Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Марихин, В. В. Соколов, О квазиштеккелевых гамильтонианах, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 5, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1651>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:14:06

О КВАЗИШТЕККЕЛЕВЫХ ГАМИЛЬТониАНАХ

В. Г. МАРИХИН, В. В. СОКОЛОВ

Мы рассматриваем задачу (см. [1]–[5]) описания пар гамильтонианов

$$H = ap_1^2 + cp_2^2 + dp_1 + ep_2 + f, \quad K = Ap_1^2 + Cp_2^2 + Dp_1 + Ep_2 + F, \quad (1)$$

которые коммутируют относительно стандартных скобок Пуассона $\{p_\alpha, q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$. Здесь коэффициенты – некоторые аналитические функции переменных q_1, q_2 .

ТЕОРЕМА 1. Любая пара коммутирующих гамильтонианов (1) приводится каноническим преобразованием, линейным по моментам к паре вида

$$H = \frac{U_1 - U_2}{q_1 - q_2}, \quad K = \frac{q_2 U_1 - q_1 U_2}{q_1 - q_2}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= S_1(q_1)p_1^2 + \frac{\sqrt{S_1(q_1)S_2(q_2)}Z_{q_1}}{(q_1 - q_2)}p_2 - \frac{S_1(q_1)Z_{q_1}^2}{4(q_1 - q_2)^2} + V_1(q_1, q_2), \\ U_2 &= S_2(q_2)p_2^2 - \frac{\sqrt{S_1(q_1)S_2(q_2)}Z_{q_2}}{q_1 - q_2}p_1 - \frac{S_2(q_2)Z_{q_2}^2}{4(q_2 - q_1)^2} + V_2(q_1, q_2), \end{aligned} \quad (3)$$

и

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{S_1(q_1)}\partial_{q_1}\left(\sqrt{S_1(q_1)}\frac{Z_{q_1}^2}{q_1 - q_2}\right) + f_1(q_1), \\ V_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{S_2(q_2)}\partial_{q_2}\left(\sqrt{S_2(q_2)}\frac{Z_{q_2}^2}{q_2 - q_1}\right) + f_2(q_2) \end{aligned} \quad (4)$$

для некоторых функций $Z(q_1, q_2)$, $S_i(q_i)$ и $f_i(q_i)$. Скобка Пуассона $\{H, K\}$ равна нулю тогда и только тогда, когда

$$Z_{q_1, q_2} = \frac{Z_{q_1} - Z_{q_2}}{2(q_2 - q_1)} \quad (5)$$

и

$$\left(Z_{q_1}\frac{\partial}{\partial q_2} - Z_{q_2}\frac{\partial}{\partial q_1}\right)\left(\frac{V_1 - V_2}{q_1 - q_2}\right) = 0. \quad (6)$$

Мы будем называть гамильтонианы, описанные в теореме 1, *квазиштеккелевыми*. Некоторые примеры квазиштеккелевых гамильтонианов могут быть извлечены из [1]–[5]. Если $Z(q_1, q_2) \equiv \text{const}$, то гамильтонианы H и K принадлежат штеккелеву классу интегрируемых гамильтонианов. Формулы, похожие на (2), (3), были получены в [4], [5]. Наш новый результат здесь – формула (4) для функций V_i . Кроме того, мы используем другую, по сравнению с [3], [4], потенциальную функцию Z , что позволяет переписать дополнительную связь для линейного уравнения Эйлера–Дарбу (5) в более элегантном виде (6).

ПРИМЕР 1. В работах [3], [6] найдено следующее решение системы (5), (6): $Z(x, y) = x + y$, $S_1(x) = S_2(x) = \sum_{i=0}^6 c_i x^i$, $f_1(x) = f_2(x) = -\frac{3}{4}c_6 x^4 - \frac{1}{2}c_5 x^3 + \sum_{i=0}^2 k_i x^i$, где c_i, k_i – произвольные постоянные. Оказалось, что волчок Клебша и $so(4)$ -волчок Шоттки–Манакова являются частными случаями этой модели.

Коэффициенты уравнения Эйлера–Дарбу (5) имеют сингулярность на линии $x = y$, где $x = q_1, y = q_2$. Общее решение уравнения Эйлера–Дарбу (5) имеет следующее разложение: $Z(x, y) = A + \log(x - y)B$, $A = \sum_{i=0}^\infty a_i(x + y)(x - y)^{2i}$, $B = \sum_{i=0}^\infty b_i(x + y)(x - y)^{2i}$. В этой формуле a_0 и a_1 – произвольные функции. Подставляя этот ряд в (6), немедленно получаем, что $B = 0$.

ЛЕММА 1. *Всякое решение уравнения (5) с $B = 0$ задается формулой*

$$Z(x, y) = z_0 + \delta(x + y) + (x - y)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(2k)}(x + y)}{2^{(2k)} k! (k + 1)!} (x - y)^{2k},$$

где $g(x)$ – произвольная функция и z_0, δ – произвольные постоянные.

Будем называть функцию $g(x)$ *производящей функцией* для (7). Опишем в замкнутом виде все функции Z , соответствующие рациональным производящим функциям g . Выбирая $g(x) = x^n$, получаем бесконечную последовательность полиномиальных решений $Z^{(n)}$ для (5). В частности, $g(x) = 1 \iff Z^{(0)}(x, y) = (x - y)^2$. Вся последовательность может быть построена с помощью “рождающего” оператора $x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}(x + y)$, действующего на Z_0 . Рациональные функции $g(x) = (x - \mu)^{-n}$ порождают еще один класс точных решений уравнения (5). Например, имеем $g_\mu(x) = -\frac{1}{8} \frac{1}{x - \mu} \iff Z_\mu(x, y) = \sqrt{(x - \mu)(y - \mu)} - \frac{1}{2}(x + y) + \mu$. Решение, соответствующее полюсу порядка $n \geq 2$, может быть получено дифференцированием последней формулы по параметру μ . Таким образом, мы построили решение Z с произвольной рациональной производящей функцией $g(x) = \sum_i c_i x^i + \sum_{i,j} d_{ij} (x - \mu_i)^{-j}$.

ГИПОТЕЗА 1. *Для любого квазиштекелева гамильтониана (2)–(6) производящая функция рациональна.*

Гамильтониан (2)–(6) назовем *несимметрическим*, если $S_1(x) \neq S_2(x)$, или $f_1(x) \neq f_2(x)$. Нетрудно проверить, что для любого квазиштекелева несимметрического гамильтониана параметр δ в (7) равен нулю.

ТЕОРЕМА 2. *В несимметрическом случае функции Z, S_i, f_i удовлетворяют (5), (6), если и только если $g = \frac{1}{H}$, $S_{1,2} = WH \pm aMH^{3/2}$, $f_{1,2} = -\frac{4W}{H} \mp 2aMH^{-1/2} \pm bH^{1/2}$, где g – порождающая функция для Z , $W(x) = w_3x^3 + w_2x^2 + w_1x + w_0$, $H(x) = h_2x^2 + h_1x + h_0$, $M(x) = m_2x^2 + m_1x + m_0$. Здесь w_i, h_i, m_i, a, b – произвольные постоянные.*

Рассмотрим теперь симметрический случай $S_1 = S_2, f_1 = f_2$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\delta = 0$. Тогда в симметрическом случае функции $Z, S = S_1, f = f_1$ удовлетворяют (5), (6), если и только если $g = \frac{G}{S}$, $f = -\frac{4G^2}{S}$, где $S(x) = s_5x^5 + s_4x^4 + s_3x^3 + s_2x^2 + s_1x + s_0$, $G(x) = g_3x^3 + g_2x^2 + g_1x + g_0$. Здесь s_i, g_i – произвольные постоянные.*

Теоремы 2 и 3 доказываются подстановкой ряда (7) в (6), приравниванием коэффициентов при разных степенях $x - y$ и анализом полученной переопределенной системы дифференциальных уравнений относительно функций g, S_i, f_i . Для того чтобы закончить классификацию квазиштекелевых гамильтонианов, остается исследовать симметрический случай с $\delta \neq 0$ (см., например, пример 1). Это будет сделано в отдельной статье.

Авторы благодарны F. Magri и Е. В. Ферапонтову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Dorizzi, B. Grammaticos, A. Ramani, P. Winternitz // J. Math. Phys. 1985. V. 26. № 12. P. 3070–3079. [2] E. McSween, P. Winternitz // J. Math. Phys. 2000. V. 41. № 5. P. 2957–2967. [3] H. M. Yehia // J. Phys. A. 1992. V. 25. № 1. P. 197–221. [4] E. V. Ferapontov, A. P. Fordy // Phys. D. 1997. V. 108. № 4. P. 350–364. [5] E. V. Ferapontov, A. P. Fordy // Rep. Math. Phys. 1999. V. 44. № 1–2. P. 71–80. [6] V. G. Marikhin, V. V. Sokolov // Regul. Chaotic Dyn. 2005. V. 10. № 1. P. 59–70.

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН
E-mail: mvg@itp.ac.ru;
vsokolov@landau.ac.ru

Представлено С. П. Новиковым
Принято редколлегией 22.07.2005