Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Т. Курдиани, Когомологии Хохшильда и расширения, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 5, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1648>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 06:19:01

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА И РАСШИРЕНИЯ

Р. Т. Курдиани

В данной статье n -я группа когомологий Хохшильда (определение см. в [1]) описывается $(n-2)$ -расширениями (теорема 1). При $n = 2, 3$ теорема совпадает с известными классическими результатами. В случае $n = 1$ мы получаем описание группы дифференцирований при помощи расширений, а при $n \geq 4$ эта теорема дает новое описание групп когомологий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть A – ассоциативная алгебра и M – некоторый A – A -бимодуль. Будем рассматривать A как DG -алгебру, имеющую лишь компоненту в размерности 0 и тривиальный дифференциал. Пусть $s^n M$ – DG -алгебра с тривиальным дифференциалом и тривиальным произведением, причем $(s^n M)_n = M$ и $(s^n M)_i = 0$ при $i \neq n$. Точная последовательность DG -алгебр длины $\leq n$

$$s^n M \xrightarrow{\varepsilon} E \xrightarrow{\pi} A$$

называется n -расширением A с помощью M , если выполнены следующие условия:

- а) $\varepsilon(\pi(e)m) = e\varepsilon(m)$, $\varepsilon(m\pi(e)) = \varepsilon(m)e$ для любых $e \in E$ и $m \in M$;
- б) $\pi(\varepsilon(m)) = 0$ для любого $m \in M$; из этого условия вытекает, что композиция $\text{Cone}(\varepsilon) \xrightarrow{\text{proj}} E \rightarrow A$ является цепным отображением (при $n > 0$ это условие следует само собой);
- в) $\text{Cone}(\varepsilon) \rightarrow A$ является квазиизоморфизмом.

Расширение называется *расщепляемым*, если отображение $\text{Cone}(\text{Cone}(\varepsilon) \rightarrow A)$ допускает стягивание.

При $n = 0$ определенное выше понятие 0-расширения совпадает с хорошо известным понятием расширения ассоциативной алгебры при помощи бимодуля. В явном виде, n -расширение при $n > 0$ представляет собой точную последовательность

$$0 \rightarrow M \rightarrow E_n \rightarrow \dots \rightarrow E_0 \rightarrow A \rightarrow 0, \quad (1)$$

где $E = (E_n \rightarrow \dots \rightarrow E_0)$ – DG -алгебра, отображение $E_0 \rightarrow A$ является отображением ассоциативных алгебр, а отображение $M \rightarrow E_n$ является отображением $E_0 - E_0$ -бимодулей, где структура $E_0 - E_0$ -бимодуля на M индуцирована отображением $E_0 \rightarrow A$. В таких обозначениях расширение является расщепляемым, если точная последовательность (1) стягиваема.

Определение n -расширения имеет смысл также и при $n = -1$. А именно, (-1) -расширение представляет собой диаграмму вида

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{\pi} & A \\ d \downarrow & & \\ M & \xrightarrow{\varepsilon} & E_{-1} \end{array},$$

где $E_0 \rightarrow E_{-1}$ – DG -алгебра, π – отображение ассоциативных алгебр, ε – отображение $E_0 - E_0$ -бимодулей, а отображение $M \oplus E_0 \rightarrow E_{-1} \oplus A$, заданное матрицей $\begin{pmatrix} \varepsilon & d \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$, является изоморфизмом. Из последнего условия вытекает существование отображений $A \rightarrow E_0$ (правого обратного к π) и $E_{-1} \rightarrow M$ (левого обратного к ε). Определим d' как композицию $A \rightarrow E_0 \rightarrow E_{-1} \rightarrow M$. Тогда $d': A \rightarrow M$ – это DG -алгебра (т.е. дифференцирование из A в M) и является ретрактом отображения $E_0 \rightarrow E_{-1}$. Заметим, что любое (-1) -расширение расщепляемо.

Два n -расширения E и E' эквивалентны, если существуют третье расширение F и отображения DG -алгебр $F \rightarrow E$ и $F \rightarrow E'$, индуцирующие тождественные отображения на $s^n M$ и A . Это действительно является отношением эквивалентности на множестве n -расширений A при помощи M . Обозначим через $\text{AlgExt}^n(A, M)$ множество классов эквивалентности расщепляемых n -расширений A при помощи M .

ТЕОРЕМА 2. *Имеется взаимно однозначное соответствие между $\text{AlgExt}^{n-2}(A, M)$ и n -й группой когомологий Хохшильда $H^n(A, M)$.*

При $n = -1$ получаем описание первых когомологий при помощи расширений:

$$H^1(A, M) \cong \text{AlgExt}^{-1}(A, M),$$

которое немного отличается от известного описания при помощи группы дифференцирований.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аналогичный результат верен и для DG -алгебр. Приводимое ниже доказательство с небольшими изменениями проходит и для этого случая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $n = 1$ очевиден, так что предположим, что $n \geq 2$. Доказательство распадается на три шага.

Шаг 1. Данному расширению сопоставим коцикл и докажем, что коциклы, сопоставляемые эквивалентным расширениям, отличаются на кограницу. Пусть $M \rightarrow E \rightarrow A$ – расщепляемое $(n-2)$ -расширение A с помощью M . Нам нужно построить коцикл $f: A^{\otimes n} \rightarrow M$. Для этого мы при помощи индукции по i построим отображения $h_i: A^{\otimes i} \rightarrow E_{i-1}$, $1 \leq i < n$, и $h_n: A^{\otimes n} \rightarrow M$, удовлетворяющие соотношению

$$\begin{aligned} dh_i(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) &= \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} h_{i-1}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{j-1} \otimes a_j a_{j+1} \otimes a_{j+2} \cdots \otimes a_i) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j h_j(a_1 \otimes \cdots \otimes a_j) h_{i-j}(a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_i), \end{aligned}$$

где d представляет собой либо дифференциал в E при $i < n$, либо вложение $M \rightarrow E_{n-2}$ при $i = n$. Тогда h_n – нужный нам коцикл. Легко проверить, что коциклы, сопоставляемые эквивалентным расширениям, представляют один класс когомологий.

Шаг 2. Сопоставим расширению данному коциклу и докажем, что расширения, сопоставляемые коциклам, отличающимся на кограницу, эквивалентны. Пусть $f: A^{\otimes n} \rightarrow M$ – коцикл. Мы должны построить расширение. Рассмотрим омега-бар конструкцию $\Omega B(A)$ для A . Мы имеем отображение $\Omega B(A) \rightarrow A$, однако $\Omega B(A)$ не имеет конечной длины. Чтобы получить DG -алгебру F желаемой длины, можно рассмотреть усеченную алгебру: $F_i = (\Omega B(A))_i$, $i < n-1$, $F_{n-1} = (\Omega B(A))_{n-1} / \text{Im } d_n$, $F_i = 0$, $i > n-1$.

Заметим, что f определяет отображение $F_{n-1} \rightarrow M$. Пусть X обозначает копдел диаграммы $M \leftarrow F_{n-1} \rightarrow F_{n-2}$. Тогда $E = (0 \rightarrow X \rightarrow F_{n-3} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow 0)$ представляет собой DG -алгебру длины $n-2$. Необходимое нам расширение A с помощью M есть E вместе с отображениями $M \rightarrow X$ и $F_0 \rightarrow A$. Легко видеть, что два коцикла, представляющие один класс когомологий, дают эквивалентные расширения.

Шаг 3. Покажем, что соответствия, установленные в предыдущих шагах, обратны друг к другу. Пусть f – коцикл. Ясно, что коцикл, получаемый из расширения $M \rightarrow E \rightarrow A$, которое построено по f , совпадает с f .

Предположим, что $M \rightarrow L \rightarrow A$ – расширение и f – коцикл, полученный из этого расширения. Отображения $h_i: A^{\otimes i} \rightarrow L_{i-1}$ ($1 \leq i \leq n-1$) определяют отображения $\alpha_j: E_j \rightarrow L_j$ ($0 \leq j \leq n-2$). Из определения α следует, что оно является отображением DG -алгебр, индуцирующим тождественные отображения на A и M . Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J.-L. Loday. Cyclic Homology. Berlin: Springer-Verlag, 1998. (Grundlehren Math. Wiss. V. 301.)