Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Крутицкий, В. В. Колыбасова, О смешанной задаче для уравнения Гельмгольца в плоской области с разрезами, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 5, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1647>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 15:09:20

О СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ С РАЗРЕЗАМИ

П. А. Крутицкий, В. В. Колыбасова

На плоскости $x \in \mathbb{R}^2$ рассмотрим многосвязную область, ограниченную простыми разомкнутыми кривыми $\Gamma_1^1, \dots, \Gamma_{N_1}^1 \in C^{2,\lambda}$ и простыми замкнутыми кривыми $\Gamma_1^2, \dots, \Gamma_{N_2}^2 \in C^{2,\lambda}$, $\lambda \in (0, 1]$, так, что кривые не имеют общих точек, в частности, концов. Будем рассматривать как случай внешней области, так и случай внутренней области, когда кривая Γ_1^2 охватывает все остальные. Положим $\Gamma^1 = \bigcup_{n=1}^{N_1} \Gamma_n^1$, $\Gamma^2 = \bigcup_{n=1}^{N_2} \Gamma_n^2$, $\Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2$. Связную область, ограниченную Γ^2 и содержащую Γ^1 , будем называть $\mathcal{D}$, так что $\partial\mathcal{D} = \Gamma^2$, $\Gamma^1 \subset \mathcal{D}$. Предположим, что каждая кривая Γ_n^j параметризована длиной дуги s : $\Gamma_n^j = \{x : x = x(s) = (x_1(s), x_2(s)), s \in [a_n^j, b_n^j]\}$, $n = 1, \dots, N_j$, $j = 1, 2$, так, что $a_1^1 < b_1^1 < \dots < a_{N_1}^1 < b_{N_1}^1 < a_1^2 < b_1^2 < \dots < a_{N_2}^2 < b_{N_2}^2$ и область $\mathcal{D}$ остается справа при возрастании параметра s на Γ_n^2 . Совокупности отрезков оси Os $\bigcup_{n=1}^{N_1} [a_n^1, b_n^1]$, $\bigcup_{n=1}^{N_2} [a_n^2, b_n^2]$ и $\bigcup_{j=1}^2 \bigcup_{n=1}^{N_j} [a_n^j, b_n^j]$ далее также будем обозначать Γ^1 , Γ^2 и Γ соответственно. Положим $C^{j,r}(\Gamma_n^2) = \{\mathcal{F}(s) : \mathcal{F}(s) \in C^{j,r}[a_n^2, b_n^2], \mathcal{F}^{(m)}(a_n^2) = \mathcal{F}^{(m)}(b_n^2), m = 0, j\}$, $j = 0, 1$, $r \in [0, 1]$, и $C^{j,r}(\Gamma^2) = \bigcap_{n=1}^{N_2} C^{j,r}(\Gamma_n^2)$. Пусть $\mathbf{n}_x = (x_2'(s), -x_1'(s))$ – вектор нормали к Γ в точке $x(s)$. Будем рассматривать Γ^1 как совокупность разрезов. Будем говорить, что функция $u(x)$ принадлежит классу гладкости $\mathbf{K}$, если:

- (а) $u \in C^0(\overline{\mathcal{D} \setminus \Gamma^1}) \cap C^2(\mathcal{D} \setminus \Gamma^1)$ и $u(x)$ непрерывна на концах разрезов Γ^1 ;
- (б) $\nabla u \in C^0(\overline{\mathcal{D} \setminus \Gamma^1 \setminus X})$, где X – множество точек, состоящее из концов Γ^1 : $X = \bigcup_{n=1}^{N_1} (x(a_n^1) \cup x(b_n^1))$;
- (в) в окрестности любой точки $x(d) \in X$ для некоторых констант $\mathcal{C} > 0$, $\varepsilon > -1$ выполняется неравенство $|\nabla u| \leq \mathcal{C}|x - x(d)|^\varepsilon$, где $x \rightarrow x(d)$ и $d = a_n^1$ или $d = b_n^1$, $n = 1, \dots, N_1$.

В определении класса $\mathbf{K}$ $u(x)$ и $\nabla u(x)$ непрерывно продолжимы на разрезы $\Gamma^1 \setminus X$ слева и справа, но могут иметь скачок при переходе через $\Gamma^1 \setminus X$.

Задача У. Найти функцию $u(x)$ из класса $\mathbf{K}$, которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца $u_{x_1 x_1}(x) + u_{x_2 x_2}(x) + k^2 u(x) = 0$, $x \in \mathcal{D} \setminus \Gamma^1$, $k = \text{const}$, $\text{Im } k > 0$, и граничным условиям: $(\partial u(x)/\partial \mathbf{n}_x)|_{x(s) \in \Gamma^1} = f_1(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma^1)$, $u(x)|_{x(s) \in \Gamma^2} = f_2(s) \in C^{1,\lambda}(\Gamma^2)$, $\lambda \in (0, 1]$. Если $\mathcal{D}$ – внешняя область, добавим условия на бесконечности: $u = o(|x|^{-1/2})$, $|\nabla u(x)| = o(|x|^{-1/2})$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 1. Если $\Gamma \in C^{2,\lambda}$, $\lambda \in (0, 1]$, то задача **У** имеет не более одного решения.

Будем искать решение задачи **У** в виде

$$u[\mu](x) = \frac{i}{4} \int_{\Gamma^1} \mu(\sigma) V(x, \sigma) d\sigma + \frac{i}{4} \int_{\Gamma^2} \mu(\sigma) \frac{\partial \mathcal{H}_0^{(1)}(k|x - y(\sigma)|)}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma, \quad (1)$$

где $V(x, \sigma) = \int_{a_n^1}^{\sigma} \frac{\partial \mathcal{H}_0^{(1)}(k|x - y(\xi)|)}{\partial \mathbf{n}_y} d\xi$, $\sigma \in [a_n^1, b_n^1]$, $n = 1, \dots, N_1$, $H_0^{(1)}(z)$ – функция

Ханкеля первого рода нулевого порядка. Будем искать $\mu(s)$ в пространстве $C_q^\omega(\Gamma^1) \cap C^{1,\lambda/4}(\Gamma^2)$, $\omega \in (0, 1]$, $q \in [0, 1]$, с нормой $\|\cdot\|_{C_q^\omega(\Gamma^1)} + \|\cdot\|_{C^{1,\lambda/4}(\Gamma^2)}$. Будем говорить, что $\mu(s) \in C_q^\omega(\Gamma^1)$, если $\mu_1(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma^1)$, где $\mu_1(s) = \mu(s) \prod_{n=1}^{N_1} |s - a_n^1|^q |s - b_n^1|^q$, и $\|\mu(\cdot)\|_{C_q^\omega(\Gamma^1)} = \|\mu_1(\cdot)\|_{C^{0,\omega}(\Gamma^1)}$. Кроме того, функция $\mu(s)$ должна удовлетворять условиям

$$\int_{a_n^1}^{b_n^1} \mu(\sigma) d\sigma = 0, \quad n = 1, \dots, N_1. \quad (2)$$

Можно проверить, что если $\mu(s)$ принадлежит пространству $C_q^\omega(\Gamma^1) \cap C^{1,\lambda/4}(\Gamma^2)$, $\omega \in (0, 1]$, $q \in [0, 1]$, и удовлетворяет условиям (2), то функция (1) удовлетворяет всем условиям задачи **U**, кроме граничных условий. Чтобы удовлетворить граничным условиям, подставим в них функцию (1) и получим интегральные уравнения для $\mu(s)$ на Γ^1 и Γ^2 :

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma^1} \frac{\mu(\sigma) d\sigma}{\sigma - s} + \int_{\Gamma} \mu(\sigma) Y_1(s, \sigma) d\sigma = -2f_1(s), \quad s \in \Gamma^1, \quad (3a)$$

$$\mu(s) + \int_{\Gamma} \mu(\sigma) Y_2(s, \sigma) d\sigma = 2f_2(s), \quad s \in \Gamma^2, \quad (3b)$$

где

$$Y_1(s, \sigma) = \left\{ (1 - \delta(\sigma)) \left[\frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin \varphi_0(x(s), y(\sigma))}{|x(s) - y(\sigma)|} - \frac{1}{\sigma - s} \right) - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} V_0(x(s), \sigma) \right] - \frac{i}{2} \delta(\sigma) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \mathcal{H}_0^{(1)}(k|x(s) - y(\sigma)|) \right\} \in C^{0,p_0}(\Gamma^1 \times \Gamma),$$

$p_0 = \lambda$, если $0 < \lambda < 1$, и $p_0 = 1 - \varepsilon_0$ для любого $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, если $\lambda = 1$; $\delta(s) = 0$, если $s \in \Gamma^1$, и $\delta(s) = 1$, если $s \in \Gamma^2$;

$$V_0(x, \sigma) = \int_{a_n^1}^{\sigma} \frac{\partial h(k|x - y(\xi)|)}{\partial \mathbf{n}_y} d\xi, \quad \sigma \in [a_n^1, b_n^1], \quad n = 1, 2, \dots, N_1, \quad h(z) = \mathcal{H}_0^{(1)}(z) - \frac{2i}{\pi} \ln \frac{z}{k};$$

$$Y_2(s, \sigma) = \left\{ \frac{i}{2} (1 - \delta(\sigma)) V(x(s), \sigma) + \frac{i}{2} \delta(\sigma) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \mathcal{H}_0^{(1)}(k|x(s) - y(\sigma)|) \right\} \in C^0(\Gamma^2 \times \Gamma).$$

Через $\varphi_0(x, y)$ обозначен угол между вектором $\overrightarrow{x\bar{y}}$ и направлением нормали $\mathbf{n}_x$. Угол $\varphi_0(x, y)$ считается положительным, если он отложен от $\mathbf{n}_x$ против часовой стрелки, и отрицательным в противном случае. Кроме того, $\varphi_0(x, y)$ непрерывен при $x, y \in \Gamma$, если $x \neq y$.

Учитывая гладкость кривых Γ^2 и функции $f_2(s)$, можно показать, что всякое решение уравнения (3b) в пространстве $C_q^\omega(\Gamma^1) \cap C^0(\Gamma^2)$, $\omega \in (0, 1]$, $q \in [0, 1]$, автоматически принадлежит $C_q^\omega(\Gamma^1) \cap C^{1,\lambda/4}(\Gamma^2)$. Поэтому ниже будем искать решение системы (2), (3) в $C_q^\omega(\Gamma^1) \cap C^0(\Gamma^2)$. С помощью теоремы 1 можно доказать, что однородная система (2), (3) имеет только тривиальное решение в пространстве $C_q^\omega(\Gamma^1) \cap C^0(\Gamma^2)$, $\omega \in (0, 1]$, $q \in [0, 1]$. Используя этот факт и следствие 1 в [1], можно доказать следующую лемму.

ЛЕММА. Если $\Gamma \in C^{2,\lambda}$, $f_1(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma^1)$, $f_2(s) \in C^{1,\lambda}(\Gamma^2)$, $\lambda \in (0, 1]$, то система уравнений (2), (3) имеет решение $\mu(s) \in C_{1/2}^p(\Gamma^1) \cap C^0(\Gamma^2)$, $p = \min\{1/2, \lambda\}$. Это решение системы (2), (3) единственно в пространстве $C_{1/2}^p(\Gamma^1) \cap C^0(\Gamma^2)$.

Согласно сказанному выше, решение системы (2), (3), гарантированное леммой, автоматически принадлежит $C_{1/2}^p(\Gamma^1) \cap C^{1,\lambda/4}(\Gamma^2)$. Из приведенных рассуждений вытекает

ТЕОРЕМА 2. Если $\Gamma \in C^{2,\lambda}$, $f_1(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma^1)$, $f_2(s) \in C^{1,\lambda}(\Gamma^2)$, $\lambda \in (0, 1]$, то решение задачи **U** существует, единственно и дается формулой (1), где $\mu(s)$ – решение системы (2), (3) в $C_{1/2}^p(\Gamma^1) \cap C^0(\Gamma^2)$, $p = \min\{1/2, \lambda\}$, гарантированное леммой.

Решение задачи **U** удовлетворяет неравенству из п. (в) в определении класса **K** с показателем $\varepsilon = -1/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. А. Крутицкий // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 1. С. 17–20.