рационально связно (см. [170]), с другой стороны, следующий результат был получен в работе [49].

ТЕОРЕМА 2.5.2. *Многообразие X бирационально жестко.*

Утверждение теоремы 2.5.2 можно рассматривать как обобщение теорем 2.1.1 и 2.2.1, причем на идейном уровне доказательство теоремы 2.5.2 ничем не отличается от доказательств теорем 2.1.1, 2.2.1, 2.3.1 и 2.4.2 – исключение максимальных особенностей и *откручивание бирациональных автоморфизмов*, однако в доказательстве теоремы 2.5.2 содержится ряд принципиальных технических отличий. Мы не будем описывать схему доказательства теоремы 2.5.2, однако, для иллюстрации методов работы [49], мы докажем следующее обобщение следствия 2.2.13, полученное в работе [37].

ТЕОРЕМА 2.5.3. *Гиперповерхность X может быть бирационально перестроена в расслоение на эллиптические кривые в том и только том случае, когда $n \notin \{3, 60, 75, 84, 87, 93\}$.*

В случае $n = 1$ общий слой проекции неособой трехмерной кватрики $X \subset \mathbb{P}^4$ из прямой, содержащейся в ней, есть эллиптическая кривая. Если $n = 2$, то X бирационально эквивалентно двойному накрытию $\mathbb{P}^3$, разветвленному над особой секстикой (см. [49], [36]), имеющей 15 обыкновенных двойных точек, откуда следует, что X может быть бирационально перестроено в расслоение на эллиптические кривые (см. пример 2.2.8).

ЛЕММА 2.5.4. *Пусть $n \notin \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 60, 75, 84, 87, 93\}$. Тогда нормализация общего слоя естественной проекции $X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, a_1, a_2)$ является неособой эллиптической кривой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C – общий слой проекции $X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, a_1, a_2)$. Тогда C не может быть рациональной кривой по теореме 2.5.2. С другой стороны, кривая C является гиперповерхностью степени d в $\mathbb{P}(1, a_3, a_4) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, t, w])$, где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(t) = a_3$, $\text{wt}(w) = a_4$, причем либо $\lceil \frac{d}{a_3} \rceil \leq 3$, либо $\lceil \frac{d}{a_3} \rceil \leq 4$ и $d = 2a_4$. Пусть V – подмножество в $\mathbb{P}(1, a_3, a_4)$, заданное уравнением $x \neq 0$. Тогда $V \cong \mathbb{C}^2$, а аффинная кривая $V \cap C$ является либо кубической кривой, если $\lceil \frac{d}{a_3} \rceil \leq 3$, либо двойным накрытием $\mathbb{C}$, разветвленным в не более чем 4 точках, если $\lceil \frac{d}{a_3} \rceil \leq 4$ и $d = 2a_4$. Таким образом, кривая C эллиптическая.

Таким образом, в случае $n \notin \{1, 2, 3, 7, 11, 19, 60, 75, 84, 87, 93\}$ многообразие X бирационально эквивалентно эллиптическому расслоению, которое обладает сечением.

ЛЕММА 2.5.5. *Пусть $n \in \{7, 11, 19\}$. Тогда многообразие X может быть бирационально перестроено в расслоение на эллиптические кривые.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассмотрим только случай $n = 19$, поскольку в оставшихся случаях доказательство аналогичное. Итак, пусть $n = 19$. Тогда $d = 12$, а многообразие X есть гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 3, 4)$, которая может быть задана уравнением

$$\begin{aligned} & wf_8(x, y, z, t, w) + zf_3(z, t) \\ & + yf_{10}(x, y, z, t, w) + xf_{11}(x, y, z, t, w) = 0 \subset \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]), \end{aligned}$$

где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = 2$, $\text{wt}(z) = \text{wt}(t) = 3$, $\text{wt}(w) = 4$, f_i – общий квазиоднородный многочлен степени i . Пусть $\mathcal{H}$ – пучок поверхностей, высекаемых на многообразии X уравнениями $\lambda x^2 + \mu y = 0$, где $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$, а $\mathcal{B}$ – пучок поверхностей, которые высекаются на многообразии X уравнениями $\delta x^3 + \gamma z = 0$, где $(\delta : \gamma) \in \mathbb{P}^1$. Тогда пучки $\mathcal{H}$ и $\mathcal{B}$ задают отображение $\rho: X \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Пусть C – общий слой отображения ρ . Тогда C является гиперповерхностью степени 12 в $\mathbb{P}(1, 3, 4)$, которая содержит точку $(0 : 1 : 0)$, откуда следует, что аффинная часть кривой C является кубикой в $\mathbb{C}^2$, но кривая C нерациональна по теореме 2.5.2. Значит, кривая C эллиптическая.

СЛЕДСТВИЕ 2.5.6. *Многообразие X может быть бирационально перестроено в эллиптическое расслоение при $n \notin \{3, 60, 75, 84, 87, 93\}$.*

Теперь докажем теорему 2.5.3. Предположим, что $n \in \{3, 75, 84, 87, 93\}$, но существуют бирациональное отображение $\rho: X \dashrightarrow V$ и морфизм $\nu: V \rightarrow \mathbb{P}^2$ такие, что V неособо, а общий слой морфизма ν есть эллиптическая кривая. Покажем, что сделанные предположения противоречивы. Пусть $\mathcal{D} = |\nu^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$ и $\mathcal{M} = \rho^{-1}(\mathcal{D})$. Тогда $\mathcal{M} \sim -kK_X$ для некоторого натурального числа k , а особенности лог-пары $(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не терминальны по теореме 1.4.4. В частности, множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ непусто. С другой стороны, особенности лог-пары $(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ являются каноническими по следствию 1.4.3, поскольку X бирационально сверхжестко (см. [49]).

ЛЕММА 2.5.7. *Множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ не содержит гладких точек многообразия X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит гладкую точку $P \in X$. Рассмотрим квазиоднородные координаты (x, y, z, t, w) на $\mathbb{P}(1, a_1, a_2, a_3, a_4)$, где $\text{wt}(x) = 1$, $\text{wt}(y) = a_1$, $\text{wt}(z) = a_1$, $\text{wt}(t) = a_3$, $\text{wt}(w) = a_4$, такие, что $P = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$. Положим $\varepsilon = a_3$, если $\xi_0 \neq 0$, положим $\varepsilon = a_1 a_3$, если $\xi_0 = 0$ и $\xi_1 \neq 0$, а в случае $\xi_0 = \xi_1 = 0$ положим

$$\varepsilon = \min \left\{ \{ \text{н.о.к.}(a_i, a_j) \} \cup \{ a_i + a_j \mid a_k \text{ делит } a_i + a_j \} \right\},$$

где минимум берется по всем $\{i, j, k\} = \{2, 3, 4\}$. Тогда $-\varepsilon K_X^3 < 4$.

Пусть λ – некоторое натуральное число, а $\mathcal{H}$ – линейная подсистема в $|\varepsilon \lambda K_X|$, состоящая из поверхностей, имеющих кратность не менее чем λ в точке P . Тогда существует λ такое, что точка P является изолированной базисной точкой линейной системы $\mathcal{H}$ согласно теореме 5.6.2 работы [49]. Значит, для общей поверхности S в линейной системе $\mathcal{H}$ и общих поверхностей D_1 и D_2 в линейной системе $\mathcal{M}$ выполнено

$$\text{mult}_P(D_1 \cdot D_2) \leq \frac{D_1 \cdot D_2 \cdot S}{\text{mult}_P(S)} = \frac{-\lambda \varepsilon K_X^3 k^2}{\text{mult}_P(S)} \leq -\varepsilon K_X^3 k^2 < 4k^2,$$

что противоречит теореме 1.7.18.

Можно считать, что $n \neq 3$ ввиду следствия 2.2.13.

ЛЕММА 2.5.8. *Пусть C – кривая на X такая, что $C \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$. Тогда $C \notin \mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – очень обильный дивизор на X . Тогда $H \sim -\lambda K_X$ для $\lambda \in \mathbb{N}$ и

$$\frac{\lambda k^2}{60} \geq -\lambda k^2 K_X^3 = H \cdot S_1 \cdot S_2 \geq \text{mult}_C^2(\mathcal{M}) H \cdot C \geq \lambda \text{mult}_C^2(\mathcal{M}),$$

где S_1 и S_2 – общие поверхности в $\mathcal{M}$. Значит, $\text{mult}_C(\mathcal{M}) < k$.

Следующий результат получен в работе [104].

ТЕОРЕМА 2.5.9. Пусть $\pi: U \rightarrow V$ – бирациональный морфизм такой, что V и U являются трехмерными многообразиями, имеющими терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, морфизм π стягивает ровно один исключительный дивизор E , а $\pi(E)$ содержит особую точку O многообразия V , которая локально изоморфна терминальной фактор-особенности типа $\frac{1}{r}(1, a, r - a)$, где a и r – взаимно простые натуральные числа такие, что $r \geq 2$. Тогда π – взвешенное раздутие точки O с весами $(1, a, r - a)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.5.10. Пусть C – кривая на X такая, что $C \in \mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$. Тогда каждая точка в пересечении $C \cap \text{Sing}(X)$ также содержится в множестве $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$.

Значит, множество $\mathbb{CS}(X, \frac{1}{k}\mathcal{M})$ содержит точку P многообразия X , которая локально изоморфна терминальной фактор-особенности типа $\frac{1}{r}(1, a, r - a)$, где a и r – взаимно простые натуральные числа, причем $r \geq 2$. Пусть $\pi: Y \rightarrow X$ – взвешенное раздутие точки P с весами $(1, a, r - a)$, E – исключительный дивизор раздутия π , а $\mathcal{B}$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии Y . Тогда $\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} -kK_Y$ по теореме 2.5.9.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5.11. Выполнено неравенство $-K_Y^3 < 0$ (см. предложение 3.4.6 в [49]).

Пусть $\overline{\text{NE}}(Y) \subset \mathbb{R}^2$ – замыкание конуса одномерных циклов многообразия Y . Тогда класс цикла $-E \cdot E$ порождает один из экстремальных лучей конуса $\overline{\text{NE}}(Y)$, а другой экстремальный луч определяется следующей леммой, которая является следствием 5.4.6 работы [49].

ЛЕММА 2.5.12. Существуют целые числа $b > 0$ и $c \geq 0$ такие, что цикл $-K_Y \cdot (-bK_Y + cE)$ численно эквивалентен эффективной, неприводимой и приведенной кривой Γ на многообразии Y , которая порождает экстремальный луч конуса $\overline{\text{NE}}(Y)$, отличный от экстремального луча, порожденного циклом $-E \cdot E$.

Пусть S_1 и S_2 – различные поверхности в $\mathcal{B}$. Тогда $S_1 \cdot S_2 \in \overline{\text{NE}}(Y)$, но выполнена численная эквивалентность $S_1 \cdot S_2 \equiv k^2 K_Y^2$. Значит, цикл $S_1 \cdot S_2$ порождает экстремальный луч конуса $\overline{\text{NE}}(Y)$, содержащий Γ . Для каждого эффективного цикла $C \in \mathbb{R}^+ \Gamma$ имеем

$$\text{Supp}(C) \subseteq \text{Supp}(S_1 \cdot S_2),$$

поскольку $S_1 \cdot \Gamma < 0$ и $S_2 \cdot \Gamma < 0$.

Пусть Q – достаточно общая точка в $Y \setminus \text{Supp}(S_1 \cdot S_2)$, а $\mathcal{P}$ – линейная подсистема в линейной системе $\mathcal{B}$, состоящая из дивизоров, проходящих через точку Q . Тогда линейная система $\mathcal{P}$ не имеет неподвижных компонент, поскольку линейная система $\mathcal{B}$ не составлена из пучка по построению. Таким образом, все предыдущие аргументы можно применить к линейной системе $\mathcal{P}$ вместо линейной системы $\mathcal{B}$ и показать, что

для двух достаточно общих поверхностей D_1 и D_2 в линейной системе $\mathcal{P}$ цикл $D_1 \cdot D_2$ порождает экстремальный луч конуса $\overline{\text{NE}}(Y)$, содержащий кривую Γ . В частности, выполнено

$$\text{Supp}(D_1 \cdot D_2) \subseteq \text{Supp}(S_1 \cdot S_2),$$

но $Q \in \text{Supp}(D_1 \cdot D_2)$ и $Q \in Y \setminus \text{Supp}(S_1 \cdot S_2)$. Противоречие.

Итак, теорема 2.5.3 доказана при $n \neq 60$. В случае $n = 60$ доказательство аналогичное, но более техничное (детали см. в [37]). Отметим, что без условия того, что $\mathcal{M}$ не составлена из пучка, получить противоречие в доказательстве теоремы 2.5.3 нельзя, поскольку гиперповерхность X можно бирационально перестроить в расслоение на поверхности типа $K3$ согласно работе [37].

ГИПОТЕЗА 2.5.13. Пусть $n \notin \{1, 2, 3, 7, 9, 11, 19, 20, 26, 30, 36, 44, 49, 51, 60, 64, 75, 84, 87, 93\}$, а $\rho: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – рациональное отображение такое, что нормализация его общего слоя есть неприводимая эллиптическая кривая. Тогда $\rho = \phi \circ \psi$ для проекции $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}(1, a_1, a_2)$ и некоторого бирационального отображения $\phi: \mathbb{P}(1, a_1, a_2) \dashrightarrow \mathbb{P}^2$.

Утверждение гипотезы 2.5.13 доказано в работе [161] для $n = 5$ и в работе [37] в случае, когда $n \in \{14, 22, 28, 34, 37, 39, 52, 53, 57, 59, 66, 70, 72, 73, 78, 81, 86, 88, 89, 90, 92, 94, 95\}$.

Для каждого возможного значения n в работе [49] были явно построены бирациональные инволюции $\tau_1, \dots, \tau_k$ многообразия X такие, что существует точная последовательность групп $1 \rightarrow \Gamma \rightarrow \text{Bir}(X) \rightarrow \text{Aut}(X) \rightarrow 1$, где Γ – группа, порожденная $\tau_1, \dots, \tau_k$. Имеет место следующий результат (см. [37]).

ТЕОРЕМА 2.5.14. Инволюции $\tau_1, \dots, \tau_k$ не связаны никакими соотношениями, если $k \neq 3$ или $n = 20$, а в случае, когда $k = 3$ и $n \neq 20$, единственное соотношение между инволюциями τ_1, τ_2, τ_3 есть $\tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3 = \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_1$.

Для числа k имеются следующие возможности:

- $k = 5$ при $n = 7$;
- $k = 3$ при $n \in \{4, 9, 17, 20, 27\}$;
- $k = 2$ при $n \in \{6, 12, 13, 15, 23, 25, 30, 31, 33, 36, 38, 40, 41, 42, 44, 58, 61, 68, 76\}$;
- $k = 1$ при $n \in \{2, 8, 16, 18, 24, 26, 32, 43, 45, 46, 47, 48, 54, 56, 60, 65, 69, 74, 79\}$;
- $k = 0$ в оставшихся бирационально сверхжестких случаях.

Часть 3. Многомерные многообразия

§ 3.1. Гиперповерхности

Пусть X – неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени $n \geq 5$. Тогда $-K_X \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_X$, группа $\text{Pic}(X)$ порождена гиперплоским сечением гиперповерхности X (см. [14]), а X – многообразие Фано степени n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.3.9. Скажем, что X является k -регулярной, если выполнено следующее: для любой точки P на гиперповерхности X последовательность однородных многочленов $q_1(x_1, \dots, x_n), \dots, q_k(x_1, \dots, x_n)$ является регулярной, где

$$\begin{aligned} & x_0^{n-1}q_1(x_1, \dots, x_n) + x_0^{n-2}q_2(x_1, \dots, x_n) \\ & + \dots + x_0q_{n-1}(x_1, \dots, x_n) + q_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{aligned} \quad (*)$$

есть уравнение гиперповерхности X в $\mathbb{P}^n \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n])$, а точка P задается уравнениями $x_1 = \dots = x_n = 0$. Гиперповерхность X никогда не является n -регулярной, поскольку она содержит прямую (см. [6] и теорему 4.3 главы V в [110]). В работе [149] доказано, что общая гиперповерхность X является $(n-1)$ -регулярной.

Предположим, что гиперповерхность X является $(n-1)$ -регулярной, но не бирационально сверхжесткой. Тогда из теоремы 1.4.1 следует существование линейной системы $\mathcal{M}$ на гиперповерхности X , не имеющей неподвижных компонент, такой, что особенности подвижной лог-пары $(X, \frac{1}{r}\mathcal{M})$ не являются каноническими, где r – натуральное число такое, что выполнено соотношение $\mathcal{M} \sim -rK_X$. Более того, из предложения 1.3.12 следует, что подвижная лог-пара $(X, \frac{1}{r}\mathcal{M})$ не канонична в некоторой точке P гиперповерхности X .

Гиперповерхность X может быть задана в $\mathbb{P}^n \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n])$ уравнением $(*)$ выше таким образом, что P задается уравнениями $x_1 = \dots = x_n = 0$, а из $(n-1)$ -регулярности следует, что последовательность однородных многочленов $q_1, \dots, q_{n-1}$ является регулярной последовательностью. Пусть $\mathcal{H}_k$ – линейная система на гиперповерхности X , состоящая из дивизоров, которые высекаются всевозможными уравнениями вида

$$f_0(x_1, \dots, x_n) \sum_{i=1}^k q_i + f_1(x_1, \dots, x_n) \sum_{i=1}^{k-1} q_i + \dots + f_{k-1}(x_1, \dots, x_n) q_1 = 0$$

для $k = 1, \dots, n-1$. Тогда из регулярности последовательности $q_1, \dots, q_{n-1}$ следует выполнение неравенства $\text{codim}(\text{Bs}(\mathcal{H}_k) \subset X) \geq k-1$. Пусть S_k – общий дивизор в линейной системе $\mathcal{H}_k$, D_1 и D_2 – общие дивизоры в $\mathcal{M}$, а H – общее гиперплоское сечение гиперповерхности X , содержащее точку P . Положим $Z = S_4 \cdots S_{n-1} \cdot D_1 \cdot D_2$. Тогда выполнены рациональная эквивалентность $S_k \sim -kK_X$ и неравенство $\text{mult}_P(S_k) \geq k+1$, цикл Z является эффективным одномерным циклом. Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{n!}{3!} r^2 &= H \cdot Z \geq \text{mult}_P(Z) \geq \text{mult}_P(D_1 \cdot D_2) \text{mult}_P(S_4) \cdots \text{mult}_P(S_{n-1}) \\ &\geq \text{mult}_P(D_1 \cdot D_2) \frac{n!}{4!}, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\text{mult}_P(D_1 \cdot D_2) \leq 4r^2$, что невозможно по теореме 1.7.18.

Теперь докажем следующий результат (см. [144]).

ТЕОРЕМА 3.1.1. Пусть $n = 5$. Тогда X бирационально сверхжестко.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что неособая гиперповерхность X не является бирационально сверхжесткой. Тогда из теоремы 1.4.1 и предложения 1.3.12 следует существование линейной системы $\mathcal{M}$ на гиперповерхности X , не имеющей неподвижных компонент, такой, что лог-пара $(X, \frac{1}{r}\mathcal{M})$ не канонична в некоторой точке $P \in X$, где r – натуральное число такое, что $\mathcal{M} \sim -rK_X$. В частности, выполнено неравенство $\text{mult}_P(\mathcal{M}) > r$.

Пусть $\pi: V \rightarrow X$ – раздутие точки P , а E – π -исключительный дивизор. Тогда

$$K_V + \frac{1}{r} \widehat{\mathcal{M}} \sim_{\mathbb{Q}} \pi^* \left(K_X + \frac{1}{r} \mathcal{M} \right) + \left(3 - \frac{1}{r} \text{mult}_P(\mathcal{M}) \right) E,$$

где $\widehat{\mathcal{M}}$ – собственный прообраз $\mathcal{M}$ на V . Причем $\text{mult}_P(\mathcal{M}) > r$.

Пусть S_1 и S_2 – общие дивизоры в $\mathcal{M}$, а H_1 и H_2 – общие гиперплоские сечения гиперповерхности X , проходящие через точку P . Тогда

$$5r^2 = S_1 \cdot S_2 \cdot H_1 \cdot H_2 \geq \text{mult}_P(S_1 \cdot S_2) \geq \text{mult}_P^2(\mathcal{M}),$$

откуда следует, что $\text{mult}_P(\mathcal{M}) \leq \sqrt{5}r < 3r$.

Из теоремы 1.7.19 следует существование прямой $L \subset E \cong \mathbb{P}^3$ такой, что

$$\text{mult}_P(S_1 \cdot S_2 \cdot H) > 8r^2,$$

где H – гиперплоское сечение гиперповерхности X такое, что

- дивизор H содержит точку P и неособ в ней;
- прямая L содержится в дивизоре $\pi^{-1}(H)$;
- дивизор H не содержит поверхностей в $\text{Bs}(\mathcal{M})$.

Рассмотрим линейную систему $\mathcal{D}$, состоящую из таких гиперплоских сечений H гиперповерхности X , что $L \subset \pi^{-1}(H)$. Базисное множество линейной системы $\mathcal{D}$ состоит из пересечения квинтики X с плоскостью $\Pi \subset \mathbb{P}^5$, которая соответствует прямой $L \subset E$, в частности, если плоскость Π не содержится в X , то перечисленные выше условия совместны и

$$5r^2 = S_1 \cdot S_2 \cdot H \cdot H_1 \geq \text{mult}_P(S_1 \cdot S_2 \cdot H) > 8r^2,$$

что невозможно. Значит, квинтика X содержит плоскость Π . Из тех же соображений следует, что Π содержится в базисном множестве линейной системы $\mathcal{M}$. Заметим, что общая квинтика в $\mathbb{P}^5$ не содержит плоскостей (см. [118]). Можно показать (см. [21]), что гиперповерхность X бирациональна расслоению на поверхности типа $K3$ в том и только том случае, когда гиперповерхность X содержит плоскость (см. теорему 3.2.4), причем в последнем случае соответствующее расслоение на поверхности типа $K3$ индуцировано проекцией из плоскости, которая содержится в X .

Пусть Y – достаточно общее гиперплоское сечение гиперповерхности X , проходящее через точку P , такое, что $L \subset \pi^{-1}(Y)$. Тогда Y – гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$ степени 5, причем, по построению, многообразие Y неособо в точке P . Более того, из предложения 1.3.12 следует, что многообразие Y имеет изолированные особенности, что также следует из конечности отображения Гаусса для неособых гиперповерхностей (см. [82]).

Пусть $\bar{\pi}: \widehat{Y} \rightarrow Y$ – раздутие точки P и $\bar{E} = \bar{\pi}^{-1}(P)$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widehat{Y} & \xrightarrow{\quad} & V \\ \bar{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

коммутативна, а $\widehat{Y}$ можно отождествлять с дивизором $\pi^{-1}(Y) \subset V$ и $\bar{E} = E \cap \widehat{Y}$.

Положим $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}|_Y$. Заметим, что линейная система $\overline{\mathcal{M}}$ имеет неподвижные компоненты, поскольку плоскость Π содержится в базисном множестве линейной системы $\mathcal{M}$. Действительно, по построению $\Pi \subset Y$ и плоскость Π является базисной компонентой линейной системы $\overline{\mathcal{M}}$, причем единственной. Таким образом, $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{B} + \alpha\Pi$, где $\mathcal{B}$ – линейная система на трехмерном многообразии Y , не имеющая неподвижных

компонент, а α – кратность общего дивизора из линейной системы $\mathcal{M}$ в общей точке плоскости Π .

Пусть $\widehat{\mathcal{B}} = \widehat{\pi}^{-1}(\mathcal{B})$ и $\widehat{\Pi} = \widehat{\pi}^{-1}(\Pi)$. Тогда $L \subset \widehat{\Pi}$ и

$$K_{\widehat{Y}} + \frac{1}{r}\widehat{\mathcal{B}} + \frac{\alpha}{r}\widehat{\Pi} \sim_{\mathbb{Q}} \widehat{\pi}^* \left(K_Y + \frac{1}{r}\mathcal{B} + \frac{\alpha}{r}\Pi \right) + \left(2 - \frac{1}{r} \text{mult}_P(\mathcal{B}) - \frac{\alpha}{r} \right) \overline{E}.$$

Из доказательства теоремы 1.7.19 следует, что множество

$$\text{LCS} \left(\widehat{Y}, \frac{1}{r}\widehat{\mathcal{B}} + \frac{\alpha}{r}\widehat{\Pi} + \left(\frac{1}{r} \text{mult}_P(\mathcal{B}) - \frac{\alpha}{r} - 2 \right) \overline{E} \right)$$

содержит прямую $L \subset \overline{E} \subset E$. Таким образом, мы можем применить теорему 1.7.17 к лог-паре $(\widehat{Y}, \frac{1}{r}\widehat{\mathcal{B}} + \frac{\alpha}{r}\widehat{\Pi} + (\frac{1}{r} \text{mult}_P(\mathcal{B}) - \frac{\alpha}{r} - 2)\overline{E})$ в общей точке кривой L , откуда сразу следует строгое неравенство

$$\text{mult}_L(\mathcal{B}^2) > 4(3r - \text{mult}_P(\mathcal{B}) - \alpha)(r - \alpha),$$

откуда, в свою очередь, немедленно следуют неравенство

$$\text{mult}_P(\mathcal{B}^2) \geq \text{mult}_P^2(\mathcal{B}) + \text{mult}_L(\mathcal{B}^2) > \text{mult}_P^2(\mathcal{B}) + 4(3r - \text{mult}_P(\mathcal{B}) - \alpha)(r - \alpha)$$

и неравенство $\text{mult}_P(\mathcal{B}^2) > (\text{mult}_P(\mathcal{B}) - r + \alpha)^2 + 8(r - \alpha)$.

Теперь ограничим $\text{mult}_P(\mathcal{B}^2)$ сверху. Пусть Z – достаточно общее гиперплоское сечение квинтики Y , содержащее точку P . Тогда Z – неособая квинтика в $\mathbb{P}^3$ и, в частности, выполнено неравенство $(\mathcal{B}|_Z)^2 \geq \text{mult}_P(\mathcal{B}^2)$, но $(\mathcal{B}|_Z)^2 = 5r^2 - 2r\alpha - 3\alpha^2$. Итак, мы имеем

$$5r^2 - 2r\alpha - 3\alpha^2 > (\text{mult}_P(\mathcal{B}) - r + \alpha)^2 + 8(r - \alpha),$$

что, как легко видеть, есть противоречие.

Если в доказательстве теоремы 3.1.1 опустить последнюю часть доказательства, то мы получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.1.2. Пусть $n \in \{6, 7, 8\}$. Тогда X бирационально сверхжестко.

Техника гиперкасательных линейных систем и $8n^2$ -неравенство были успешно использованы для доказательства бирациональной сверхжесткости широкого класса многомерных многообразий Фано (см. [151], [153], [155], [157], [156], [27], [34], [158]). Тем не менее, ни один из этих подходов не применим к доказательству бирациональной сверхжесткости произвольной неособой гиперповерхности X . В работе [154] был найден новый подход к решению последней задачи, который основывается на следующем результате (см. [154], [63]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.3. Пусть V – неособое многообразие, $\mathcal{M}$ – линейная система без неподвижных компонент на нем, D_1 и D_2 – общие дивизоры в $\mathcal{M}$, $Z = D_1 \cdot D_2$, а P – точка многообразия V , принадлежащая множеству $\text{LCS}(V, \frac{1}{r}\mathcal{M})$ для некоторого натурального числа r . Предположим, что существует морфизм $\xi: V \rightarrow U$ такой, что выполнено равенство $\dim(U) = \dim(V) - 1$, морфизм ξ гладкий в окрестности точки P и конечный на каждой неприводимой компоненте цикла Z . Тогда $\xi(P) \in \text{LCS}(U, \frac{1}{4r^2}\xi(Z))$.

Из предложения 3.1.3 вытекает следующий результат (см. [154], [63]).

ТЕОРЕМА 3.1.4. Пусть $n \leq 12$. Тогда X бирационально сверхжестко.

Отметим, что из работы [109] следует нерациональность гиперповерхности X при условии, что она является очень общей и, в частности, неособой, в смысле дополнения к счетному числу замкнутых по Зарискому множеств.

§ 3.2. Полные пересечения

Пусть $X = \bigcap_{i=1}^k F_i \subset \mathbb{P}^r$ – неособое полное пересечение такое, что F_i – гиперповерхность степени d_i , где $d_k \geq \dots \geq d_1 \geq 2$ и $\dim(X) = r - k \geq 4$. Тогда группа $\text{Pic}(X)$ порождена гиперплоским сечением многообразия X по теореме Лефшеца и выполнена эквивалентность

$$-K_X \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \left(\sum_{i=1}^k d_i - r - 1 \right) \Big|_X,$$

откуда следует, что выполнено следующее:

- многообразие X не является рационально связным при $\sum_{i=1}^k d_i > r$;
- многообразие X является многообразием Фано при $\sum_{i=1}^k d_i \leq r$;
- многообразие X не является бирационально жестким при $\sum_{i=1}^k d_i < r$.

ГИПОТЕЗА 3.2.1. Пусть $\sum_{i=1}^k d_i = r$. Тогда X – бирационально сверхжестко.

В работе [38] показано, что X нерационально в случае, когда $\sum_{i=1}^k d_i = n$, выполнено неравенство $d_k \geq 4$, существует такой индекс j , что $d_j \neq 5$, и X является очень общим, в смысле дополнения к счетному числу замкнутых по Зарискому множеств. Следующий результат получен в [153] с помощью техники гиперкасательных линейных систем (см. доказательство теоремы 0.3.9).

ТЕОРЕМА 3.2.2. Пусть X достаточно общее. Тогда многообразие X бирационально сверхжестко при выполнении неравенства $\sum_{i=1}^k d_i = r > 3k$.

С другой стороны, из теоремы 1.7.19 следует следующий результат (см. [27]).

ТЕОРЕМА 3.2.3. Предположим, что $r = 6$, $k = 2$, $d_1 = 2$, $d_2 = 4$, а многообразие X не содержит двумерных линейных подпространств в $\mathbb{P}^6$. Тогда X бирационально сверхжестко.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что X не является бирационально сверхжестким и не содержит двумерных линейных подпространств в $\mathbb{P}^6$. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию. Из теоремы 1.4.1 следует существование линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X , не имеющей неподвижных компонент, такой, что особенности подвижной лог-пары $(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$ не являются каноническими для натурального числа n такого, что выполнена рациональная эквивалентность $\mathcal{M} \sim -nK_X$. В частности, множество $\text{CS}(X, \mu\mathcal{M})$ непусто для некоторого положительного рационального числа $\mu < \frac{1}{n}$.

Пусть $C \subset X$ – неприводимое подмногообразие, являющееся центром канонических особенностей лог-пары $(X, \mu\mathcal{M})$. Тогда $\text{mult}_C(\mathcal{M}) > n$ (см. замечание 1.3.9) и, в частности, из предложения 1.3.12 следует, что $\dim(C) \leq 1$. С другой стороны, из теоремы 1.7.19 следует, что C – кривая. Из теоремы 1.7.18 следует, что $\text{mult}_C(S_1 \cdot S_2) > 4n^2$ для достаточно общих дивизоров S_1 и S_2 в линейной системе $\mathcal{M}$.

Допустим, что C не является прямой. Для двух достаточно общих точек кривой C рассмотрим прямую L в $\mathbb{P}^6$, проходящую через них. Тогда $L \not\subset X$, поскольку в противном случае из выполнения неравенства $\text{mult}_C(\mathcal{M}) > n$ следовало бы, что $L \subset \text{Bs}(\mathcal{M})$, что невозможно, поскольку прямая L замечает либо плоскость в $\mathbb{P}^6$ в случае, когда кривая C плоская, либо многообразие размерности 3, но линейная система $\mathcal{M}$ не имеет неподвижных компонент, а многообразие X не содержит двумерных линейных подпространств в $\mathbb{P}^6$. Имеем

$$8n^2 = H_1 \cdot H_2 \cdot S_1 \cdot S_2 \geq 2 \text{mult}_C(\mathcal{M}^2) > 8n^2,$$

где H_1 и H_2 – достаточно общие гиперплоские сечения многообразия X , проходящие через пересечение $L \cap X$, а S_1 и S_2 – общие дивизоры в $\mathcal{M}$. Противоречие. Итак, показано, что кривая C является прямой в $\mathbb{P}^6$.

Пусть S – пересечение двух общих гиперплоских сечений многообразия $X \subset \mathbb{P}^6$, проходящих через прямую C . Тогда S – гладкая поверхность, дивизор K_S рационально эквивалентен гиперплоскому сечению поверхности S и $K_S^2 = 8$. Имеет место соотношение

$$\mathcal{M}|_S = \mathcal{B} + \text{mult}_C(\mathcal{M})C,$$

где $\mathcal{B}$ – линейная система на S без неподвижных компонент. Выполнено неравенство

$$(nK_S - \text{mult}_C(\mathcal{M})C)^2 = 8n^2 - 2n \text{mult}_C(\mathcal{M}) - 3 \text{mult}_C^2(\mathcal{M}) = \mathcal{B}^2 \geq 0,$$

поскольку $K_S \cdot C = 1$, но $C^2 = -3$, откуда $\text{mult}_C(\mathcal{M}) \leq \frac{4}{3}n$. Пусть $f: V \rightarrow X$ – раздутие прямой C , $E = f^{-1}(C)$, $\widehat{\mathcal{M}} = f^{-1}(\mathcal{M})$, H – достаточно общее гиперплоское сечение многообразия X , проходящее через прямую C , $B_X = \frac{1}{n}\mathcal{M} + H$ и $\widehat{H} = f^{-1}(H)$. Тогда

$$K_V + \frac{1}{n}\widehat{\mathcal{M}} + \widehat{H} \sim_{\mathbb{Q}} f^* \left(K_X + \frac{1}{n}\mathcal{M} + H \right) + \left(1 - \frac{1}{n} \text{mult}_C(\mathcal{M}) \right) E$$

и $C \in \text{LCS}(X, B_X)$. Пусть D – общее гиперплоское сечение X , проходящее через некоторую точку $P \in C$. Тогда $P \in \text{LCS}(D, B_X|_D)$ и $P \in \text{CS}(D, \frac{1}{n}\mathcal{M}|_D)$. Теперь из непосредственного применения предложения 1.7.25 следует, что множество

$$\text{LCS} \left(V, \frac{1}{n}\widehat{\mathcal{M}} + \widehat{H} + \left(\frac{1}{n} \text{mult}_C(\mathcal{M}) - 1 \right) E \right)$$

содержит такую поверхность $S \subset E$, что слой морфизма $f|_S: S \rightarrow C$ над каждой точкой прямой C является прямой в слое морфизма f над ней, который изоморфен $\mathbb{P}^2$, поскольку выполнено неравенство $\text{mult}_C(\mathcal{M}) \leq \frac{4}{3}n$. Теперь мы можем применить теорему 1.7.17 к лог-паре $(V, \frac{1}{n}\widehat{\mathcal{M}} + \widehat{H} + (\frac{1}{n} \text{mult}_C(\mathcal{M}) - 1)E)$ в общей точке поверхности S и получить неравенство

$$\text{mult}_S(\widehat{\mathcal{M}}^2) > 4(2n^2 - n \text{mult}_C(\mathcal{M})) \geq \frac{8}{3}n^2,$$

поскольку $\text{mult}_C(\mathcal{M}) \leq \frac{4}{3}n$. С другой стороны, $\widehat{H}^4 = 3$, дивизор $\widehat{H}$ является общим дивизором в свободной линейной системе $|\widehat{H}|$, которая индуцирует морфизм $\phi|_{\widehat{H}}: V \rightarrow \mathbb{P}^4$, имеющий степень 3 в общей точке многообразия V , который не стягивает никакую поверхность в точку, поскольку X не содержит плоскостей. Пусть $\overline{H}$ – еще один общий дивизор в линейной системе $|\widehat{H}|$. Несложные вычисления показывают, что дивизор $\overline{H}$ пересекает кривую $\widehat{H} \cap S$ по крайней мере в двух различных точках, откуда следует

$$\frac{16}{3}n^2 < \overline{H} \cdot \widehat{H} \cdot \widehat{\mathcal{M}}^2 = (f^*(H) - E)^2 \cdot (f^*(nH) - \text{mult}_C(\mathcal{M})E)^2 < 3n^2,$$

поскольку $\text{mult}_C(\mathcal{M}) > n$. Противоречие.

Общее полное пересечение квадрики и кватрики в $\mathbb{P}^6$ не содержит плоскостей (см. [118]), а в случае, когда полное пересечение квадрики и кватрики в $\mathbb{P}^6$ содержит двумерное линейное подпространство, его бирациональная геометрия имеет несколько более сложную структуру, чем в общем случае, поскольку общий слой проекции из этого линейного подпространства есть неособая эллиптическая кривая, а в [27] доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.2.4. Пусть $r = 6$, $k = 2$, $d_1 = 2$, $d_2 = 4$. Тогда X бирационально эквивалентно эллиптическому расслоению в том и только том случае, когда X содержит двумерное линейное подпространство.

Было бы интересно построить пример неособой деформации бирационально сверхжесткого неособого многообразия Фано в многообразии Фано, не являющееся бирационально сверхжестким. Скорее всего, для гиперповерхностей этого сделать не удастся, однако, несмотря на имеющуюся в наличии гипотезу 3.2.1, может оказаться, что существует неособое полное пересечение X такое, что $\sum_{i=1}^k d_i = r$ и $r - k > 4$, но X не является бирационально жестким, с другой стороны, из теоремы 3.2.2 следует, что при $\sum_{i=1}^k d_i = r$ достаточно общее полное пересечение X , скорее всего, бирационально сверхжестко. В качестве пробного шага можно попытаться показать бирациональную сверхжесткость достаточно общего полного пересечения четырех квадрик в $\mathbb{P}^8$ или достаточно общего полного пересечения двух квадрик и кубики в $\mathbb{P}^7$, поскольку существуют не бирационально сверхжесткие неособые полные пересечения в соответствующих семействах.

§ 3.3. Двойные пространства

Пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^n$ – двойное накрытие с ветвлением в неприводимой приведенной гиперповерхности $F \subset \mathbb{P}^n$ степени $2n$, которая имеет только изолированные обыкновенные особые точки¹³, кратность каждой из которых не превышает $2(n-2)$, и $n \geq 4$. Тогда

$$-K_X \sim \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})(1),$$

а группа $\text{Cl}(X)$ порождена дивизором K_X . В частности, многообразие X является многообразием Фано с терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями. Из работы [178] следует, что количество особых точек многообразия X не превышает количества точек $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ таких, что $(n-1)^2 < \sum_{i=1}^n a_i \leq n^2$, где $a_i \in (0, 2n)$, откуда следует, в частности, что количество особых точек X не превышает 1190 и 27237, когда n равно 4 и 5 соответственно. В данном параграфе будет доказан следующий результат (см. [148], [32]).

ТЕОРЕМА 3.3.1. Многообразие X бирационально сверхжестко.

ПРИМЕР 3.3.2. Пусть $n = 2k$ для $k \in \mathbb{N}$, а F – общая гиперповерхность степени $4k$, содержащая линейное подпространство размерности k . Тогда F нодальна и имеет $(4k-1)^k$ особых точек, а X бирационально сверхжестко при $k \geq 2$ по теореме 3.3.1.

ПРИМЕР 3.3.3. Пусть $n = 2k+1$ для $k \in \mathbb{N}$, а F – достаточно общая гиперповерхность степени $4k+2$, заданная уравнением

$$g^2(x_0, \dots, x_{2k+2}) = \sum_{i=1}^k a_i(x_0, \dots, x_{2k+2})b_i(x_0, \dots, x_{2k+2}) \subset \mathbb{P}^n \\ \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{2k+2}]),$$

¹³Изолированная особая точка O многообразия V называется обыкновенной, если O – гиперповерхностная особая точка, а проективизация касательного конуса к многообразию V в точке O неособа.

где g , a_i и b_i – однородные многочлены степени $2k + 1$. Тогда гиперповерхность F nodal и имеет $(2k + 1)^{2k+1}$ особых точек, а X бирационально сверхжестко при $k \geq 2$ по теореме 3.3.1.

Теперь докажем теорему 3.3.1. Предположим, что многообразие X не является бирационально сверхжестким. Покажем, что сделанное предположение в конечном счете приводит к противоречию. На многообразии X существует подвижная лог-пара (X, M_X) с эффективной границей M_X такая, что $\mathbb{CS}(X, M_X) \neq \emptyset$ и $M_X \sim_{\mathbb{Q}} -rK_X$ для некоторого рационального числа $r < 1$ (см. теорему 1.4.1). Пусть $Z \subset X$ – элемент множества $\mathbb{CS}(X, M_X)$.

ЛЕММА 3.3.4. *Многообразие Z не является неособой точкой на X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что Z – неособая точка на X . Тогда

$$\text{mult}_Z(M_X^2) > 4$$

по теореме 1.7.18. Пусть $H_1, \dots, H_{n-2}$ – достаточно общие дивизоры в полной линейной системе $|\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))|$, проходящие через точку Z . Тогда

$$2 > M_X^2 \cdot H_1 \cdots H_{n-2} \geq \text{mult}_Z(M_X^2) \text{mult}_Z(H_1) \cdots \text{mult}_Z(H_{n-2}) > 4$$

что есть противоречие.

Следующий логический шаг – доказательство того, что Z не может быть особой точкой на многообразии X . Для этого нам потребуются два очень специальных результата о глобальных лог-канонических порогах, которым уместнее всего быть в §1.7, поскольку они являются применениями теоремы 1.7.6, но ввиду их узкой направленности мы приведем их здесь, опустив при этом их доказательства (см. [32]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.5. *Пусть $\tau: V \rightarrow \mathbb{P}^k$ – двойное накрытие с ветвлением в неособой гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^k$ степени $2d$ такой, что $2 \leq d \leq k - 1$, а B_V – эффективная граница на многообразии V такая, что $B_V \sim_{\mathbb{Q}} \tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^k}(\lambda))$ для некоторого положительного рационального числа $\lambda < 1$. Тогда $\mathbb{LCS}(V, B_V) = \emptyset$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.6. *Пусть $B_{\mathbb{P}^n}$ – эффективная граница на $\mathbb{P}^n$, которая $\mathbb{Q}$ -рационально эквивалентна λH для рационального $\lambda < 1$ и гиперплоскости $H \subset \mathbb{P}^n$, а S – неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени d такая, что $2(n - 1) \geq d \geq 2$. Тогда $\mathbb{LCS}(\mathbb{P}^n, B_{\mathbb{P}^n} + \frac{1}{2}S) = \emptyset$.*

Теперь все готово для доказательства следующего результата.

ЛЕММА 3.3.7. *Подмногообразие Z не является особой точкой многообразия X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $Z \in \text{Sing}(X)$. Тогда $O = \pi(Z)$ является особой точкой гиперповерхности $F \subset \mathbb{P}^n$. Возможны два случая – когда кратность $\text{mult}_O(F)$ четна и нечетна, каждый из которых будет разобран по отдельности, причем в первом случае доказательство будет опираться на предложение 3.3.5, а во втором на предложение 3.3.6.

Заметим, что многообразие X является гиперповерхностью

$$y^2 = f_{2n}(x_0, \dots, x_n) \subset \mathbb{P}(1^{n+1}, n) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n, y]),$$

где f_{2n} – однородный многочлен степени $2n$.

Пусть $\text{mult}_O(F) = 2m \geq 2$ для $m \in \mathbb{N}$. Тогда $m \leq n - 2$ и существует взвешенное раздутие

$$\beta: U \rightarrow \mathbb{P}(1^{n+1}, n)$$

точки Z с весами $(m, 1^n)$ такое, что собственный прообраз $V \subset U$ многообразия X неособ в окрестности β -исключительного дивизора E . Бирациональный морфизм β индуцирует бирациональный морфизм $\alpha: V \rightarrow X$ с исключительным дивизором $G \subset V$.

Заметим, что $E|_V = G$, а G – неособая гиперповерхность в $E \cong \mathbb{P}(1^n, m)$, которая может быть задана уравнением

$$z^2 = g_{2m}(t_1, \dots, t_n) \subset \mathbb{P}(1^n, m) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n, z])$$

где g_{2m} – однородный многочлен степени $2m$.

Пусть $\text{mult}_Z(M_X)$ – такое положительное рациональное число, что

$$M_V \sim_{\mathbb{Q}} \alpha^*(M_X) - \text{mult}_Z(M_X)G,$$

где $M_V = \alpha^{-1}(M_X)$. Тогда

$$K_V + M_V \sim_{\mathbb{Q}} \alpha^*(K_X + M_X) + (n - 1 - m - \text{mult}_Z(M_X))G,$$

но линейная система $|\alpha^*(-K_X) - G|$ свободна и задает морфизм ψ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}^{n-1} \\ \alpha \downarrow & & \nearrow \chi \\ X & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

коммутативна, где χ – проекция из точки O . Пусть C – общий слой расслоения ψ . Тогда

$$0 \leq M_V \cdot C = 2(1 - \text{mult}_Z(M_X)) + \alpha^*(K_X + M_X) \cdot C < 2(1 - \text{mult}_Z(M_X)),$$

потому что дивизор $-(K_X + M_X)$ обилён, откуда $\text{mult}_Z(M_X) < 1$.

В случае $m = 1$ неравенство $\text{mult}_Z(M_X) < 1$ противоречит теореме 1.7.20. Значит, выполнено неравенство $m > 1$, но из неравенства $n - 1 - m > \text{mult}_Z(M_X)$ следует существование собственного подмногообразия $\Delta \subset G$, являющегося центром канонических особенностей лог-пары (V, M_V) , откуда следует, что множество $\text{LCS}(G, M_V|_G)$ непусто по теореме 1.7.14, что противоречит предложению 3.3.5.

Таким образом, $\text{mult}_O(F) = 2k + 1 \geq 3$ для $k \in \mathbb{N}$ такого, что $k \leq n - 3$.

Пусть $\alpha: W \rightarrow \mathbb{P}^n$ – раздутие точки O , Λ – исключительный дивизор бирационального морфизма α , а $\tilde{F} \subset W$ – собственный прообраз гиперповерхности F . Тогда $\tilde{F}$ неособа в окрестности Λ . Пусть $S = \tilde{F} \cap \Lambda$. Тогда многообразие S является неособой гиперповерхностью в $\Lambda \cong \mathbb{P}^{n-1}$ степени $2k + 1$.

Пусть $\tilde{\pi}: \tilde{X} \rightarrow W$ – двойное накрытие, разветвленное в дивизоре

$$\tilde{F} \cup \Lambda \sim 2(\alpha^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n)) - k\Lambda),$$

который неособ вне S , и пусть $\tilde{S} = \tilde{\pi}^{-1}(S)$. Тогда многообразие W неособо вне подмногообразия $\tilde{S} \subset W$, а особенности W вдоль $\tilde{S}$ локально изоморфны $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{C}^{n-2}$,

т.е. многообразие W имеет обыкновенную двойную особенность вдоль подмногообразия $\tilde{S}$.

Пусть $\Xi = \tilde{\pi}^{-1}(\Lambda)$. Тогда $\Xi \cong \mathbb{P}^{n-1}$ и существует бирациональный морфизм $\xi: \tilde{X} \rightarrow X$, стягивающий дивизор Ξ в точку Z , так что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & W \\ \xi \downarrow & & \searrow \alpha \\ X & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

коммутативна. Легко видеть, что ξ является ограничением на X взвешенного раздутия взвешенного проективного пространства $\mathbb{P}(1^{n+1}, n)$ в неособой точке Z с весами $(2k+1, 2^n)$.

Пусть $\text{mult}_Z(M_X)$ – положительное рациональное число такое, что

$$M_{\tilde{X}} \sim_{\mathbb{Q}} \xi^*(M_X) - \text{mult}_Z(M_X)\Xi,$$

где $M_{\tilde{X}} = \xi^{-1}(M_X)$. Тогда

$$K_{\tilde{X}} + M_{\tilde{X}} \sim_{\mathbb{Q}} \xi^*(K_X + M_X) + (2(n-1-k) - \text{mult}_Z(M_X))\Xi,$$

но линейная система $|\xi^*(-K_X) - 2\Xi|$ свободна и задает морфизм ω такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\omega} & \mathbb{P}^{n-1} \\ \xi \downarrow & & \searrow \chi \\ X & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

коммутативна, где χ – проекция из точки O .

Пересекая границу $M_{\tilde{X}}$ с достаточно общим слоем расслоения ω , мы сразу получаем неравенство $\text{mult}_Z(M_X) < 2$, откуда следует, что $2(n-1-k) > \text{mult}_Z(M_X)$ и, значит, существует центр канонических особенностей

$$\nabla \in \mathbb{CS}(\tilde{X}, M_{\tilde{X}} - (2(n-1-k) - \text{mult}_Z(M_X))\Xi)$$

такой, что $\nabla \subset G$. Таким образом,

$$\nabla \in \mathbb{LCS}(\tilde{X}, M_{\tilde{X}} - (2(n-1-k) - \text{mult}_Z(M_X))\Xi + 2\Xi),$$

поскольку 2Ξ – дивизор Картье, однако

$$\mathbb{LCS}(\tilde{X}, M_{\tilde{X}} - (2(n-2-k) - \text{mult}_Z(M_X))\Xi) \subset \mathbb{LCS}(\tilde{X}, M_{\tilde{X}} + \Xi),$$

так как $2k+1 \leq 2(n-2)$, откуда следует, что

$$\mathbb{LCS}(\Xi, \text{Diff}_{\Xi}(M_{\tilde{X}})) = \mathbb{LCS}(\Xi, M_{\tilde{X}}|_{\Xi} + \text{Diff}_{\Xi}(0)) \neq \emptyset$$

по теореме 7.5 в [111]. В данном случае $\text{Diff}_{\Xi}(0) = \frac{1}{2}\tilde{S}$ (см. [113]) и

$$M_{\tilde{X}}|_{\Xi} \sim_{\mathbb{Q}} -\text{mult}_Z(M_X)\Xi|_{\Xi} \sim_{\mathbb{Q}} \frac{\text{mult}_Z(M_X)}{2}H,$$

где H – гиперплоское сечение гиперповерхности $\Xi \cong \mathbb{P}^{n-1}$. Таким образом, мы показали, что множество $\text{LCS}(\Xi, M_{\tilde{X}}|_{\Xi} + \frac{1}{2}\tilde{S})$ непусто, что противоречит предложению 3.3.6.

Итак, доказано, что $\dim(Z) > 0$. Более того, из доказательства леммы 3.3.4 сразу следует, что $\text{codim}(Z \subset X) = 2$. Пусть $H_1, \dots, H_{n-2}$ – общие дивизоры в $|\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))|$. Тогда

$$2 > M_X^2 \cdot H_1 \cdots H_{n-2} \geq \text{mult}_Z^2(M_X) Z \cdot H_1 \cdots H_{n-2} \geq Z \cdot H_1 \cdots H_{n-2},$$

откуда следует, что $\pi(Z)$ – линейное подпространство в $\mathbb{P}^n$ размерности $n-2$, а индуцированное отображение $\pi|_Z: Z \rightarrow \pi(Z)$ является изоморфизмом.

Пусть $V = \bigcap_{i=1}^{n-3} H_i$, $C = Z \cap V$, $M_V = M_X|_V$, $\tau = \pi|_V$, $S = F \cap \pi(V)$. Тогда

- многообразие V неособое и трехмерно;
- кривая $C \subset V$ неприводима;
- граница M_V эффeктивна и подвижна;
- поверхность $S \subset \mathbb{P}^3$ неособа и имеет степень $2n$;
- отображение $\tau: V \rightarrow \mathbb{P}^3$ является двойным накрытием;
- отображение τ разветвлено над поверхностью S ;
- кривая $\tau(C)$ является прямой в $\mathbb{P}^3$;
- отображение $\tau|_C$ является изоморфизмом;
- дивизор $\tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) - M_V$ обилеи;
- выполнено равенство $\text{mult}_C(M_V) = \text{mult}_Z(M_X)$.

Предположим, что $\tau(C) \not\subset S$. Тогда существует неприводимая кривая $\tilde{C} \subset V$, отличная от кривой C такая, что $\tau(C) = \tau(\tilde{C})$. Возьмем общий дивизор $D \in |\tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))|$, проходящий через кривую C . Тогда D – неособая поверхность, а C и $\tilde{C}$ – неособые рациональные кривые на ней. Имеем $C^2 = \tilde{C}^2 = 1 - n < 0$ на поверхности D . Пусть $M_D = M_V|_D$. Тогда

$$M_D = \text{mult}_C(M_V)C + \text{mult}_{\tilde{C}}(M_V)\tilde{C} + \Delta,$$

где Δ – подвижная граница на поверхности D . С другой стороны, выполнена эквивалентность $M_V \sim_{\mathbb{Q}} rD$ для рационального числа $r < 1$. Значит, выполнена эквивалентность

$$(r - \text{mult}_{\tilde{C}}(M_V))\tilde{C} \sim_{\mathbb{Q}} (\text{mult}_C(M_V) - r)C + \Delta,$$

откуда $\text{mult}_{\tilde{C}}(M_V) \geq r$, поскольку $\tilde{C}^2 < 0$. Пусть теперь H – достаточно общий дивизор в линейной системе $|\tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))|$. Тогда

$$2r^2 = M_V^2 \cdot H \geq \text{mult}_C^2(M_V) + \text{mult}_{\tilde{C}}^2(M_V) \geq 1 + r^2,$$

что невозможно ввиду неравенства $r < 1$. Итак, доказано, что $\tau(C) \subset S$.

Пусть O – достаточно общая точка на прямой $\tau(C)$, а T – гиперплоскость в $\mathbb{P}^3$, касающаяся поверхности S в точке O . Возьмем достаточно общую прямую $L \subset T$, проходящую через точку O , и положим $\hat{L} = \tau^{-1}(L)$. По построению кривая $\hat{L}$ неприводима и имеет особенность в точке $\hat{O} = \tau^{-1}(O)$, откуда следует, что $\hat{L} \subset \text{Supp}(M_V)$, поскольку в противном случае были бы выполнены несовместные неравенства

$$2 > \hat{L} \cdot M_V \geq \text{mult}_{\hat{O}}(\hat{L}) \text{mult}_C(M_V) \geq 2,$$

но, с другой стороны, кривая $\hat{L}$ замечает дивизор на V при варьировании прямой L в гиперплоскости T , что противоречит $\hat{L} \subset \text{Supp}(M_V)$ и подвижности границы M_V . Полученное противоречие доказывает теорему 3.3.1.

§ 3.4. Тройные пространства

Пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^{2n}$ – циклическое тройное накрытие (см. [131]) с ветвлением в неприводимой и приведенной гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^{2n}$ степени $3n$ такое, что $n \geq 2$ и S имеет изолированные обыкновенные двойные точки. Тогда X – многообразие Фано с терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями, а группы $\text{Pic}(X)$ и $\text{Cl}(X)$ порождены антиканоническим дивизором $-K_X \sim \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n}}(1))$. Верно следующее утверждение (см. [29]).

ТЕОРЕМА 3.4.1. *Многообразие X бирационально сверхжестко.*

Пусть $\xi: V \rightarrow \mathbb{P}^k$ – циклическое тройное накрытие с ветвлением в гиперповерхности степени $3n$, чьи возможные особенности состоят только из обыкновенных двойных или тройных точек, а также потребуем выполнения неравенства $k \geq 3$. Тогда многообразие V не является бирационально жестким при $k < 2n$, поскольку оно обладает пучками многообразий размерности Кодаиры $-\infty$. С другой стороны, в случае выполнения неравенства $k > 2n$ многообразие V имеет неотрицательную размерность Кодаиры. В частности, теорема 3.4.1 описывает все бирационально сверхжесткие неособые циклические тройные пространства.

ПРИМЕР 3.4.2. Пусть X – гиперповерхность в $\mathbb{P}(1^{2n+1}, n)$ степени $3n$

$$y^3 = \sum_{i=0}^{2n} x_i^{3n} \subset \mathbb{P}(1^{2n+1}, n) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{2n}, y]),$$

и $n \geq 2$. Тогда проекция $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^{2n} \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_{2n}])$ является циклическим тройным накрытием, разветвленным в гладкой гиперповерхности $\sum_{i=0}^{2n} x_i^{3n} = 0$, а X бирационально сверхжестко по теореме 3.4.1 и

$$\text{Bir}(X) = \text{Aut}(X) \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \text{Aut}\left(\sum_{i=0}^{2n} x_i^{3n} = 0\right) \cong \mathbb{Z}_3 \oplus (\mathbb{Z}_{3n}^{2n} \rtimes S_{2n+1}),$$

где S_{2n+1} – симметрическая группа (см. [165], [117]).

Докажем теорему 3.4.1. Предположим, что X не является бирационально сверхжестким, и покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию. Существует подвижная лог-пара (X, M_X) такая, что граница M_X эффективна, множество $\text{CS}(X, M_X)$ непусто, а дивизор $-(K_X + M_X)$ обилен (см. теорему 1.4.1). В частности, $M_X \sim_{\mathbb{Q}} -rK_X$ для рационального $1 > r \gg 0$. Пусть Z – элемент множества $\text{CS}(X, M_X)$ наибольшей размерности.

ЛЕММА 3.4.3. *Многообразие Z не является гладкой точкой на X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Z – гладкая точка многообразия X . Тогда $\text{mult}_Z(M_X^2) > 4$ по теореме 1.7.18. Рассмотрим общие дивизоры $H_1, \dots, H_{2n-2}$ в $|\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n}}(1))|$, которые содержат неособую точку Z . Тогда $3 > M_X^2 \cdot H_1 \cdots H_{2n-2} > 4$. Противоречие.

ЛЕММА 3.4.4. *Многообразие Z не является особой точкой на X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Z – особая точка на X . Тогда $\pi(Z)$ – обыкновенная двойная точка на гиперповерхности $S \subset \mathbb{P}^{2n}$. Пусть $\alpha: V \rightarrow X$ – раздутие точки Z , а G – исключительный дивизор бирационального морфизма α . Тогда V неособо, а G – квадрика размерности $2n - 1$ с одной особой точкой $O \in G$, т.е. G – квадратичный конус с вершиной O .

Пусть $M_V = \alpha^{-1}(M_X)$. Тогда выполнено соотношение

$$M_V \sim_{\mathbb{Q}} \alpha^*(M_X) - \text{mult}_Z(M_X)G,$$

где $\text{mult}_Z(M_X) > 1$ – рациональное число (см. предложение 1.7.22).

Пусть $H = \alpha^*(-K_X)$. Рассмотрим линейную систему $|H - G|$. По построению, отображение $\phi|_{H-G}$ совпадает с отображением $\gamma \circ \pi \circ \alpha$, где $\gamma: \mathbb{P}^{2n} \dashrightarrow \mathbb{P}^{2n-1}$ есть проекция из точки $\pi(Z)$. Линейная система $|H - G|$ не свободна, а именно, ее базисное множество состоит в точности из вершины O квадратичного конуса G , а раздутие точки O разрешает его неопределенности, при этом собственный прообраз квадратичного конуса G стягивается на неособую квадрику размерности $2n - 2$.

Пусть C – общая кривая, содержащаяся в слоях отображения $\phi|_{H-G}$. Тогда C неприводима и приведена, а $\pi \circ \alpha(C)$ есть прямая, проходящая через точку $\pi(Z)$. Имеем

$$C \cdot G = 2, \quad C \cdot (H - G) = 1,$$

а точка O принадлежит кривой C . Пересекая границу M_V с кривой C , получаем

$$1 > 3 - 2 \text{mult}_Z(M_X) > M_V \cdot C \geq \text{mult}_O(M_V),$$

откуда следует, что $\text{mult}_Z(M_X) \leq \frac{3}{2}$ и $\text{mult}_O(M_V) < 1$. Из эквивалентности

$$K_V + M_V \sim_{\mathbb{Q}} \alpha^*(K_X + M_X) + (2n - 2 - \text{mult}_Z(M_X))G$$

и $\text{mult}_Z(M_X) \leq \frac{3}{2}$ следует существование $Y \subset G$ такого, что

$$Y \in \mathbb{CS}(V, M_V - (2n - 2 - \text{mult}_Z(M_X))G)$$

и, в частности, $\dim(Y) \leq 2n - 2$, $\text{mult}_Y(M_V) > 1$ и $Y \in \mathbb{CS}(V, M_V)$.

Пусть $\dim(Y) = 2n - 2$. Если $O \in Y$, то

$$1 > \text{mult}_O(M_V) \geq \text{mult}_Y(M_V) > 1,$$

откуда $O \notin Y$. Пусть L – общая образующая конуса G . Тогда

$$\frac{3}{2} \geq \text{mult}_Z(M_X) = M_V \cdot L \geq \text{mult}_Y(M_V)L \cdot Y,$$

где $L \cdot Y$ понимается как пересечение на G . Значит, $L \cdot Y = 1$, а многообразие Y является гиперплоским сечением квадрики $G \subset \mathbb{P}^{2n}$. Отметим, что

$$Y \in \mathbb{LCS}(V, M_V - (2n - 3 - \text{mult}_Z(M_X))G),$$

откуда следует, что к лог-паре $(V, M_V - (2n - 3 - \text{mult}_Z(M_X))G)$ можно применить теорему 1.7.17 в общей точке подмногообразия $Y \subset V$, откуда следует неравенство

$$\text{mult}_Y(M_V^2) \geq 4(2n - 2 - \text{mult}_Z(M_X)) \geq 2,$$

поскольку $\text{mult}_Z(M_X) \leq \frac{3}{2}$ и $n \geq 2$. Пусть $H_1, \dots, H_{2n-2}$ — общие дивизоры в $|H - G|$. Тогда

$$1 > 3 - 2 \text{mult}_Z^2(M_X) > H_1 \cdot H_2 \cdots H_{2n-2} \cdot M_V^2 \geq \text{mult}_Y(M_V^2)(H - G)^{2n-2} \cdot Y \geq 2,$$

что является противоречием. Таким образом, показано, что $\dim(Y) < 2n - 2$.

Из неравенства $\text{mult}_O(M_V) < 1$ следует, что $O \notin Y$, а из теоремы 1.7.18 следует, что для общей точки $P \in Z$ выполнено неравенство $\text{mult}_P(M_V^2) > 4$. Теперь рассмотрим линейную подсистему $\mathcal{D} \subset |H - G|$, состоящую из дивизоров, содержащих точку P . Тогда базисное множество линейной системы $\mathcal{D}$ состоит из следующих кривых:

- образующей L_P квадратичного конуса G , проходящей через P ;
- возможно приводимой кривой C_P такой, что ее образ $\pi \circ \alpha(C_P)$ является прямой, проходящей через точку $\pi(Z)$.

Рассмотрим $2n - 2$ общих дивизора $D_1, \dots, D_{2n-2}$ в линейной системе $\mathcal{D}$ и эффективный одномерный цикл $T = H_1 \cdots H_{2n-3} \cdot M_V^2$. Тогда $\text{mult}_P(T) > 4$, но дивизор H_{2n-2} может содержать компоненты цикла T , если L_P или одна из компонент C_P содержится в $\text{Supp}(T)$.

Предположим, что кривая C_P неприводима. Пусть

$$T = \mu L_P + \lambda C_P + \Gamma,$$

где μ и λ — неотрицательные рациональные числа, а Γ — эффективный одномерный цикл, носитель которого не содержит кривых L_P и C_P . Тогда

$$\text{mult}_P(\Gamma) > 4 - \text{mult}_P(L_P)\mu - \text{mult}_P(C_P)\lambda = 4 - \mu - \text{mult}_P(C_P)\lambda \geq 4 - \mu - 3\lambda,$$

поскольку $\text{mult}_P(C_P) \leq 3$, и выполнены неравенства

$$3 - 2 \text{mult}_Z^2(M_X) - \mu > \Gamma \cdot H_{2n-2} \geq \text{mult}_P(\Gamma) > 4 - \mu - 3\lambda,$$

поскольку $C_P \cdot H_{2n-2} = 0$, откуда $\lambda > 1$. Теперь, пересекая цикл T с общим дивизором в линейной системе $|\alpha^*(-K_X)|$, мы сразу получаем противоречие.

Пусть теперь кривая C_P приводима. Тогда

$$C_P = C_1 + C_2 + C_3,$$

где C_i — неособая рациональная кривая такая, что $\pi \circ \alpha(C_P)$ — прямая, отображение $\pi \circ \alpha|_{C_i}$ является изоморфизмом, $-K_X \cdot \alpha(C_i) = 1$ и $C_i \neq C_j$ при $i \neq j$. Положим

$$T = \mu L_P + \sum_{i=1}^3 \lambda_i C_i + \Gamma,$$

где μ и λ_i — неотрицательные рациональные числа, а Γ — эффективный одномерный цикл, носитель которого не содержит L_P и C_i , а из пересечения Γ с дивизором H_{2n-2} сразу следует неравенство $\sum_{i=1}^3 \lambda_i > 1$. Теперь, пересекая цикл T с достаточно общим дивизором в линейной системе $|\alpha^*(-K_X)|$, мы получаем противоречие.

Итак, показано, что $\dim(Z) > 0$. Более того, из доказательства леммы 3.4.3 сразу следует, что неравенство $\text{codim}(Z \subset X) > 2$ невозможно. Таким образом, имеем $\text{codim}(Z \subset X) = 2$, а из равенства $K_X^{2n} = 3$ и неравенства $\text{mult}_Z(M_X) \geq 1$ следует, что $K_X^{2n-2} \cdot Z \leq 2$.

ЛЕММА 3.4.5. *Выполнено равенство $n = 2$, т.е. $\dim(X) = 4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n > 2$. Возьмем достаточно общий дивизор V в свободной линейной системе $|-K_X|$. Тогда V – неособая гиперповерхность степени $3n$ во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(1^{2n}, n)$ размерности $2n - 1 \geq 5$, откуда следует одномерность группы гомологий $H_{4n-6}(V, \mathbb{C})$ (см. теорему 7.2 в [78] и § 4 в [54]).

Покажем, что $Y = Z \cap V \subset V$ не может порождать группу гомологий $H_{4n-6}(V, \mathbb{C})$. Предположим, что $Y \equiv \lambda D^2$ в $H_{4n-6}(V, \mathbb{C})$ для $\lambda \in \mathbb{C}$, где $D = -K_X|_V$. Заметим, что $\pi(Z) \not\subset S$ по теореме Лефшеца. Таким образом, образ $\pi(Z)$ является либо линейным подпространством размерности $2n - 2$ либо квадрикой размерности $2n - 2$. При этом $\pi^{-1}(\pi(Z))$ распадается на три неприводимых подмногообразия, сопряженных относительно действия $\mathbb{Z}_3$ на многообразии X , которое переставляет слои π , откуда $\lambda = \frac{\alpha}{3}$, где $\alpha = K_X^{2n-2} \cdot Z$. Имеем

$$\alpha = Y \cdot D^{2n-3} = \lambda^{2-n} D \cdot Y^{n-2},$$

откуда $D \cdot Y^{n-2} = \frac{\alpha^{n-1}}{3} \notin \mathbb{Z}$. Противоречие.

Теперь требуемое противоречие достигается точно так же, как и в доказательстве теоремы 3.3.1. Таким образом, теорема 3.4.1 доказана. Естественнo попытаться обобщить утверждение теоремы 3.4.1 следующими способами: устранить предположение о том, что тройное накрытие π является циклическим; разрешить гиперповерхности S иметь обыкновенные изолированные особые точки кратности не больше чем $3n - 3$ (см. [29]); допустить, что степень накрытия π не превосходит 8.

§ 3.5. Циклические накрытия

Пусть $\psi: X \rightarrow V \subset \mathbb{P}^n$ – циклическое накрытие степени $d \geq 2$ с ветвлением в неособом дивизоре $R \subset V$ такое, что V – неособая гиперповерхность степени m и выполнено неравенство $n \geq 5$. Тогда группа $\text{Pic}(V)$ порождена дивизором $\psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_V)$ и

$$-K_X \sim \psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m - n - 1 + (d - 1)k)|_V),$$

где k – такое натуральное число, что $R \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(dk)|_V$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5.1. Нас интересует, когда многообразие X является бирационально-сверхжестким многообразием Фано, поэтому можно считать, что $m + (d - 1)k = n$.

В случае, когда выполнены равенства $m = 1$ и $d = 2$, бирациональная сверхжесткость многообразия X следует из теоремы 3.3.1, а в случае, когда $m = 2$ и $d = 2$, бирациональная сверхжесткость многообразия X доказана в теореме 2.3.5. Более того, с помощью техники гиперкасательных линейных систем в работах [151] и [158] доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.5.2. *Предположим, что либо $d = 2$, либо $n \geq 6$, а многообразие X является достаточно общим. Тогда X бирационально сверхжестко.*

Покажем, что теорема 1.7.19 влечет следующий результат (см. [34]).

ТЕОРЕМА 3.5.3. *Пусть $d = 2$, выполнено неравенство $n \geq 8$ и либо $m = 3$, либо $m = 4$. Тогда X бирационально сверхжестко.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X не является бирационально сверхжестким. Тогда из теоремы 1.4.1 следует существование линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X , не имеющей неподвижных компонент, такой, что особенности лог-пары $(X, \frac{1}{r}\mathcal{M})$ не являются каноническими, где r – натуральное число такое, что $\mathcal{M} \sim -rK_X$. Множество $\text{CS}(X, \frac{\mu}{r}\mathcal{M})$ содержит подмногообразие $Z \subset X$ для рационального числа $\mu < 1$. Можно считать, что Z является подмногообразием наибольшей размерности, которое обладает таким свойством. В частности, выполнено неравенство $\text{mult}_Z(S) > r$ для любого дивизора S в $\mathcal{M}$ и $\dim(Z) \leq \dim(X) - 2 = n - 3$.

Пусть Z – точка, S_1 и S_2 – достаточно общие дивизоры в $\mathcal{M}$, $f: U \rightarrow X$ – раздутие многообразия X в точке Z , а E – исключительный дивизор морфизма f . Тогда из теоремы 1.7.19 следует существование линейного подпространства $\Pi \subset E$ коразмерности 2 такого, что $\text{mult}_Z(S_1 \cdot S_2 \cdot D) > 8r^2$ для любого дивизора $D \in |-K_X|$, который обладает следующими свойствами: дивизор D содержит точку Z и неособ в ней; дивизор $f^{-1}(D)$ содержит подмногообразие $\Pi \subset U$; дивизор D не содержит подмногообразий в X коразмерности 2, содержащихся в базисном множестве $\mathcal{M}$.

Рассмотрим линейную подсистему $\mathcal{H} \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_V|$ такую, что

$$H \in \mathcal{H} \iff \Pi \subset (\psi \circ f)^{-1}(H),$$

тогда существует линейное подпространство $\Sigma \subset \mathbb{P}^n$ размерности $n - 3$ такое, что все дивизоры в линейной системе $\mathcal{H}$ высекаются на гиперповерхности V гиперплоскостями в $\mathbb{P}^n$, содержащими Σ . В частности, базисное множество линейной системы $\mathcal{H}$ состоит из пересечения $\Sigma \cap V$, однако по теореме Лефшеца $\Sigma \not\subset V$ и, следовательно, $\dim(\Sigma \cap V) = n - 4$.

Пусть H – общий дивизор в $\mathcal{H}$ и $D = \psi^{-1}(H) \in |-K_X|$. Тогда D содержит Z и неособ в ней, дивизор $f^{-1}(D)$ содержит подмногообразие $\Pi \subset U$. Предположим, что D содержит подмногообразие $\Gamma \subset X$ коразмерности 2, содержащиеся в базисном множестве $\mathcal{M}$. Тогда

$$\dim(\psi(\Gamma)) = n - 3,$$

но $\psi(\Gamma) \subset \Sigma \cap V$ и $\dim(\Sigma \cap V) = n - 4$. Противоречие. Итак, доказано, что D не содержит подмногообразий многообразия X коразмерности 2, которые содержатся в базисном множестве линейной системы $\mathcal{M}$. Пусть $H_1, \dots, H_t$ – общие дивизоры в $|-K_X|$, проходящие через точку Z , где $t = \dim(X) - 3$. Тогда

$$8r^2 \geq 2mr^2 = H_1 \cdots H_t \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot D \geq \text{mult}_Z(S_1 \cdot S_2 \cdot D) > 8r^2,$$

что есть противоречие. Значит, выполнено неравенство $\dim(Z) \neq 0$.

Пусть $\dim(Z) \leq \dim(X) - 5$, а $H_1, \dots, H_t$ – общие гиперплоские сечения гиперповерхности V , где $t = \dim(Z) > 0$. Положим

$$\overline{V} = \bigcap_{i=1}^t H_i, \quad \overline{X} = \psi^{-1}(\overline{V}), \quad \overline{\psi} = \psi|_{\overline{X}}: \overline{X} \rightarrow \overline{V}$$

и $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}|_{\overline{X}}$. Тогда $\overline{V} \subset \mathbb{P}^{n-t}$ – неособая гиперповерхность, морфизм $\overline{\psi}$ является двойным накрытием, разветвленным над неособым дивизором $R \cap \overline{V}$, линейная система $\overline{\mathcal{M}}$ не имеет базисных компонент, а $\overline{V}$ не содержит линейных подпространств в $\mathbb{P}^{n-t}$ размерности $n - t - 3$ по теореме Лефшеца, поскольку $n - t \geq 6$. Пусть P – точка в $Z \cap \overline{X}$. Тогда P является центром канонических особенностей лог-пары

$\text{CS}(\overline{X}, \frac{1}{r}\overline{\mathcal{M}})$, а из предыдущих аргументов следует противоречие с теоремой 1.7.19. Значит, $\dim(Z) \geq \dim(X) - 4$.

Пусть $\dim(Z) = \dim(X) - 2$, S_1 и S_2 — общие дивизоры в $\mathcal{M}$, а $H_1, \dots, H_{n-3}$ — общие дивизоры в линейной системе $|-K_X|$. Тогда

$$2mr^2 = H_1 \cdots H_{n-3} \cdot S_1 \cdot S_2 > r^2(-K_X)^{n-3} \cdot Z,$$

поскольку $\text{mult}_Z(\mathcal{M}) > r$. Таким образом, $(-K_X)^{n-3} \cdot Z < 2m$, где

$$(-K_X)^{n-3} \cdot Z = \begin{cases} \deg(\psi(Z) \subset \mathbb{P}^n), & \text{если } \psi|_Z \text{ бирационален,} \\ 2 \deg(\psi(Z) \subset \mathbb{P}^n), & \text{если } \psi|_Z \text{ небирационален,} \end{cases}$$

а из теоремы Лефшеца следует, что число $\deg(\psi(Z))$ обязано делиться на степень m , откуда следует, что морфизм $\psi|_Z$ бирационален, и $\deg(\psi(Z)) = m$, откуда сразу следует, что либо схемно-теоретическое пересечение $\psi(Z) \cap R$ особо в каждой точке, либо $\psi(Z) \subset R$, значит, из применения теоремы Лефшеца к неособому полному пересечению $R \subset \mathbb{P}^n$ сразу следует противоречие. Таким образом, выполнено неравенство $\dim(Z) \geq \dim(X) - 4 \geq 3$.

Пусть S — общий дивизор в $\mathcal{M}$, $\widehat{S} = \psi(S \cap R)$ и $\widehat{Z} = \psi(Z \cap R)$. Тогда $\widehat{S}$ — дивизор на полном пересечении $R \subset \mathbb{P}^n$, но $\text{mult}_{\widehat{Z}}(\widehat{S}) > r$ и $\widehat{S} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(r)|_R$, что противоречит предложению 1.3.12.

Из аргументов доказательства теоремы 3.5.3 следует следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.5.4. Пусть $d = 3$, $m = 2$ и $n \geq 8$. Тогда X бирационально сверх-жестко.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Andreatta. An introduction to Mori theory: the case of surfaces // Preprint. Trento: Università di Trento, 2003.
- [2] M. Artin. On isolated rational singularities of surfaces // Amer. J. Math. 1966. V. 88. P. 129–136.
- [3] M. Artin, D. Mumford. Some elementary examples of unirational varieties which are not rational // Proc. London Math. Soc. (3). 1972. V. 25. P. 75–95.
- [4] F. Bardelli. Polarized mixed Hodge structures: on irrationality of threefolds via degeneration // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1984. V. 137. P. 287–369.
- [5] W. Barth. Two projective surfaces with many nodes, admitting the symmetries of the icosahedron // J. Algebraic Geom. 1996. V. 5. №1. P. 173–186.
- [6] W. Barth, A. Van de Ven. Fano varieties of lines on hypersurfaces // Arch. Math. (Basel). 1978. V. 31. №1. P. 96–104.
- [7] S.-M. Belcastro. Picard lattices of families of K3 surfaces // Comm. Algebra. 2002. V. 30. №1. P. 61–82.
- [8] M. Beltrametti, A. J. Sommese. A criterion for a variety to be a cone // Comment. Math. Helv. 1987. V. 62. №3. P. 417–422.
- [9] E. M. Bese. On the spannedness and very ampleness of certain line bundles on the blow-ups of $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ and $\mathbb{F}_r$ // Math. Ann. 1983. V. 262. №2. P. 225–238.
- [10] F. A. Bogomolov, Yu. Tschinkel. On the density of rational points on elliptic fibrations // J. Reine Angew. Math. 1999. V. 511. P. 87–93.
- [11] F. A. Bogomolov, Yu. Tschinkel. Density of rational points on elliptic K3 surfaces // Asian J. Math. 2000. V. 4. №2. P. 351–368.
- [12] A. Borisov. Boundedness theorem for Fano log-threefolds // J. Algebraic Geom. 1996. V. 5. №1. P. 119–133.

- [13] A. Borisov. Boundedness of Fano threefolds with log-terminal singularities of given index // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 2001. V. 8. № 2. P. 329–342.
- [14] F. Call, G. Lyubeznik. A simple proof of Grothendieck's theorem on the parafactoriality of local rings // Contemp. Math. 1994. V. 159. P. 15–18.
- [15] F. Catanese, G. Ceresa. Constructing sextic surfaces with a given number d of nodes // J. Pure Appl. Algebra. 1982. V. 23. № 1. P. 1–12.
- [16] Н. Г. Чеботарев. Теория алгебраических функций. М.–Л.: Гостехиздат, 1948.
- [17] И. А. Чельцов. Особенности трехмерных многообразий, обладающих обильным эффективным дивизором – гладкой поверхностью кодаировой размерности нуль // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 4. С. 618–626.
- [18] И. А. Чельцов. Трехмерные алгебраические многообразия, обладающие дивизором с численно тривиальным каноническим классом // УМН. 1996. Т. 51. № 1. С. 177–178.
- [19] И. А. Чельцов. Поверхности дель Педро с нерациональными особенностями // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 3. С. 451–467.
- [20] I. Cheltsov. On the rationality of non-Gorenstein $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds with an integer Fano index // Contemp. Math. 1997. V. 207. P. 43–50.
- [21] И. А. Чельцов. О гладкой четырехмерной квинтике // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 139–160.
- [22] И. А. Чельцов. Лог пары на гиперповерхностях степени N в $\mathbb{P}^N$ // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 1. С. 131–138.
- [23] I. Cheltsov. Log pairs on birationally rigid varieties // J. Math. Sci. 2000. V. 102. P. 3843–3875.
- [24] И. А. Чельцов. Многообразие Фано с единственной эллиптической структурой // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 5. С. 145–156.
- [25] И. А. Чельцов. Лог-канонические пороги на гиперповерхностях // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 8. С. 155–172.
- [26] И. А. Чельцов. Антиканоические модели трехмерных многообразий Фано степени четыре // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 4. С. 147–172.
- [27] И. А. Чельцов. Нерациональность четырехмерного гладкого полного пересечения квадрики и кватрики, не содержащего плоскости // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 11. С. 95–116.
- [28] И. А. Чельцов. Метод вырождения и нерациональность трехмерных многообразий с пучком поверхностей дель Педро // УМН. 2004. Т. 59. № 4. С. 203–204.
- [29] И. А. Чельцов. Бирационально жесткие циклические тройные пространства // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. № 6. С. 169–220.
- [30] I. Cheltsov. Birationally rigid del Pezzo fibrations // Manuscripta Math. 2005. V. 116. № 4. P. 385–396.
- [31] I. Cheltsov. Non-rational nodal quartic threefolds // Pacific J. Math. (to appear).
- [32] I. Cheltsov. Double spaces with isolated singularities // arXiv:math.AG/0405194.
- [33] I. Cheltsov. On factoriality of nodal threefolds // J. Algebraic Geom. 2005. V. 14. № 4. P. 663–690.
- [34] I. Cheltsov. Double cubics and double quartics // Math. Z. (to appear).
- [35] И. А. Чельцов, Дж. Парк. Глобальные лог-канонические пороги и обобщенные точки Эккарда // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 5. С. 149–160.
- [36] I. Cheltsov, J. Park. Sextic double solids // arXiv:math.AG/0404452.
- [37] I. Cheltsov, J. Park. Arithmetics and geometry of weighted Fano threefold hypersurfaces // arXiv:math.AG/0505234.
- [38] И. А. Чельцов, Л. Воцлав. Нерациональные полные пересечения // Труды МИАН. 2004. Т. 246. С. 303–307.
- [39] C. Ciliberto, V. di Gennaro. Factoriality of certain hypersurfaces of $\mathbb{P}^4$ with ordinary double points // Algebraic Transformation Group and Algebraic Varieties. Berlin: Springer-Verlag, 2004. P. 1–9. (Encyclopaedia Math. Sci. V. 132.)
- [40] C. H. Clemens. Double solids // Adv. Math. 1983. V. 47. № 2. P. 107–230.
- [41] C. H. Clemens, P. A. Griffiths. The intermediate Jacobian of the cubic threefold // Ann. of Math. (2). 1972. V. 95. P. 281–356.
- [42] A. Collino. Lines on quartic threefolds // J. London Math. Soc. (2). 1979. V. 19. № 2. P. 257–267.

- [43] J. L. Colliot-Thélène, M. Ojanguren. Variétés unirationnelles non rationnelles: au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford // *Invent. Math.* 1989. V. 97. № 1. P. 141–158.
- [44] A. Conte, M. Marchisio, J. P. Murre. On unirationality of double covers of fixed degree and large dimension; a method of Ciliberto // *Algebraic Geometry*. Berlin: de Gruyter, 2002. P. 127–140.
- [45] A. Corti. Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov // *J. Algebraic Geom.* 1995. V. 4. № 2. P. 223–254.
- [46] A. Corti. Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry // *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* 2000. V. 281. P. 259–312.
- [47] A. Corti, M. Mella. Birational geometry of terminal quartic 3-folds. I // *Amer. J. Math.* 2004. V. 126. № 4. P. 739–761.
- [48] A. Corti, J. Kollár, K. E. Smith. Rational and Nearly Rational Varieties. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
- [49] A. Corti, A. Pukhlikov, M. Reid. Fano 3-fold hypersurfaces // *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* 2000. V. 281. P. 175–258.
- [50] D. A. Cox. Picard numbers of surfaces in 3-dimensional weighted projective spaces // *Math. Z.* 1989. V. 201. № 2. P. 183–189.
- [51] S. Cynk. Defect of a nodal hypersurface // *Manuscripta Math.* 2001. V. 104. № 3. P. 325–331.
- [52] А. И. Дегтярев. Классификация поверхностей четвертой степени, имеющих непростую особую точку // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1989. Т. 53. № 6. С. 1269–1290.
- [53] И. В. Долгачев. О рациональных поверхностях с пучком эллиптических кривых // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1966. Т. 30. № 5. С. 1073–1100.
- [54] I. Dolgachev. Weighted projective varieties // *Lecture Notes in Math.* 1982. V. 956. P. 34–71.
- [55] R. Elkik. Rationalité des singularités canoniques // *Invent. Math.* 1981. V. 64. № 1. P. 1–6.
- [56] S. Endraß. On the divisor class group of double solids // *Manuscripta Math.* 1999. V. 99. № 3. P. 341–358.
- [57] F. Enriques. Sopra una involuzione non razionale dello spazio // *Rend. Accad. Lincei.* 1912. V. 21. P. 81–83.
- [58] G. Faltings. Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern // *Invent. Math.* 1983. V. 73. № 3. P. 349–366.
- [59] G. Faltings. Diophantine approximation on abelian varieties // *Ann. of Math. (2).* 1991. V. 133. № 3. P. 549–576.
- [60] G. Fano. Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli // *Atti Accad. Torino.* 1908. V. 43. P. 541–552.
- [61] G. Fano. Osservazioni sopra alcune varietà non razionali aventi tutti i generi nulli // *Atti Accad. Torino.* 1915. V. 50. P. 1067–1072.
- [62] T. de Fernex, L. Ein, M. Mustață. Multiplicities and log-canonical thresholds // *J. Algebraic Geom.* 2004. V. 13. № 3. P. 603–615.
- [63] T. de Fernex, L. Ein, M. Mustață. Bounds for log canonical thresholds with applications to birational rigidity // *Math. Res. Lett.* 2003. V. 10. № 2–3. P. 219–236.
- [64] H. Finkelberg, J. Werner. Small resolutions of nodal cubic threefolds // *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* 1989. V. 51. № 2. P. 185–198.
- [65] T. Fujita. Impossibility criterion of being an ample divisor // *J. Math. Soc. Japan.* 1982. V. 34. № 2. P. 355–363.
- [66] G. van der Geer. Note on abelian schemes of level three // *Math. Ann.* 1987. V. 278. № 1–4. P. 401–408.
- [67] М. Х. Гизатуллин. Определяющие соотношения для кремоновой группы плоскости // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1982. Т. 46. № 5. С. 909–970.
- [68] M. H. Gizatullin. The decomposition, inertia and ramification groups in birational geometry // *Aspects Math.* 1994. V. E25. P. 39–45.
- [69] В. В. Голышев. Модулярность уравнений $D3$ и классификация В. А. Исковских // *Докл. РАН.* 2004. Т. 396. № 6. С. 733–739.
- [70] М. М. Гриненко. Бирациональные автоморфизмы трехмерной двойной квадратики с простейшей особенностью // *Матем. сб.* 1998. Т. 189. № 1. С. 101–118.

- [71] М. М. Гриненко. Бирациональные автоморфизмы трехмерного двойного конуса // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 7. С. 37–52.
- [72] J. Harris, Yu. Tschinkel. Rational points on quartics // Duke Math. J. 2000. V. 104. № 3. P. 477–500.
- [73] F. Hidaka, K. Watanabe. Normal Gorenstein surfaces with ample anti-canonical divisor // Tokyo J. Math. 1981. V. 4. № 2. P. 319–330.
- [74] T. Higuchi, K. Watanabe, T. Takahashi. On the classification of quartic surfaces with triple point. I // Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ. Sect. I. 1982. V. 29. P. 47–70.
- [75] T. Higuchi, K. Watanabe, T. Takahashi. On the classification of quartic surfaces with triple point. II // Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ. Sect. I. 1982. V. 29. P. 71–94.
- [76] H. Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II // Ann. of Math. (2). 1964. V. 79. P. 109–203; 205–326.
- [77] B. Hunt. The Geometry of Some Special Arithmetic Quotients. New York: Springer-Verlag, 1996. (Lecture Notes in Math. V. 1637.)
- [78] A. R. Iano-Fletcher. Working with weighted complete intersections // London Math. Soc. Lecture Note Ser. 2000. V. 281. P. 101–173.
- [79] S. Iitaka. Characterization of two lines on a projective plane // Lecture Notes in Math. 1983. V. 1016. P. 432–448.
- [80] S. Iitaka. Classification of reducible plane curves // Tokyo J. Math. 1988. V. 11. № 2. P. 363–379.
- [81] S. Iitaka. Birational geometry of plane curves // Tokyo J. Math. 1999. V. 22. № 2. P. 289–321.
- [82] Sh. Ishii. A characterization of hyperplane cuts of smooth complete intersection // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 1982. V. 58. № 7. P. 309–311.
- [83] S. Ishii. Quasi-Gorenstein Fano 3-folds with isolated nonrational loci // Compositio Math. 1991. V. 77. № 3. P. 335–341.
- [84] Y. Ishii, N. Nakayama. Classification of normal quartic surfaces with irrational singularities // J. Math. Soc. Japan. 2004. V. 56. № 3. P. 941–965.
- [85] В. А. Исковских. Многообразия Фано. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41. № 3. С. 516–562.
- [86] В. А. Исковских. Многообразия Фано. II // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 3. С. 506–549.
- [87] В. А. Исковских. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // Совр. проблемы матем. 1979. Т. 12. С. 159–236.
- [88] В. А. Исковских. Простое доказательство теоремы Гизатуллина // Труды МИАН. 1990. Т. 183. С. 111–116.
- [89] В. А. Исковских. Образующие в двумерной группе Кремоны над незамкнутым полем // Труды МИАН. 1991. Т. 200. С. 157–170.
- [90] В. А. Исковских. О критерии рациональности для расслоений на коники // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 7. С. 75–92.
- [91] В. А. Исковских. Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори // УМН. 1996. Т. 51. № 4. С. 3–72.
- [92] В. А. Исковских. О проблеме рациональности для трехмерных алгебраических многообразий // Труды МИАН. 1997. Т. 218. С. 190–232.
- [93] В. А. Исковских. Бирациональная жесткость гиперповерхностей Фано в рамках теории Мори // УМН. 2001. Т. 56. № 2. С. 3–86.
- [94] В. А. Исковских, Ю. И. Манин. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86. № 1. С. 140–166.
- [95] V. A. Iskovskikh, Yu. G. Prokhorov. Fano Varieties. Berlin: Springer-Verlag, 1999. (Encyclopaedia Math. Sci. V. 47.)
- [96] V. A. Iskovskikh, A. V. Pukhlikov. Birational automorphisms of multidimensional algebraic manifolds // J. Math. Sci. 1996. V. 82. P. 3528–3613.
- [97] В. А. Исковских, Ф. К. Кабдыкаиров, С. Л. Трегуб. Соотношения в двумерной группе Кремоны над совершенным полем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 3. С. 3–69.
- [98] D. B. Jaffe, D. Ruberman. A sextic surface cannot have 66 nodes // J. Algebraic Geom. 1997. V. 6. P. 151–168.

- [99] J. Johnson, J. Kollár. Fano hypersurfaces in weighted projective 4-spaces // Experiment. Math. 2001. V. 10. № 1. P. 151–158.
- [100] A. J. de Jong, N. I. Shepherd-Barron, A. Van de Ven. On the Burkhardt quartic // Math. Ann. 1990. V. 286. № 1–3. P. 309–328.
- [101] A. J. de Jong, J. H. M. Steenbrink. Picard numbers of surfaces in 3-dimensional weighted projective spaces // Math. Z. 1991. V. 206. № 3. P. 341–344.
- [102] M. Kawakita. Divisorial contractions in dimension three which contracts divisors to smooth points // Invent. Math. 2001. V. 145. № 1. P. 105–119.
- [103] Yu. Kawamata. Boundedness of $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds // Contemp. Math. 1992. V. 131. Part 3. P. 439–445.
- [104] Y. Kawamata. Divisorial contractions to 3-dimensional terminal quotient singularities // Higher-dimensional Complex Varieties (Trento, 1994). Berlin: de Gruyter, 1996. P. 241–246.
- [105] Yu. Kawamata. Subadjunction of log canonical divisors for a subvariety of codimension 2 // Contemp. Math. 1997. V. 207. P. 79–88.
- [106] Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki. Introduction to the minimal model problem // Adv. Stud. Pure Math. 1987. V. 10. P. 283–360.
- [107] S. Keel, K. Matsuki, J. McKernan. Log abundance theorem for threefolds // Duke Math. J. 1994. V. 75. № 1. P. 99–119.
- [108] S. Kleiman. Toward a numerical theory of ampleness // Ann. of Math. (2). 1966. V. 84. P. 293–344.
- [109] J. Kollár. Nonrational hypersurfaces // J. Amer. Math. Soc. 1995. V. 8. № 1. P. 241–249.
- [110] J. Kollár. Rational Curves on Algebraic Varieties. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [111] J. Kollár. Singularities of pairs // Proc. Sympos. Pure Math. 1997. V. 62. Part 1. P. 221–287.
- [112] J. Kollár. Nonrational covers of $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m$ // London Math. Soc. Lecture Note Ser. 2000. V. 281. P. 51–71.
- [113] J. Kollár (ed.). Flips and Abundance for Algebraic Threefolds. Paris: Société Mathématique de France, 1992. (Astérisque. V. 211.)
- [114] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori. Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds // J. Differential Geom. 1992. V. 36. № 3. P. 765–779.
- [115] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori. Rationally connected varieties // J. Algebraic Geom. 1992. V. 1. № 3. P. 429–448.
- [116] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori, H. Takagi. Boundedness of canonical $\mathbb{Q}$ -Fano 3-folds // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 2000. V. 76. № 5. P. 73–77.
- [117] A. Kontogeorgis. Automorphisms of Fermat-like varieties // Manuscripta Math. 2002. V. 107. № 2. P. 187–205.
- [118] A. Langer. Fano schemes of linear spaces on hypersurfaces // Manuscripta Math. 1997. V. 93. № 1. P. 21–28.
- [119] H. Maeda. Surfaces with nef anticanonical bundles // Boll. Unione Mat. Ital. A (7). 1994. V. 8. № 3. P. 425–430.
- [120] Ю. И. Манин. Рациональные поверхности над совершенными полями // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1966. V. 30. P. 55–113.
- [121] Ю. И. Манин. Рациональные поверхности над совершенными полями. II // Матем. сб. 1967. Т. 72 (114). № 2. С. 161–192.
- [122] Ю. И. Манин. Кубические формы. М.: Наука, 1972.
- [123] M. R. Marchisio. Unirational quartic hypersurfaces // Boll. Unione Mat. Ital. Ser. B Artic. Ric. Mat. (8). 2000. V. 3. № 2. P. 301–313.
- [124] D. Markushevich. Minimal discrepancy for a terminal cDV singularity is 1 // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 1996. V. 3. № 2. P. 445–456.
- [125] D. Markushevich, A. Tikhomirov. A parametrization of the theta divisor of the quartic double solid // Internat. Math. Res. Not. 2003. V. 51. P. 2747–2778.
- [126] K. Matsuki. Introduction to the Mori Program. New York: Springer-Verlag, 2002.
- [127] H. Matsumura, P. Monsky. On the automorphisms of hypersurfaces // J. Math. Kyoto Univ. 1964. V. 3. P. 347–361.
- [128] B. Mazur. Modular curves and the Eisenstein ideal // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1977. V. 47. P. 33–186.

- [129] M. Mella. Birational geometry of quartic 3-folds. II. The importance of being $\mathbb{Q}$ -factorial // *Math. Ann.* 2004. V. 330. №1. P. 107–126.
- [130] L. Merel. Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres // *Invent. Math.* 1996. V. 124. №1–3. P. 437–449.
- [131] R. Miranda. Triple covers in algebraic geometry // *Amer. J. Math.* 1985. V. 107. №5. P. 1123–1158.
- [132] Б. Г. Мойшезон. Об алгебраических классах гомологий на алгебраических многообразиях // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1967. Т. 31. №2. С. 225–268.
- [133] S. Mori. On 3-dimensional terminal singularities // *Nagoya Math. J.* 1985. V. 98. P. 43–66.
- [134] S. Mori. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds // *J. Amer. Math. Soc.* 1988. V. 1. №1. P. 117–253.
- [135] S. Mori, S. Mukai. Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$ // *Manuscripta Math.* 1981. V. 36. P. 147–162.
- [136] S. Mori, S. Mukai. Erratum: Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$ // *Manuscripta Math.* 2003. V. 110. №3. P. 407.
- [137] A. M. Nadel. The boundedness of degree of Fano varieties with Picard number one // *J. Amer. Math. Soc.* 1991. V. 4. №4. P. 681–692.
- [138] M. Noether. Über Flächen, welche Shaaren rationaler Curven besitzen // *Math. Ann.* 1871. V. 3. P. 161–227.
- [139] K. Pettersson. On nodal determinantal quartic hypersurfaces in $\mathbb{P}^4$ // Thesis. University of Oslo, 1998.
- [140] E. Peyre. Unramified cohomology and rationality problems // *Math. Ann.* 1993. V. 296. №2. P. 247–268.
- [141] Yu. Prokhorov. On extremal contractions from threefolds to surfaces: the case of one non-Gorenstein point // *Contemp. Math.* 1997. V. 207. P. 119–141.
- [142] Yu. G. Prokhorov. On the Mori classification of conic bundles // *J. Math. Sci. (New York)*. 2001. V. 106. №5. P. 3340–3352.
- [143] Yu. Prokhorov. Elliptic Gorenstein singularities, log canonical thresholds, and log Enriques surfaces // *J. Math. Sci. (New York)*. 2003. V. 115. №3. P. 2378–2394.
- [144] A. Pukhlikov. Birational isomorphisms of four-dimensional quintics // *Invent. Math.* 1987. V. 87. №2. P. 303–329.
- [145] А. В. Пухликов. Бирациональные автоморфизмы двойного пространства и двойной квадррики // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1988. Т. 52. №1. С. 229–239.
- [146] А. В. Пухликов. Бирациональные автоморфизмы трехмерной кваттики с простейшей особенностью // *Матем. сб.* 1988. Т. 135. №4. С. 472–496.
- [147] А. В. Пухликов. Замечание о теореме В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трехмерной кваттике // *Труды МИАН.* 1995. Т. 208. С. 278–289.
- [148] A. V. Pukhlikov. Birational automorphisms of double spaces with singularities // *J. Math. Sci. (New York)*. 1997. V. 85. №4. P. 2128–2141.
- [149] A. V. Pukhlikov. Birational automorphisms of Fano hypersurfaces // *Invent. Math.* 1998. V. 134. №2. P. 401–426.
- [150] А. В. Пухликов. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1998. Т. 62. №1. С. 123–164.
- [151] А. В. Пухликов. Бирационально жесткие двойные гиперповерхности Фано // *Матем. сб.* 2000. Т. 191. №6. С. 101–126.
- [152] A. V. Pukhlikov. Essentials of the method of maximal singularities // *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* 2000. V. 281. P. 73–100.
- [153] A. Pukhlikov. Birationally rigid Fano complete intersections // *J. Reine Angew. Math.* 2001. V. 541. P. 55–79.
- [154] А. В. Пухликов. Бирационально жесткие гиперповерхности Фано // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2002. Т. 66. №6. С. 159–186.
- [155] А. В. Пухликов. Бирационально жесткие гиперповерхности Фано с изолированными особенностями // *Матем. сб.* 2002. Т. 193. №3. С. 135–160.
- [156] А. В. Пухликов. Бирационально жесткие итерированные двойные накрытия Фано // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2003. Т. 67. №3. С. 139–182.

- [157] A. V. Pukhlikov. Birationally rigid singular Fano hypersurfaces // J. Math. Sci. (New York). 2003. V. 115. P. 2428–2436.
- [158] A. V. Pukhlikov. Birationally rigid Fano cyclic covers // arXiv:math.AG/0411198.
- [159] M. Reid. Young person's guide to canonical singularities // Proc. Sympos. Pure Math. 1987. V. 46. Part 1. P. 345–414.
- [160] M. Reid. Chapters on algebraic surfaces // Complex Algebraic Geometry (Park City, Utah, 1993) / ed. J. Kollár. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. P. 5–159.
- [161] D. Ryder. Elliptic and K3 fibrations birational to Fano 3-fold weighted hypersurfaces // Thesis. University of Warwick, 2002.
- [162] В. Г. Саркисов. Бирациональные автоморфизмы расслоений коник // Изв. РАН. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 4. С. 918–945.
- [163] В. Г. Саркисов. О структурах расслоений на коники // Изв. РАН. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 2. С. 371–408.
- [164] B. Segre. A note on arithmetical properties of cubic surfaces // J. London Math. Soc. 1943. V. 18. P. 24–31.
- [165] T. Shioda. Geometry of Fermat varieties // Progr. Math. 1982. V. 26. P. 45–56.
- [166] В. В. Шокуров. Существование прямой на многообразии Фано // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 4. С. 922–964.
- [167] В. В. Шокуров. Многообразия Прима: теория и приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 4. С. 785–855.
- [168] В. В. Шокуров. Трехмерные лог-перестройки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 1. С. 105–203.
- [169] V. Shokurov. 3-fold log models // J. Math. Sci. 1996. V. 81. P. 2667–2699.
- [170] В. В. Шокуров. О рациональной связности // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 5. С. 771–782.
- [171] V. V. Shokurov. Prelimiting flips // Труды МИАН. 2003. Т. 240. С. 82–219.
- [172] J. H. M. Steenbrink. On the Picard group of certain smooth surfaces in weighted projective spaces // Lecture Notes in Math. 1982. V. 961. P. 302–313.
- [173] S. Suzuki. Birational geometry of birational pairs // Comment. Math. Univ. St. Paul. 1983. V. 32. № 1. P. 85–106.
- [174] J. A. Todd. On a quartic primal with forty-five nodes, in space of four dimensions // Quart. J. Math. 1936. V. 7. P. 168–174.
- [175] А. Н. Тюрин. Промежуточный якобиан трехмерных многообразий // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. 1979. Т. 12. С. 5–57.
- [176] N. Tziolas. Terminal 3-fold divisorial contractions of a surface to a curve. I // Compositio Math. 2003. V. 139. № 3. P. 239–261.
- [177] Y. Umezū. Quartic surfaces of elliptic ruled type // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 283. № 1. P. 127–143.
- [178] А. Н. Варченко. О полунепрерывности спектра и оценке сверху числа особых точек проективной гиперповерхности // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 6. С. 1294–1297.
- [179] C. Voisin. Sur la jacobienne intermediaire du double solide d'indice deux // Duke Math. J. 1988. V. 57. № 2. P. 629–646.
- [180] J. Wahl. Nodes on sextic hypersurfaces in $\mathbb{P}^3$ // J. Differential Geom. 1998. V. 48. № 3. P. 439–444.
- [181] T. Yonemura. Hypersurface simple K3 singularities // Tohoku Math. J. (2). 1990. V. 42. № 3. P. 351–380.
- [182] O. Zariski. On Castelnuovo's criterion of rationality $p_a = P_2 = 0$ of an algebraic surface // Illinois J. Math. 1958. V. 2. P. 303–315.