Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Клементьев, В. М. Петроградский, О росте почти разрешимых алгебр Ли,
УМН, 2005, том 60, выпуск 5, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1646>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:38:37

О РОСТЕ ПОЧТИ РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБР ЛИ

С. Г. КЛЕМЕНТЬЕВ, В. М. ПЕТРОГРАДСКИЙ

Обозначим $\ln^{(1)} n = \ln n$ и $\ln^{(q+1)} n = \ln(\ln^{(q)} n)$, $q = 1, 2, \dots$. Аналогично определяем $\exp^{(k)} x$. Рассмотрим последовательность функций $\Phi_\alpha^q(n)$, $q = 1, 2, \dots$, с параметром $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha^1(n) &= \alpha, & \Phi_\alpha^2(n) &= n^\alpha, \\ \Phi_\alpha^3(n) &= \exp(n^{\alpha/(\alpha+1)}), & \Phi_\alpha^q(n) &= \exp\left(\frac{n}{(\ln^{(q-3)} n)^{1/\alpha}}\right), \quad q = 4, 5, \dots\end{aligned}$$

Рассмотрим алгебру A над полем K , порожденную конечным множеством X . Обозначим через $\gamma_A(X, n)$ размерность пространства, образованного всеми мономами из элементов X длины не более n . Определим (*верхнюю*) *размерность уровня* q , $q = 1, 2, \dots$:

$$\text{Dim}^q A = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}^+ \mid \exists N: \gamma_A(X, n) \leq \Phi_\alpha^q(n), \quad n \geq N\}.$$

Нижняя размерность $\underline{\text{Dim}}^q A$ определяется аналогично. Эти размерности обобщают размерность Гельфанда–Кириллова [1]. Данные размерности были введены для изучения субэкспоненциального роста конечно порожденных разрешимых групп и алгебр Ли [2], [3].

Для алгебры Ли L рассмотрим цепочку *коммутантов*: $L^{(0)} = L$ и $L^{(i+1)} = [L^{(i)}, L^{(i)}]$, $i \geq 0$. Алгебра Ли называется *разрешимой степени* q , если $L^{(q)} = 0$. Рассмотрим класс всех алгебр Ли, разрешимых степени q и порожденных k элементами. В нем существует универсальный объект $F(\mathbf{A}^q, k)$, называемый *свободной разрешимой алгеброй Ли степени* q и *ранга* k [4].

ТЕОРЕМА 1 [2], [3]. Пусть $L = F(\mathbf{A}^q, k)$, где $k \geq 2$, $q \geq 1$. Тогда $\underline{\text{Dim}}^q L = \text{Dim}^q L = k$.

Целью настоящей заметки является следующая субэкспоненциальная верхняя оценка на рост *почти разрешимых* алгебр Ли.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в конечно порожденной алгебре Ли L существует подалгебра $H \subseteq L$ конечной коразмерности, которая разрешима степени q . Тогда $\text{Dim}^{q+1} L \leq \dim_K(L/H)$.

Из теоремы 1 следует точность этой оценки. Далее $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ — функция, аналитическая в единичном круге. Обозначим $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ для $0 \leq r < 1$.

ЛЕММА 1 [5]. Зафиксируем $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\sigma \in [0; \infty]$; обозначим $\kappa(\sigma) = (1 + 1/\alpha)(\sigma\alpha)^{1/(1+\alpha)}$. Тогда $\varlimsup_{r \rightarrow 1-0} (1-r)^\alpha \ln M_f(r) = \sigma \iff \varlimsup_{n \rightarrow \infty} n^{-\alpha/(\alpha+1)} \ln |a_n| = \kappa(\sigma)$.

ЛЕММА 2 [5]. Зафиксируем $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $s \in \mathbb{N}$. Тогда $\varlimsup_{r \rightarrow 1-0} (1-r)^\alpha \ln^{(s+1)} M_f(r) = (\varlimsup_{n \rightarrow \infty} (\ln |a_n| \cdot (\ln^{(s)} n)^{1/\alpha} / n))^\alpha$.

Нас интересуют ряды $\phi(t) = \sum_{n=1}^\infty a_n t^n$ с целыми неотрицательными коэффициентами, аналитические в единичном круге; в этом случае $M_\phi(r) = \phi(r)$. Леммы 3 и 4 описывают действие на таких рядах следующего оператора $\mathcal{E}$: $\phi(t) = \sum_{n=1}^\infty a_n t^n \mapsto \prod_{n=1}^\infty (1-t^n)^{-a_n}$.

ЛЕММА 3 [5]. Пусть $\lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t)^\alpha \phi(t) = A$, где $A > 0$ и $\alpha \geq 1$. Тогда $\lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t)^\alpha \ln \mathcal{E}(\phi(t)) = A\zeta(\alpha+1)$, где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана.

ЛЕММА 4 [5]. Пусть $\lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t)^\alpha \ln^{(q)} \phi(t) = A$, где $A > 0$ и $q \in \mathbb{N}$. Тогда $\lim_{t \rightarrow 1-0} (1-t)^\alpha \ln^{(q+1)} \mathcal{E}(\phi(t)) = A$.

Назовем множество $X = \bigcup_{m=1}^\infty X_m$, где $|X_m| < \infty$, *градуированным*. Расширим наши определения на случай градуированного множества, где элементы X_m имеют *вес* m при вычислении функций роста. Определим $\lambda_A(X, n) = \gamma_A(X, n) - \gamma_A(X, n-1)$ для $n \geq 1$. Определим также ряд Гильберта $\mathcal{H}_X(A, t) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_A(X, n) t^n$. Положим $\mathcal{H}(X, t) = \sum_{n=1}^\infty |X_n| t^n$. Следующий результат — это частный случай следствия 4.1 в [6].

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 04-01-00739), второй автор частично поддержан фондом Гумбольдта.

ТЕОРЕМА 3 [6]. Пусть $L = F(\mathbf{A}^q, Y)$ – свободная разрешимая алгебра Ли степени q , порожденная градуированным множеством Y . Обозначим $g_1(t) = \mathcal{H}(Y, t)$ и $g_i(t) = g_{i-1}(t) + 1 + (\mathcal{H}(Y, t) - 1)\mathcal{E}(g_{i-1}(t))$ для $i = 2, \dots, q$. Тогда $\mathcal{H}_Y(L, t) = g_q(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть L порождена множеством $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$. По условию $\dim_K L/H = N < \infty$ и $H^{(q)} = 0$. Пусть $F = F(X)$ – свободная алгебра Ли, порожденная $X = \{x_1, \dots, x_k\}$. Имеем эпиморфизм $\phi: F \rightarrow L$, $\phi(x_i) = z_i$ для $i = 1, \dots, k$. Обозначим $D = \phi^{-1}(H)$ и $G = \text{Ker } \phi$. Тогда $\dim_K F/D = N$, $F/G \cong L$ и $D^{(q)} \subseteq G$.

Рассмотрим фильтрацию $F^1 \subseteq F^2 \subseteq \dots$, заданную степенью относительно X . Для подпространства $V \subseteq F$ пусть $\text{gr } V = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \text{gr}_n V \subseteq F$ обозначает ассоциированное градуированное пространство. Подалгебра $\text{gr } D \subseteq F$ является свободной по теореме Ширшова–Витта [4]. Пусть $\bar{Y} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{Y}_n$ – однородное свободное порождающее множество для $\text{gr } D$, где $\bar{Y}_n \subset \text{gr}_n F$. Пусть $\mathcal{H}_X(\bar{Y}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{Y}_n| t^n$, тогда имеет место аналог формулы Шрайера [7], [6]:

$$\mathcal{H}_X(\bar{Y}, t) - 1 = (kt - 1) \mathcal{E}(\mathcal{H}_X(F/\text{gr } D, t)), \quad (1)$$

где $\mathcal{H}_X(F/\text{gr } D, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n$ – многочлен, так как $\sum_n c_n = \dim F/\text{gr } D = \dim F/D = N$.

Рассмотрим цепочку $F \supseteq D \supseteq G \supseteq D^{(q)}$. Для роста алгебры L получаем оценку $\gamma_L(Z, n) = \gamma_{F/G}(X, n) = \sum_{j=1}^n \lambda_{F/G}(X, j) = \sum_{j=1}^n \dim \text{gr}_j(F/G) \leq \sum_{j=1}^n \dim \text{gr}_j(F/D) + \sum_{j=1}^n \dim \text{gr}_j(D/D^{(q)}) \leq N + \gamma_{\text{gr}(D/D^{(q)})}(\bar{Y}, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что $\text{gr } D/D^{(q)} \cong F(\mathbf{A}^q, \bar{Y})$. Обозначим $\mathcal{H}(F(\mathbf{A}^q, \bar{Y}), t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n t^n$, пусть $\bar{d}_n = d_1 + \dots + d_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, имеем оценку $\gamma_L(Z, n) \leq N + \bar{d}_n$, $n \in \mathbb{N}$, поэтому достаточно получить искомые оценки для $\bar{d}_n$.

Применим теорему 3 и (1) к алгебре $F(\mathbf{A}^q, \bar{Y})$:

$$g_1(t) = \mathcal{H}_X(\bar{Y}, t) = 1 + (kt - 1) \prod_{n \geq 1} \frac{1}{(1 - t^n)^{c_n}} = \frac{A + o(1)}{(1 - t)^N}, \quad t \rightarrow 1 - 0. \quad (2)$$

Имеем покоэффициентную и обычную оценки

$$g_i(t) \leq g_{i-1}(t) + g_1(t) \cdot \mathcal{E}(g_{i-1}(t)), \quad 0 \leq t < 1; \quad i = 2, \dots, q. \quad (3)$$

Для $i = 2$ применяем лемму 3 к (3) и (2); для $i = 3, \dots, q$ несколько раз применяем лемму 4:

$$g_p(t) = \exp^{(p-1)} \left(\frac{A\zeta(N+1) + o(1)}{(1 - t)^N} \right), \quad t \rightarrow 1 - 0; \quad p = 2, \dots, q. \quad (4)$$

По теореме 3 $\mathcal{H}(F(\mathbf{A}^q, \bar{Y}), t) = g_q(t)$. Получим окончательные оценки в зависимости от q . Случай $q = 1$: из (2) вытекает, что $\bar{d}_n \approx Cn^N$, $n \rightarrow \infty$, для некоторой константы C ; следовательно, $\text{Dim}^2 L \leq N$. Рассмотрим $q = 2$. Из (4) по лемме 1 получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-N/(N+1)} \ln d_n = \kappa(\zeta(N+1)A) = (1 + 1/N)(\zeta(N+1)AN)^{1/(N+1)} = C_0;$$

$$d_n \leq \exp((C_0 + o(1))n^{N/(N+1)}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Такая же оценка имеет место для $\bar{d}_n$. Получаем $\text{Dim}^3 L \leq N$. Аналогично, в случае $q \geq 3$ мы применяем лемму 2 к (4) и получаем $\text{Dim}^{q+1} L \leq N$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. M. Gelfand, A. A. Kirillov // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1966. V. 31. P. 506–523. [2] В. М. Петроградский // УМН. 1993. Т. 48. № 5. С. 181–182. [3] V. M. Petrogradsky // J. Algebra. 1996. V. 179. № 2. P. 459–482. [4] Ю. А. Бахтурин. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985. [5] V. M. Petrogradsky // Internat. J. Algebra Comput. 1999. V. 9. № 2. P. 179–212. [6] V. M. Petrogradsky // Discrete Math. 2002. V. 246. № 1–3. P. 269–284. [7] V. M. Petrogradsky // Arch. Math. 2000. V. 75. P. 16–28.

Ульяновский государственный университет
E-mail: klementyev@hotmail.ru,
petrogradsky@hotmail.ru

Представлено А. В. Михалевым
Принято редколлегией 22.07.2005