Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Маркова, О длине алгебры верхнетреугольных матриц, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 5, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1653>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:16:48

О ДЛИНЕ АЛГЕБРЫ ВЕРХНЕТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

О. В. МАРКОВА

Задача вычисления длины полной матричной алгебры как функции порядка матриц была впервые поставлена в [1] и до сих пор не решена. В данной работе доказано, что длина алгебры верхнетреугольных матриц порядка n и некоторых ее подалгебр специального вида равняется $n - 1$, получены точные верхняя и нижняя оценки длины прямой суммы конечномерных алгебр и верхняя и нижняя оценки длины блочно-треугольных матричных подалгебр.

Пусть даны конечномерная алгебра A над произвольным полем F и S – конечная система порождающих этой алгебры. Дадим определение длины данной системы порождающих и длины всей алгебры (см., например, [2]):

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Длиной конечной системы порождающих S для конечномерной алгебры A называется наименьшее неотрицательное целое число k такое, что слова от элементов S длины, не превосходящей k , порождают A как векторное пространство. Далее будем обозначать ее $l(S)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Длиной алгебры A называется $l(A) = \max_S l(S)$, где максимум берется по всем конечным системам порождающих этой алгебры.

Пусть далее $T_n(F)$ обозначает алгебру верхнетреугольных матриц порядка n над полем F , E – единичную матрицу, E_{ij} – матричную единицу.

ТЕОРЕМА 1. Пусть F – произвольное поле. Тогда $l(T_n(F)) = n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A_k = (a_{ij}^k) \in T_n(F)$, $k = 1, \dots, n$. Тогда

$$\prod_{i=1}^n (A_i - a_{ii}^i E) = 0. \quad (1)$$

Следовательно, произведение $A_1 A_2 \dots A_n$ можно представить в виде линейной комбинации произведений матриц A_j , число сомножителей в которых меньше n , т.е. $l(T_n(F)) \leq n - 1$. Рассмотрим следующую систему порождающих для $T_n(F)$:

$$S = \{E_{nn}, E_{ii}, E_{i,i+1}, i = 1, \dots, n - 1\}.$$

Так как $E_{1n} = E_{12} E_{23} \dots E_{n-1,n}$ не может быть представлена как произведение меньшего, чем $n - 1$, числа элементов S , то $l(S) = n - 1$. Следовательно, $l(T_n(F)) \geq n - 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $J \subseteq \{1, \dots, n\}$. Через $A(J)$ обозначим подалгебру $T_n(F)$, состоящую из матриц вида $\sum_{j \in J} a_{jj} E_{jj} + \sum_{i,k=1, i < k}^n a_{ik} E_{ik}$. Тогда длина $A(J)$ равна $n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если $J = \{1, \dots, n\}$, то $A(J)$ совпадает с $T_n(F)$, и по доказанному выше $l(A(J)) = n - 1$. Пусть $J \subset \{1, \dots, n\}$ и $A_k = (a_{ij}^k) \in A(J)$, $k = 1, \dots, n$. Очевидно, что единичная матрица не является элементом $A(J)$, поэтому в данном случае требуется доказать, что произведение $A_1 A_2 \dots A_n$ можно представить в виде линейной комбинации произведений длины от 1 до n . Это следует из равенства (1) и того, что $A_j - a_{jj}^j E = A_j$ для $j \notin J$. Значит, $l(A(J)) \leq n - 1$. Система порождающих, на которой эта оценка достигается, такова: $S = \{E_{i,i+1}, i = 1, \dots, n - 1\} \cup \{E_{jj}, j \in J\}$.

Перейдем к рассмотрению блочно-треугольного случая. Пусть A и B – конечномерные алгебры над одним полем F . Через $A \oplus B$ обозначим алгебру, элементами которой являются пары (a, b) , $a \in A$, $b \in B$, с покомпонентными сложением, умножением на числа и умножением.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A и B – конечномерные алгебры над полем F с длинами $l(A)$ и $l(B)$ соответственно. Тогда выполнено следующее неравенство:

$$\max\{l(A), l(B)\} \leq l(A \oplus B) \leq l(A) + l(B) + 1. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $p = l(A)$, $q = l(B)$. Для того чтобы доказать нижнюю оценку, возьмем системы порождающих $\{a_1, \dots, a_k\}$ и $\{b_1, \dots, b_m\}$ для A и B с длинами p и q соответственно. Тогда множество $\{(a_1, 0), \dots, (a_k, 0), (0, b_1), \dots, (0, b_m)\}$ будет системой порождающих в $A \oplus B$ длины $\max\{p, q\}$.

Возьмем в $A \oplus B$ произвольную систему порождающих $C = \{(c_1, d_1), \dots, (c_n, d_n)\}$ и докажем, что всякое слово от элементов C длины $p + q + 2$ сократимо. Обозначим $N = p + q + 2$. Пусть $v = (c_{i_1}, d_{i_1}) \dots (c_{i_N}, d_{i_N}) = (c_{i_1} \dots c_{i_N}, d_{i_1} \dots d_{i_N})$, $i_j \in \{1, \dots, n\}$, $j = 1, \dots, N$. Так как длина алгебры A равна p , то слово $c_{i_1} \dots c_{i_{p+1}}$ сократимо, т.е. $c_{i_1} \dots c_{i_{p+1}} = \alpha_1 c_{i_1} \dots c_{i_p} + \dots + \alpha_{M-1} c_n + \alpha_M 1_A$. Так как длина алгебры B равна q , то слово $d_{i_{p+2}} \dots d_{i_N}$ сократимо, т.е. $d_{i_{p+2}} \dots d_{i_N} = \beta_1 d_{i_{p+2}} \dots d_{i_{N-1}} + \dots + \beta_{K-1} d_n + \beta_K 1_B$. Подставляя выражения для $c_{i_1} \dots c_{i_{p+1}}$ и $d_{i_{p+2}} \dots d_{i_N}$ в v , получим, что слово v представляется в виде линейной комбинации слов меньшей длины. Так как v было выбрано произвольно, то $l(A \oplus B) \leq p + q + 1$.

Следующие примеры показывают, что оценки (2) являются точными.

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathbb{R}$ – поле действительных чисел, $A = T_n(\mathbb{R})$, $B = T_m(\mathbb{R})$. По теореме 1 $l(A) = n - 1$, $l(B) = m - 1$. Непосредственная проверка показывает, что $l(A \oplus B) = n + m - 1 = (n - 1) + (m - 1) + 1 = l(A) + l(B) + 1$, что доказывает точность верхней оценки в (2).

ПРИМЕР 2. Пусть $NT_n(F)$ обозначает алгебру верхних нильтреугольных матриц порядка n над полем F . Пусть $A = NT_n(F)$, $B = NT_m(F)$. Из следствия 1 имеем $l(A) = n - 1$, $l(B) = m - 1$. Непосредственная проверка показывает, что $l(A \oplus B) = \max\{n - 1, m - 1\} = \max\{l(A), l(B)\}$. Следовательно, нижняя оценка в (2) точна.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $A_1, \dots, A_k$ – конечномерные алгебры над полем F с длинами $l_1, \dots, l_k$ соответственно. Обозначим $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$. Тогда выполнено следующее неравенство:

$$\max\{l_1, \dots, l_k\} \leq l(A) \leq \sum_{j=1}^k l_j + k - 1. \quad (3)$$

Следующие примеры показывают, что оценки (3) точны.

ПРИМЕР 3. Пусть $D_n(F)$ – алгебра диагональных матриц порядка n над полем F . Тогда если в поле F найдется n различных элементов, то по следствию из теоремы Гамильтона–Кэли $l(D_n(F)) = n - 1$. Очевидно, что $D_n(F) \cong F \oplus \dots \oplus F$, где в прямой сумме берется n экземпляров F . Если $F = \mathbb{R}$ – поле действительных чисел, то $l(D_n(\mathbb{R})) = n - 1 = \sum_{j=1}^n l(\mathbb{R}) + n - 1$. Следовательно, верхняя оценка в (3) точна.

ПРИМЕР 4. Возьмем $A_i = NT_{n_i}(F)$, $i = 1, \dots, k$. Тогда, как и в примере 2, получаем, что нижняя оценка в (3) точна.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть A – подалгебра блочно-диагональных или блочно-треугольных матриц, у которой на диагонали стоит k блоков с длинами $l_1, \dots, l_k$ соответственно. Тогда для $l(A)$ выполнено неравенство (3).

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А. Э. Гутерману за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Paz // Linear and Multilinear Algebra. 1984. V. 15. P. 161–170. [2] C. J. Rappasena // J. Algebra. 1997. V. 197. № 2. P. 535–545.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Представлено А. В. Михалевым
Принято редколлегией 22.07.2005