Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. К. Лейнартас, М. Пассаре, А. К. Цих, Асимптотика многомерных разностных уравнений, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 5, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1649>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:45:34

АСИМПТОТИКА МНОГОМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е. К. ЛЕЙНАРТАС, М. ПАССАРЕ, А. К. ЦИХ

Пусть $f(x)$ – комплекснозначная функция дискретного аргумента $x \in \mathbb{Z}^n$. На векторном пространстве таких функций рассмотрим n операторов сдвига $\delta_j f(x) = f(x + e_j)$, $j = 1, \dots, n$ (e_j – базисные орты). С помощью набора $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ поставим в соответствие каждому полиномиальному символу $P(x, z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) z^{\alpha}$ с переменными коэффициентами скалярный разностный оператор $P(x, \delta)f(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) f(x + \alpha)$. В работе изучено асимптотическое поведение при $x \rightarrow \infty$ решений систем разностных уравнений

$$P_1(x, \delta)f(x) = \dots = P_n(x, \delta)f(x) = 0, \quad (1)$$

а также скалярных разностных уравнений с постоянными коэффициентами

$$P(\delta)f(x) = 0. \quad (2)$$

Одномерный случай ($n = 1$) был изучен еще в фундаментальной работе Пуанкаре [1]. В частности, было доказано, что если старший коэффициент $a_k(x)$ разностного уравнения порядка k нормирован условием $a_k(x) \equiv 1$, а все остальные коэффициенты имеют конечные пределы при $x \rightarrow \infty$, причем все характеристические корни $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ предельного уравнения различны по модулю, то для любого ненулевого решения $f(x)$ уравнения предел $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x+1)/f(x)$ существует и равен одному из характеристических корней λ_j .

Для формулировки первого многомерного обобщения упомянутого результата Пуанкаре отметим, что возможность нормирования старшего коэффициента уравнения в многомерном случае соответствует условию: проекция $\pi: \{(x, z); P_1(x, z) = \dots = P_n(x, z) = 0\} \rightarrow \mathbb{C}_x^n$ должна быть собственным отображением.

С функцией f ассоциируем вектор $(f(x + e_1)/f(x), \dots, f(x + e_n)/f(x))$, который назовем *вектором Горна* (в честь автора, применившего его в определении общего гипергеометрического ряда).

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что проекция π собственная и что для данного направления $q \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ каждый из коэффициентов системы (1) стремится к конечному пределу при $x \rightarrow \infty$ вдоль любой последовательности вида $\{a + ql; l \in \mathbb{N}\}$, где $a \in \mathbb{Z}^n$ – фиксированные векторы. Если для корней $\lambda_{(1)}, \dots, \lambda_{(k)}$ предельной характеристической системы, соответствующей (1), мономы $\lambda_{(1)}^q, \dots, \lambda_{(k)}^q$ различны по абсолютной величине, то для любого ненулевого решения $f(x)$ системы (1) предел вектора Горна*

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (f(x + e_1)/f(x), \dots, f(x + e_n)/f(x))|_{x=ql}$$

существует и равен одному из характеристических корней $\lambda_{(p)}$ предельной системы.

Доказательство основано на обобщенной теореме Вейерштрасса о делении на идеал в кольце полиномов и на обобщении определителя Вандермонда для корней $\lambda_{(1)}, \dots, \lambda_{(k)}$.

Применительно к уравнению (2) используется понятие амeby (см. [2], [3]) характеристического многочлена $P(z)$, т.е. образ множества нулей $V = \{P(z) = 0\}$ при логарифмическом проектировании $\text{Log}: (z_1, \dots, z_n) \mapsto (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|)$. Будем обозначать амeby через $\mathcal{A}_V$. Дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ состоят из конечного числа связных компонент $\{E\}$, каждая из которых открыта и выпукла [3]. Далее, число компонент $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ не больше числа целых точек многогранника Ньютона N_P [2].

Все три автора были поддержаны шведскими фондами им. Густавсона и Королевской Академии наук. Первый автор также был поддержан грантом Президента РФ НШ-1212.2003.1, а третий автор – грантом РФФИ 02-01-00167.

Нас интересуют экстремальные амебы, для которых в дополнении $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ имеется максимальное число $\#\{\mathbb{Z}^n \cap N_P\}$ связанных компонент. В одномерной ситуации этот случай соответствует тому, что все корни имеют попарно различные модули.

Класс *допустимых* решений уравнения (2), которые мы будем рассматривать, дается интегралами

$$f(x) = \int_{\gamma} z^x \omega(z), \quad x \in \mathbb{Z}^n, \quad (3)$$

где $\omega \in \Omega^{n-1}(V)$ — голоморфные $(n-1)$ -формы на V , а $\gamma - (n-1)$ -циклы на V . Другие решения, как правило, ведут себя хаотически и не поддаются асимптотическому контролю.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что амеба $\mathcal{A}_V$ характеристического множества уравнения (2) имеет гладкую границу и что $V \cap \text{Log}^{-1}(x)$ состоит из одной точки для каждого $x \in \partial \mathcal{A}_V$. Тогда для любого ненулевого допустимого решения (3) и для почти любого направления вектора $q \in \mathbb{Z}P_{n-1}$ по крайней мере один из пределов*

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} (f(x + e_1)/f(x), \dots, f(x + e_n)/f(x))|_{x=kq}$$

существует и равен точке $z \in V$.

Следующее утверждение показывает, что класс двумерных характеристических множеств, удовлетворяющих условию теоремы, составляют *кривые Гарнака* [4].

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $n = 2$. Предположим, что амеба $\mathcal{A}_V$ экстремальная и что граница $\partial \mathcal{A}_V$ гладкая. Тогда $V \cap \text{Log}^{-1}(x)$ состоит из одной точки для каждого $x \in \partial \mathcal{A}_V$. В частности, вещественные алгебраические кривые, у которых амебы экстремальные и с гладкими границами, являются гладкими гарнаковскими кривыми.*

При доказательстве теоремы 2 используется специальная функция Морса на V , равная $|z^q|_V$. Для любого направления q ее критические точки совпадают с прообразом логарифмического отображения Гаусса [5]. Затем показывается, что для почти всех q функция $|z^q|_V$ принимает минимальное значение в единственной точке цикла γ . Поскольку эта функция служит фазой осциллирующего интеграла (3), дело сводится к методу перевала. В доказательстве теоремы 3 применяется известная теорема Пика о связи числа целых точек в многоугольнике и его площади, а также свойства логарифмического отображения Гаусса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Poincaré // Amer. J. Math. 1885. V. 7. P. 203–258. [2] M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh // Adv. Math. 2000. V. 151. № 1. P. 45–70. [3] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky. Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants. Boston: Birkhäuser, 1994. [4] G. Mikhalkin, H. Rullgård // Internat. Math. Res. Notices. 2001. № 9. P. 441–451. [5] M. Passare, A. Tsikh // Contemp. Math. 2005. V. 377. P. 275–288.

Красноярский государственный университет;
Matematiska Institutionen, Stockholms Universitet;
Красноярский государственный университет

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией 22.07.2005

E-mail: lein@mail.ru; passare@math.su.se; tsikh@lan.krasu.ru