Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Гугнин, О непрерывных и неприводимых n -гомоморфизмах Фробениуса,
УМН, 2005, том 60, выпуск 5, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1645>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:04:28

О НЕПРЕРЫВНЫХ И НЕПРИВОДИМЫХ n -ГОМОМОРФИЗМАХ ФРОБЕНИУСА

Д. В. Гугнин

Понятие n -алгебраического отображения было введено в [1], эквивалентное ему понятие n -гомоморфизма Фробениуса появилось в [2]. Теория развита в [3], [4]. Близкие к n -гомоморфизму понятия – псевдохарактер [5] и псевдопредставление [6]. Далее под алгеброй мы понимаем коммутативную, ассоциативную алгебру с единицей над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Пусть $f: A \rightarrow B$ – линейное отображение алгебр. Для любого натурального k определим полилинейные симметричные отображения $\Phi_k(f): A^k \rightarrow B$. Запишем перестановку $\sigma \in \Sigma_k$ в виде произведения попарно непересекающихся циклов $\gamma_1 \cdots \gamma_r$, включая и циклы длины 1. Положим $f_\gamma(a_1, \dots, a_k) = f(a_{i_1} \cdots a_{i_q})$ для цикла $\gamma = (i_1, \dots, i_q)$ и $f_\sigma = f_{\gamma_1} \cdots f_{\gamma_r}$. Определим $\Phi_k(f)$ формулой:

$$\Phi_k(f)(a_1, \dots, a_k) = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sign}(\sigma) f_\sigma(a_1, \dots, a_k).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Линейное отображение $f: A \rightarrow B$ называется n -гомоморфизмом Фробениуса (кратко, n -гомоморфизмом), если $\Phi_{n+1}(f) \equiv 0$ и $f(1) = n$.

ЗАМЕЧАНИЕ. 1-гомоморфизм – это обычный гомоморфизм алгебр.

Из определения 1 легко следует, что композиция 1-гомоморфизма и n -гомоморфизма в любом порядке дает снова n -гомоморфизм.

ЛЕММА 1. Пусть $f: A \rightarrow B$ – n -гомоморфизм и $\pi: A \rightarrow D$ – эпиморфизм алгебр. Если существует отображение $g: D \rightarrow B$ такое, что $f = g\pi$, то g – однозначно определенный n -гомоморфизм.

Пусть A – алгебра, $L \subset A$ – произвольное собственное подпространство. Введем следующий идеал: $\text{MaxId}(L) = \{a \in A \mid a \cdot x \in L, \forall x \in A\}$. Легко видеть, что он является наибольшим среди всех идеалов, лежащих в L . Пусть $f: A \rightarrow B$ – n -гомоморфизм, $\mathfrak{J}$ – идеал в A , $\mathfrak{J} \subset \ker f$. Тогда $f = g\pi$ в силу леммы 1, где $\pi: A \rightarrow A/\mathfrak{J}$ – каноническая проекция и $g: A/\mathfrak{J} \rightarrow B$ – однозначно определенный n -гомоморфизм.

ТЕОРЕМА 1. Пусть B – алгебра без нильпотентов и $f: A \rightarrow B$ – n -гомоморфизм. Тогда $\text{MaxId}(\ker f) = \{a \in A \mid f(a) = f(a^2) = \dots = f(a^n) = 0\}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ – некоторый n -гомоморфизм. Тогда выполнено неравенство $\text{codim MaxId}(\ker f) \leq n$.

Как показано в [3], сумма n - и m -гомоморфизмов является $(n + m)$ -гомоморфизмом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. n -гомоморфизм f называется *приводимым*, если существует k , $1 \leq k \leq n - 1$, такое, что $f = g + h$, где g и h – k - и $(n - k)$ -гомоморфизмы соответственно, иначе f называется *неприводимым*. В частности, любой 1-гомоморфизм неприводим.

В работе [3] было доказано что любой n -гомоморфизм конечнопорожденной алгебры A в $\mathbb{C}$ однозначно разлагается в сумму 1-гомоморфизмов. С помощью леммы 1 и следствия 1 мы расширяем этот результат на случай произвольной алгебры A .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ – n -гомоморфизм. Тогда существуют и единственны с точностью до перестановок 1-гомоморфизмы $f_1, \dots, f_n: A \rightarrow \mathbb{C}$ такие, что $f = f_1 + \dots + f_n$.

Пусть X, Y – компактные хаусдорфовы пространства. В алгебрах непрерывных комплекснозначных функций $\mathcal{C}(X)$ и $\mathcal{C}(Y)$ рассматриваем sup -норму ($\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$) и соответствующую ей топологию.

ТЕОРЕМА 3. *Любой n -гомоморфизм $F: \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(Y)$ непрерывен и его норма равна n .*

Структура всех непрерывных n -гомоморфизмов $F: \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(Y)$ описана в [7] и имеет следующий вид. Обозначим через $\Phi_n(\mathcal{C}(X), \mathcal{C}(Y))$ множество непрерывных n -гомоморфизмов из $\mathcal{C}(X)$ в $\mathcal{C}(Y)$. Пусть $Sym^n X = X^n / \Sigma_n$ — n -я симметрическая степень пространства X . Точки $Sym^n X$ — это неупорядоченные наборы n точек из X : $[x_1, \dots, x_n] = [x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}]$, $\forall \sigma \in \Sigma_n$. Существует каноническая биекция

$$\Psi: \mathcal{C}(Y, Sym^n X) \rightarrow \Phi_n(\mathcal{C}(X), \mathcal{C}(Y)), \quad [(\Psi G)f]y = f(G_1(y)) + \dots + f(G_n(y)), \\ \forall G \in \mathcal{C}(Y, Sym^n X), \forall f \in \mathcal{C}(X), \forall y \in Y, \quad G(y) = [G_1(y), \dots, G_n(y)] \in Sym^n X.$$

Кроме того, мы показали, что Ψ есть гомеоморфизм, если в $\mathcal{C}(Y, Sym^n X)$ рассматривается компактно-открытая топология, а в $\Phi_n(\mathcal{C}(X), \mathcal{C}(Y)) \subset \mathcal{L}(\mathcal{C}(X), \mathcal{C}(Y))$ топология поточечной сходимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть X и Y — топологические пространства. Скажем, что X *топологически содержит* Y , если в X существует подпространство Z , гомеоморфное Y .

ТЕОРЕМА 4. *Пусть X и Y — компактные хаусдорфовы пространства, X топологически содержит букет трех отрезков, Y топологически содержит окружность. Тогда для любого n существует бесконечно много неприводимых n -гомоморфизмов $F: \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(Y)$.*

В заключение приведем одно построение и вытекающий из него результат. Зафиксируем алгебру A . Введем следующую категорию $\mathcal{F}_n(A)$. Объектами $\mathcal{F}_n(A)$ служат пары (B, f) , где B — алгебра, $f: A \rightarrow B$ — n -гомоморфизм. Морфизм π из (B, f) в (C, g) — это 1-гомоморфизм из B в C такой, что $g = \pi f$. Обозначим через $S^n A$ симметрическую подалгебру в $A^{\otimes n}$. Назовем универсальным n -гомоморфизмом алгебры A отображение $\chi_n(A): A \rightarrow S^n A$, $\chi_n(A)(a) = a \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 + \dots + 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes a$. Следующая лемма по существу содержится в [3] и [4].

ЛЕММА 2. *Пара $(S^n A, \chi_n(A))$ является универсальным отталкивающим объектом в $\mathcal{F}_n(A)$.*

Теорема о композиции n -гомоморфизмов доказана в [7] в предположении, что C — алгебра функций. С помощью леммы 2 мы снимаем это условие.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $f: A \rightarrow B$ — n -гомоморфизм, $g: B \rightarrow C$ — m -гомоморфизм. Тогда $g \circ f: A \rightarrow C$ — nm -гомоморфизм.*

Я хочу поблагодарить моего научного руководителя профессора В. М. Бухштабера за постановку задач, многочисленные полезные обсуждения и постоянное внимание к моей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. М. Бухштабер, Е. Г. Рис // УМН. 1996. Т. 51. № 4. С. 149–150. [2] В. М. Бухштабер, Е. Г. Рис // УМН. 1997. Т. 52. № 2. С. 159–160. [3] V. M. Buchstaber, E. G. Rees // Selecta Math. (N.S.). 2002. V. 8. № 4. P. 523–535. [4] В. М. Бухштабер, Е. Г. Рис // УМН. 2004. Т. 59. № 1. С. 125–144. [5] R. Rouquier // J. Algebra. 1996. V. 180. № 2. P. 571–586. [6] R. L. Taylor // Duke Maths. J. 1991. V. 63. № 2. P. 281–332. [7] V. M. Buchstaber, E. G. Rees. Frobenius n -homomorphisms and branched coverings // www.maths.ed.ac.uk/~elmer.