Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Лимаренко, Прimitивные кольца с псевдоинволюцией, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 5, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1650>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:02:12

ПРИМИТИВНЫЕ КОЛЬЦА С ПСЕВДОИНВОЛЮЦИЕЙ

С. В. ЛИМАРЕНКО

Понятие псевдоинволюции является расширением понятия обычной инволюции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Псевдоинволюцией в кольце R называется пара $(\bar{}, \lambda)$, где λ — обратимый элемент кольца, а $x \mapsto \bar{x}$ — антиизоморфизм кольца такой, что $\bar{\bar{x}} = \lambda a \bar{\lambda}$.

Если λ принадлежит центру кольца, то мы получаем определение обычной инволюции. Элемент λ мы будем называть параметром псевдоинволюции, а саму псевдоинволюцию с таким параметром будем называть λ -инволюцией. Из определения следует, что $\bar{\bar{\lambda}} = \lambda^{-1}$. Заметим, что параметр псевдоинволюции определен с точностью до множителя s из центра кольца такого, что $s\bar{s} = 1$. Если в кольце есть обычная инволюция $*$, а μ — произвольный обратимый элемент кольца, то отображение, действующее в кольце по правилу $r \mapsto \mu^{-1}r^*\mu$, будет псевдоинволюцией с параметром $\mu^{-1}\mu^*$. Схожим образом из псевдоинволюции можно получить другую псевдоинволюцию, а именно, если $(\bar{}, \lambda)$ — псевдоинволюция, то отображение, заданное по правилу $r \mapsto \mu^{-1}\bar{r}\mu$, где μ — по-прежнему произвольный обратимый элемент кольца, является псевдоинволюцией с параметром $\mu^{-1}\bar{\mu}\lambda$. Две псевдоинволюции, связанные таким образом, мы будем называть сопряженными друг другу. Это соотношение есть эквивалентность на множестве всех псевдоинволюций фиксированного кольца. Отображение, обратное к псевдоинволюции, также в свою очередь является псевдоинволюцией, более того, эти две псевдоинволюции сопряжены и их параметры могут быть выбраны взаимно обратными. Из псевдоинволюции $(\bar{}, \lambda)$ посредством сопряжений на всевозможные обратимые элементы кольца могут быть получены псевдоинволюции с параметрами из множества $\{s^{-1}\bar{s}\lambda \mid s \text{ — обратимый элемент кольца } R\}$. Это множество замкнуто относительно псевдоинволюции $\bar{}$ и взятия обратного, т.е. с каждым своим элементом x оно содержит элементы $\bar{x}$ и x^{-1} . Так, например, псевдоинволюции, сопряженные с обычной инволюцией $*$, имеют параметры вида $s^*\bar{s}$, где s — по-прежнему произвольный обратимый элемент кольца.

Обратимся теперь к случаю примитивных колец. Для полноты изложения напомним основы классической теории.

ТЕОРЕМА 1. Пусть R — полупервичное кольцо. Если I — минимальный правый идеал, то $I = eR$ для некоторого идемпотента $e = e^2 \neq 0$, а eRe является телом. Более того, Re является в свою очередь минимальным левым идеалом. Обратно, если существует идемпотент $e = e^2 \neq 0$ такой, что eRe является телом, то $I = eR$ — минимальный правый идеал, а $J = Re$ — минимальный левый идеал.

Идемпотент e такой, что eR является минимальным правым идеалом, мы будем называть примитивным (минимальным).

Доказательство этой теоремы можно найти в монографии [1]. Далее нам понадобится понятие внутреннего произведения, а также понятие дуальных пространств над телом. Здесь мы будем следовать терминологии Херстейна (см. [1]).

Пусть D — тело, ${}_D V$ — левое пространство над D , а W_D — правое пространство над D . Будем называть отображение $(\cdot, \cdot): V \times W \rightarrow D$ внутренним произведением между V и W , если оно аддитивно по каждому компоненту, а также для всех $v \in V$, $w \in W$ и $d \in D$ выполняются равенства $(dv, w) = d(v, w)$ и $(v, wd) = (v, w)d$.

Пространства ${}_D V$ и W_D называются дуальными, если, дополнительно, равенство $(v, W) = 0$ влечет $v = 0$, а $(V, w) = 0$ влечет $w = 0$. Далее, рассмотрим множества линейных преобразований на пространствах V и W . Обозначим их соответственно $A(V)$ и $A(W)$. Для удобства положим, что они действуют с противоположной стороны от элементов тела D , т.е. элементы $A(V)$ действуют справа, а элементы $A(W)$ — слева. Пусть $a \in A(V)$, тогда элемент $a^* \in A(W)$ называется сопряженным к a , если $(va, w) = (v, a^*w)$ для всех $v \in V$ и $w \in W$. Напомним, что в общем случае не все линейные преобразования обладают сопряженными. Те линейные преобразования,

которые все же обладают сопряженными, принято называть непрерывными. Более того, сопряженное преобразование единственно для каждого непрерывного преобразования. Непрерывные преобразования образуют подкольцо в кольце всех линейных преобразований. Обозначим это подкольцо через $L_W(V) \subseteq A(V)$. Будем также обозначать конечномерные непрерывные преобразования через $S_W(V)$. Пусть теперь тело D обладает некоторой (обычной) инволюцией $*$. Пусть также в нашем распоряжении только одно (левое) линейное пространство ${}_D V$. Пусть это пространство самодуально, т.е. существует невырожденное внутреннее произведение на V . В частности, для любых элементов $v, w \in V$ и $d \in D$ имеют место следующие два тождества $(dv, w) = d(v, w)$ и $(v, dw) = (v, w)d^*$.

В таком случае среди всех внутренних произведений можно выделить так называемые эрмитовы, т.е. те, которые удовлетворяют условию $(v, w) = (w, v)^*$. В классической теории известен следующий факт.

ТЕОРЕМА 2. Пусть R – примитивное кольцо с инволюцией, обладающее минимальным правым идеалом. Пусть существует примитивный (минимальный) идемпотент e такой, что $e^* = e$ (в таком случае элемент e называется симметричным относительно инволюции). Тогда существует самодуальное относительно эрмитова произведения $(\cdot, \cdot)$ пространство V над телом D такое, что

- 1) $S_V(V) \subseteq R \subseteq L_V(V)$,
- 2) элементы r и r^* кольца R сопряжены относительно $(\cdot, \cdot)$ как преобразования на V .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для доказательства теоремы в качестве тела D следует взять eRe , в качестве $V = eR$. Тогда оказывается, что D замкнуто относительно инволюции в R , т.е. сужение этой инволюции с кольца R на D также является инволюцией. А внутреннее произведение на V задается по правилу $(v, w) = vw^*$.

Наша цель – получить аналогичное утверждение для примитивных колец с псевдоинволюцией. Пусть пространство V над телом D самодуально относительно двух различных внутренних произведений $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $[\cdot, \cdot]$. Пусть также тело D обладает некоторой инволюцией $*$. Будем называть эти внутренние произведения взаимно эрмитовыми, если $[v, w] = \langle w, v \rangle^*$ и $\langle v, w \rangle = [w, v]^*$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть R – примитивное кольцо с псевдоинволюцией $(\bar{\cdot}, \lambda)$ и обладающее минимальным правым идеалом. Пусть существует примитивный (минимальный) идемпотент e такой, что $\bar{e} = e\lambda$ (в таком случае элемент e называется симметричным относительно псевдоинволюции). Тогда существует самодуальное относительно двух взаимно эрмитовых произведений $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $[\cdot, \cdot]$ пространство V над телом D с некоторой инволюцией $*$ такое, что

- 1) $S_V(V) \subseteq R \subseteq L_V(V)$,
- 2) элементы r и $\bar{r}$ кольца R сопряжены в следующем смысле: $\langle v\bar{r}, w \rangle = \langle v, wr \rangle$, $[vr, w] = [v, w\bar{r}]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. N. Herstein. Rings with Involution. Chicago: Univ. of Chicago Press, 1976.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: sergei@limarenko.mccme.ru,
sergei_limarenko@mail.ru

Представлено А. В. Михалевым
Принято редколлегией 22.07.2005