Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Рыбаков, Дзета-функции расслоений на коники и поверхностей дель Пеццо степени 4 над конечными полями, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 5, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1644>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:39:38

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РАССЛОЕНИЙ НА КОНИКИ И ПОВЕРХНОСТЕЙ
ДЕЛЬ ПЕЦЦО СТЕПЕНИ 4 НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

С. Ю. РЫБАКОВ

Пусть S — поверхность над конечным полем k . В статье [1] поставлен вопрос: сколько k -точек может быть на такой поверхности? Для ответа на этот вопрос можно использовать классификацию поверхностей. Действительно, если ответ известен для минимальных моделей, то он известен и для всех поверхностей, так как любая поверхность получается раздутием минимальной. Некоторую информацию о структуре минимальных поверхностей дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1 [2], [3]. Пусть S — собственная и гладкая поверхность над произвольным полем k . Тогда существует последовательность стягиваний $S \rightarrow S_1 \rightarrow \dots \rightarrow S_n = S'$, где S' — гладкая минимальная поверхность с числом Пикара $\rho(S')$, удовлетворяющая ровно одному из следующих условий:

- 1) $K_{S'}$ численно эффективен;
- 2) $\rho(S') = 2$ и S' — расслоение на коники над кривой C , т.е. существует морфизм $\pi_{S'}: S' \rightarrow \mathbb{P}^1$, каждый слой которого либо гладкая плоская коника, либо пара пересекающихся прямых;
- 3) $\rho(S') = 1$ и антиканонический класс $-K_{S'}$ обилен, т.е. S' — минимальная поверхность дель Пеццо.

Нас будут интересовать расслоения на коники и поверхности дель Пеццо степени 4 с точки зрения числа точек на них над основным полем и его расширениями. Мы ответим на более общий вопрос: какие дзета-функции бывают у таких поверхностей?

Расслоение на коники $S \rightarrow C$ над полем k называется *минимальным расслоением*, если ни одну из прямых, лежащих в слоях π_S , нельзя стянуть над k . Расслоение минимально тогда и только тогда, когда $\rho(S) = 2$, т.е. $\text{NS}(S) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Для минимальных расслоений на коники мы авонсируем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\pi: S \rightarrow C$ — минимальное расслоение на коники над кривой рода g . Над алгебраическим замыканием поля k у π есть $f = \rho(\bar{S}) - 2$ вырожденных слоев, причем $f = \sum g a_r$, где a_r — число вырожденных слоев π над точками степени r . Тогда дзета-функция S имеет вид

$$Z_S(t) = Z_C(t) Z_C(qt) \prod_r (1 + q^r t^r)^{-a_r}. \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-01-22005) и Лаборатории Понселе (CNRS и HMY).

Для существования расслоения с такой дзета-функцией необходимо и достаточно, чтобы существовали такие точки $x_1, \dots, x_s$ на C , из которых ровно a_r имеют степень r , причем s четно.

Такие точки всегда существуют при больших q .

Теперь мы применим наши результаты к поверхностям дель Пеццо степени 4. Пользуясь таблицами Суиннертона–Дайера [4], Ю.И. Манин [5; IV.9] вычислил возможные типы действия группы $G = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ на исключительных прямых такой поверхности. Из этих данных уже легко получить их дзета-функции. Мы строим поверхности с такими дзета-функциями и доказываем, что других нет. Ответ дается в терминах классификации Манина. Над конечным полем, из-за цикличности группы Галуа, могут встречаться только поверхности типов I, II, IV, V, X и $XVIII$ (см. [5; IV.9]). Заметим, что в вычислениях Манина есть ошибка, указанная в [6].

ТЕОРЕМА 3. *Пусть S – минимальная поверхность дель Пеццо степени 4. Тогда тип S может быть I, II, IV, V, X или $XVIII$.*

При $q > 3$ существуют поверхности дель Пеццо степени 4 типов II, IV и V , а поверхности типов I, X и $XVIII$ существуют при всех q .

Тем самым завершена классификация поверхностей дель Пеццо степени 4.

Хотя наш метод не требует вычислений, он неприменим к поверхностям дель Пеццо меньших степеней, так как для его применимости нужно, чтобы все эти поверхности были бирационально эквивалентны расслоениям на коники. Например, кубика с уравнением

$$T_0^3 + T_1^3 + T_2^3 + aT_3^3 = 0,$$

где $a \notin (k^*)^3$ такой не является.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Tsfasman // Arithmetic, Geometry and Coding Theory. Berlin: de Gruyter, 1996. P. 209–224.
- [2] В. А. Исковских // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. №1. С. 19–43.
- [3] Yu. I. Manin // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1966. V. 30. P. 55–113.
- [4] H. P. F. Swinnerton-Dyer // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1967. V. 63. P. 55–71.
- [5] Ю. И. Манин. Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика. М.: Наука, 1972.
- [6] В. È. Kunyavskii, A. N. Skorobogatov, M. A. Tsfasman // Mém. Soc. Math. France. 1989. V. 37.

Представлено А. Б. Сосинским
Принято редколлегией 22.07.2005