Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Т. Садэтов, Симплектическая структура на орбитах коприсоединенного представления – дифференциал рациональной 1-формы, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 5, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1654>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 13:37:57

**СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА НА ОРБИТАХ
КОПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ –
ДИФФЕРЕНЦИАЛ РАЦИОНАЛЬНОЙ 1-ФОРМЫ**

С. Т. Садэтов

1. Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная алгебра Ли над полем характеристики 0, $\mathfrak{g}^*$ – сопряженное пространство. Для точки $\xi \in \mathfrak{g}^*$, элементов $\Xi, \Upsilon \in \mathfrak{g}$ и ковекторов $u = \text{ad}_{\Xi}^* \xi, v = \text{ad}_{\Upsilon}^* \xi$ определяется форма Кириллова–Березина–Костанта–Сурьо [1] $\omega_{\xi}(u, v) = \langle \xi, [\Xi, \Upsilon] \rangle$. На орбитах O^* коприсоединенного представления группы Ли G алгебры Ли $\mathfrak{g}$ она является симплектической структурой, см. [2; § 14.3], [3; § 15.4]. Многие уравнения механики гамильтоновы относительно нее. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ – алгебраическая. Пусть $M \subseteq \mathfrak{g}^*$ – произвольное неприводимое Ad^* -инвариантное алгебраическое подмногообразие. Следующее утверждение использовано автором в [4].

ТЕОРЕМА. *На подмногообразии M существует такая рациональная 1-форма μ , что в ограничении на произвольную орбиту $O^* \subseteq M$ выполнено $\omega = d\mu$.*

ПРИМЕР. Если x, y, z – ортонормированный относительно формы Киллинга базис алгебры Ли $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ и $x = r \cos \theta \cos \varphi, y = r \cos \theta \sin \varphi, z = r \sin \theta$, где $r \geq 0, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, то $\omega = r \cos \theta d\theta \wedge d\varphi = dz \wedge d \arctg \frac{y}{x}$ – деленная на r форма площади на стандартной сфере радиуса $r > 0$ и может быть выбрано $\mu = r \sin \theta d\varphi = z \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.

Теорема и пример свидетельствуют в пользу того, что уравнения Эйлера–Пуанкаре на алгебрах Ли, см. [2], могут оказаться глобально лагранжевыми в подходящих координатах. Ср. с тем, что в [5] рассмотрена алгебра Ли $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ и уравнения Кирхгофа на орбите коприсоединенного представления общего положения представлены в виде системы на двумерной сфере, лагранжевой с “монополем Дирака”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРИМЕРА. Присоединенное представление Ad сохраняет форму Киллинга. Ее уровень в $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})^*$ – стандартная сфера $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}$. Если отождествить $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ и $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})^*$ с помощью формы Киллинга и взять $|\xi| = r$ и пару u, v ортогональных единичных векторов из $T_{\xi}O^*$, то может быть выбрано $\Xi = \pm \frac{v}{r}, \Upsilon = \pm \frac{u}{r}$ для некоторой пары знаков. Тогда $\langle \xi, [\Xi, \Upsilon] \rangle = \pm r^{-2} \langle \xi, [v, u] \rangle = \pm r^{-1}$.

Не ограничивая общности, предположим, что k – подполе поля коэффициентов $\mathbb{C}$, и заменим $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g} \otimes_k \mathbb{C}$.

Доказательство теоремы основано на некоммутативной симплектической редукции, см. [6; дополнение 5A], [2; § 13.1–3], [3; § 15.3]. А именно, рассматривается соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{g}$ связная алгебраическая группа G . Рассматриваются левое и правое действия группы G на кокасательном расслоении T^*G и их отображения моментов $\mu_l, \mu_r: T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*$, см. [6; дополнение 5], эквивариантные и пуассоновские, см. также [2; § 12.4]. Из коммутативности действий легко следует, что орбита левого действия является уровнем отображения момента правого действия: $\mu_r = \xi$. Пусть $\text{St}_{\xi} \subset G$ – стабилизатор точки ξ при индуцированном представлении Ad^* группы G на $\mathfrak{g}^*$. Фактормногообразие орбиты левого действия $\mu_r = \xi$ по правому действию подгруппы St_{ξ} является симплектическим и изоморфно орбите O_{ξ}^* коприсоединенного представления группы G , проходящей через точку ξ , см. [2; § 14.3], [3; § 15.4]. Рассматривается расслоение орбиты левого действия группы по правому действию подгруппы и рациональное квазисечение S этого расслоения, см. [7; § 2.5]. Пусть ν и Ω – канонические 1-форма и симплектическая структура на T^*G . Ограничение условия $\Omega = d\nu$ на орбиту левого действия допускает дополнительное ограничение на квазисечение S . Поэтому ограничение ω на орбиту $O^* \omega|_{TO^*}$ является дифференциалом алгебраической 1-формы – образа 1-формы ν при накрытии $S \rightarrow O^*$. Аддитивно усредняя алгебраическую 1-форму по ветвям над O^* , получаем рациональную 1-форму с тем же дифференциалом.

2. Доказательство теоремы. Пусть ν – каноническая 1-форма на T^*G , см. [6; § 37B], порождающая каноническую симплектическую структуру $d\nu$. Тогда $\nu = \langle x, dg \rangle$, где $g \in G$,

$x \in T_g^*G$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – спаривание T_g^*G и T_gG . Пусть $L_\xi = \{b \in T^*G \mid \mu_r(b) = \xi\}$. Пусть η – ковектор общего положения в M , $N \subset M$ – неприводимое алгебраическое подмногообразие, содержащее η , размерности, дополнительной к размерности орбиты общего положения в M , трансверсальное орбите O_η^* . Пусть $S \subset \mu_r^{-1}(N)$ – неприводимое алгебраическое подмногообразие размерности, дополнительной к размерности орбиты правого действия подгруппы $\text{St } \eta$, трансверсальное некоторой такой орбите.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Регулярное отображение $\mu_l|_S: S \rightarrow M$ определяет алгебраическое отображение $(\mu_l|_S)^{-1}: M \rightarrow S$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для любого $\xi \in \mathfrak{g}^*$ выполнено $\mu_l(L_\xi) = O_\xi^*$.*

Пусть D – носитель дивизора ветвления и полюсов алгебраического отображения $(\mu_l|_S)^{-1}$. Пусть точка $\xi \in M \setminus (D \cup \text{sing } M)$ – общего положения, т.е. такая, что $\dim N \cap O_\xi^* = 0$. Тогда $\bigcup_{\zeta \in N \cap O_\xi^*} L_\zeta \supset S \cap \bigcup_{\zeta \in O_\xi^*} L_\zeta = (\mu_l|_S)^{-1}(O_\xi^*)$, где равенство вытекает из предложения 2, так как объединение уровней L_ζ , являющееся μ_r -прообразом орбиты O_ξ^* , является μ_l -прообразом орбиты O_ξ^* . Из сквозного вложения и редукции п. 1 следует первое равенство в следующей цепочке равенств, имеющей место в ограничении на орбиту O_ξ^* :

$$\omega = (d\nu)|_{\bigcup_{\zeta \in N \cap O_\xi^*} TL_\zeta} \circ d[(\mu_l|_S)^{-1}] = (d\nu) \circ d(\mu_l|_S)^{-1} = d(\nu \circ (\mu_l|_S)^{-1}). \quad (1)$$

Обозначим через $\Phi \subset \mathfrak{g}$ произвольное линейное вложение факторпространства $\mathfrak{g}/\text{ann } \eta$ в виде линейного подпространства, дополнительного к аннулятору $\text{ann } \eta$. Рассмотрим семейство линейных отображений $\text{ad}^* \zeta: \Phi \ni \Xi \rightarrow u \in T_\zeta O_\zeta^*$, регулярно зависящее от $\zeta \in M$ и для ζ общего положения являющееся изоморфизмом. Обращая это семейство, получаем семейство линейных отображений $\Xi(\cdot, \zeta): T_\zeta O_\zeta^* \rightarrow \Phi$, рационально зависящее от $\zeta \in M$. Следовательно, $\omega_\xi(u, v) = \langle \xi, [\Xi(u, \zeta), \Upsilon(v, \zeta)] \rangle$ – рациональная 2-форма на M .

Согласно [8], любое расширение вкладывается в расширение Галуа (всех ветвей). Ветви 1-формы $\nu \circ (\mu_l|_S)^{-1}$ на поверхности M записываются в избыточных координатах на M с коэффициентами из конечного расширения Галуа F поля $\mathbb{C}(M)$ рациональных функций на M . На множестве ветвей 1-формы действует группа Галуа $\text{Aut}(F/\mathbb{C}(M))$ расширения. По определению расширения Галуа, инварианты действия на F – в точности элементы поля $\mathbb{C}(M)$. Усредняя сквозное равенство (1) по $\text{Aut}(F/\mathbb{C}(M))$, получаем $\omega = d\mu$, где μ – требуемая рациональная 1-форма.

Автор благодарит Э. Б. Винберга за внимательное прочтение рукописи и замечания по упрощению доказательства усреднения методом Галуа, Ф. Хирцебруха и А. В. Болсинова – за обсуждения. Автор благодарит Математический институт университета г. Бонна за гостеприимство и Немецкую службу академических обменов (DAAD) за стипендию A/04/06212, работа была также поддержана грантом НШ-1988.2003.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. А. Березин // Функциональный анализ и его прил. 1967. Т. 1. № 2. С. 1–14. [2] J. E. Marsden, T. S. Ratiu. Introduction to Mechanics and Symmetry. New York: Springer-Verlag, 1999. [3] А. Т. Фоменко. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. [4] С. Т. Садэтов. Гипотеза Гельфанда–Кириллова (1966) справедлива после конечных расширений тел Ли // Докл. РАН. 2005 (в печати). [5] С. П. Новиков // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 3–49. [6] В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. [7] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов // Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Фундам. напр. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137–314. [8] И. Р. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии. Т. 1, 2. М.: Наука, 1988.

Донской государственный
технический университет
E-mail: sst@donpac.ru

Представлено Э. Б. Винбергом
Принято редколлегией 22.07.2005