Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. В. Найхоф, О. А. Чалых, Биспектральные кольца разностных операторов,
УМН, 1999, том 54, выпуск 3, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm165>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:58:20

БИСПЕКТРАЛЬНЫЕ КОЛЬЦА РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ф. В. Найхоф, О. А. Чалых

Рассмотрим следующий специальный случай алгебро-геометрической процедуры, предложенной И. М. Кричевером [1], которая позволяет строить коммутативные кольца разностных операторов. А именно, мы фиксируем $2N$ комплексных параметров $k_1, \dots, k_N, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ ($\varepsilon_i \neq 0$), а также μ, ω такие, что $q = e^{-\mu\omega} \neq 1$, и пусть $\psi(k, \xi)$ – функция двух комплексных переменных со следующими аналитическими свойствами по k :

- 1) ψ имеет вид $\psi = e^{k\xi} \left(1 + \sum_{i=1}^N \frac{a_i(\xi)}{e^{\mu k} - e^{\mu k_i}} \right)$,
- 2) для любого $i = 1, \dots, N$ $\mu e^{\mu k_i} \operatorname{Res}_{k=k_i} \psi + \varepsilon_i \psi(k_i - \omega) = 0$
(мы предполагаем, что k_i различны и $k_i - k_j \neq \omega$).

Легко показать, что такая функция единственна, и для каждого тригонометрического многочлена p от $e^{\pm \mu k}$ такого, что $p(k_i) = p(k_i - \omega)$ при всех i , существует разностный оператор $\mathcal{L}_p$ по ξ с шагом μ такой, что $\mathcal{L}_p \psi = p(k) \psi$ (см. [1]). Все такие операторы коммутируют, а их коэффициенты рациональны по $e^{\omega \xi}$. Функция ψ является функцией Бейкера–Ахизера, отвечающей в схеме Кричевера рациональной сингулярной кривой с N двойными точками.

Наше первое наблюдение, мотивированное результатами Дж. Уилсона [2], [3], заключается в том, что для параметров k_i, ε_i общего положения такая функция Бейкера–Ахизера удовлетворяет также некоторым разностным уравнениям по k с шагом ω и коэффициентами, рациональными по $e^{\mu k}$. Таким образом, мы получаем биспектральные разностные операторы в смысле Дюстермаата–Грюнбаума [4].

ТЕОРЕМА. Для параметров $k_1, \dots, k_N, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ общего положения функция Бейкера–Ахизера $\psi(k, \xi)$ имеет схожие аналитические свойства по ξ , а именно, существуют $\xi_1, \dots, \xi_N, \nu_1, \dots, \nu_N$ такие, что ψ удовлетворяет условиям 1)–2) после переобозначений $(k, \xi, k_i, \varepsilon_i, \mu, \omega) \rightarrow (\xi, k, \xi_i, \nu_i, \omega, \mu)$.

Простой способ понять соответствие между (ξ_i, ν_i) и (k_i, ε_i) состоит в использовании параметризации ψ парами матриц $X, Z \in \operatorname{GL}_N(\mathbb{C})$ таких, что $\operatorname{rk}(XZ - qZX) = 1$. Последнее условие является естественным q -аналогом матричного соотношения из [3]. Формула для ψ -функции в терминах X, Z выглядит следующим образом:

$$(1) \quad \hat{\psi} = e^{-k\xi} \psi = \det^{-1}(ZX - xZ - zX + zxI) \det(qZX - xZ - zX + zxI).$$

В нашем случае $q = e^{-\mu\omega}$, $z = e^{\mu k}$, $x = e^{\omega \xi}$, $Z = \operatorname{diag}(e^{\mu k_1}, \dots, e^{\mu k_N})$, $X_{ij} = \frac{\varepsilon_i}{e^{\mu k_i} - e^{\mu(k_i - \omega)}}$. Таким образом, аналогично [3], соответствующие $e^{\omega \xi_i}$ являются собственными числами X , а $\nu_1, \dots, \nu_N$ легко находятся из вида матрицы $(XZ - qZX)^t$ в собственном базисе для X^t .

Замечательный факт состоит в том, что соответствие $X, Z \rightarrow \psi$, по-видимому, допускает продолжение на все пары обратимых матриц X, Z с $\operatorname{rk}(XZ - qZX) = 1$. Соответствующий класс ψ -функций, конечно, шире класса функций со свойствами 1)–2). Их аналитические свойства по $z = e^{\mu k}$ могут быть описаны следующим образом.

Пусть δ_λ^r обозначает линейный функционал, вычисляющий значение r -й производной в точке $z = \lambda$: $\delta_\lambda^r(f) = f^{(r)}(\lambda)$, $r \geq 0$. Для данного $\lambda \in \mathbb{C}^*$ рассмотрим линейное пространство C_λ функционалов, являющихся конечными линейными комбинациями вида $c = \sum_{s \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}_+} c_r^s \delta_\lambda^r q^s$ с комплексными коэффициентами c_r^s (здесь и далее мы предполагаем, что q не является корнем из единицы). Теперь выберем любой конечный набор чисел $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$ таких, что $\lambda_i/\lambda_j \neq q^s$ для целых s , и затем для каждого λ_i выберем конечномерное подпространство $W_{\lambda_i} \subset C_{\lambda_i}$ с дополнительным свойством D -инвариантности, $DW_{\lambda_i} \subset W_{\lambda_i}$, где D действует следующим образом:

$D(\delta_\lambda^r) = \frac{r}{\lambda} \delta_\lambda^{r-1}$. С каждым из этих подпространств W_{λ_i} мы связываем многочлен Q_{λ_i} по следующему рецепту: пусть $B(W_{\lambda_i})$ есть множество пар (r, s) , для которых существует элемент $c = \sum c_a^b \delta_{\lambda_i q^b}^a$ из W_{λ_i} с $c_r^s \neq 0$ и с $c_a^b = 0$ для $b < s$ и для $b = s, a > r$. Тогда соответствующий многочлен есть $Q_{\lambda_i}(z) = \prod_{(s,r) \in B(W_{\lambda_i})} (z - \lambda_i q^s)$, заметим, что $\deg Q_{\lambda_i} = \dim W_{\lambda_i}$.

Для любого такого набора данных $W = \{W_{\lambda_i}\}$ рассмотрим соответствующую функцию Бейкера–Ахиезера $\psi_W = \psi_W(n, z)$, $n \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}$, которая имеет следующие свойства по z :

- A) ψ_W имеет вид $\psi_W = z^N (z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N) / Q_W(z)$, где a_i зависят от n , $N = \deg Q_W$ и Q_W есть произведение многочленов, связанных с каждым из W_{λ_i} :
 $Q_W = \prod Q_{\lambda_i}$,
 B) для любого W_{λ_i} $c(Q_W \psi_W)$ есть ноль для всех $c \in W_{\lambda_i}$.

ГИПОТЕЗА. *Класс функций Бейкера–Ахиезера ψ_W , возникающих из всевозможных данных $W = \{W_{\lambda_i}\}$, находится во взаимно однозначном соответствии с парами обратимых матриц X, Z таких, что $\text{rk}(XZ - qZX) = 1$, по модулю GL-действия $(X, Z) \sim (CXC^{-1}, CZC^{-1})$. Это соответствие задается формулой $(X, Z) \rightarrow \psi(n, z) = z^n \hat{\psi}$, где $\hat{\psi}$ определено (1) с $x = q^{-n}$.*

Эта гипотеза, являющаяся q -аналогом основного результата замечательной работы [3], сразу приводит к биспектральности соответствующих колец разностных операторов. Отметим, что роль, которую в [3] играют уравнение КП и система Калоджеро–Мозера, в нашем случае выполняют разностное КП и тригонометрическая система Руженаарса с дискретной динамикой, предложенная в работе [5]. В наших терминах эта динамика выглядит так: $(X, Z) \rightarrow ((Z + qpI)X(Z + pI)^{-1}, Z)$, p – параметр (ср. [5]).

Работа была частично поддержана INTAS (грант № 96-0770) и РФФИ (грант № 99-01-00090). Второй автор благодарен Королевскому Обществу (Великобритания) за поддержку его однодневного визита в Loughborough University(UK), где и была начата эта работа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кричевер И. М. // УМН. 1978. Т. 33. №4. С. 215–216. [2] Wilson G. // J. Reine Angew. Math. 1993. V. 442. P. 177–204. [3] Wilson G. // Invent. Math. 1998. V. 133. №1. P. 1–42. [4] Duistermaat J. J., Grünbaum F. A. // Comm. Math. Phys. 1986. V. 103. P. 177–240. [5] Nijhoff F. W., Ragnisco O., Kuznetsov V. B. // Comm. Math. Phys. 1996. V. 176. P. 681–700.

The University of Leeds, Leeds, UK;
 Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
 23.04.1999