Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Суетин, О многочленах, ортогональных на нескольких отрезках с индексным весом, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 5, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1655>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 11:57:11

О МНОГОЧЛЕНАХ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА НЕСКОЛЬКИХ ОТРЕЗКАХ С ИНДЕФИНИТНЫМ ВЕСОМ

С. П. СУЕТИН

1. Как известно [1], развитый П. Л. Чебышёвым метод решения ряда экстремальных задач с помощью аппарата непрерывных дробей привел его [2] к открытию *общих* ортогональных многочленов, которые возникли как знаменатели Q_n подходящих дробей P_n/Q_n , $\deg P_n \leq n$, $\deg Q_n \leq n$, $n = 1, 2, \dots$, к непрерывной J -дроби, ассоциированной с функцией вида

$$\hat{\mu}(z) = \int_S \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S, \quad (1)$$

где μ – положительная борелевская мера с носителем $S \subseteq \mathbb{R}$. Вопрос о сходимости такой J -дроби (т.е. последовательности $\{P_n/Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$) был изучен А. А. Марковым [3], который доказал, что J -дробь равномерно сходится к $\hat{\mu}$ вне отрезка $[\alpha, \beta]$ – выпуклой оболочки S .

Пусть $\mu > 0$, носитель S состоит из нескольких отрезков: $S = \Delta_1 \sqcup \dots \sqcup \Delta_p$, $p \geq 2$, и

$$d\mu(x) = \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{-h(x+i0)}}, \quad \text{где функция } \rho \neq 0 \text{ и голоморфна на } S, \quad (2)$$

$h(z) = \prod_{j=1}^p (z-\alpha_j)(z-\beta_j)$, $\Delta_j = [\alpha_j, \beta_j]$, и в $\overline{\mathbb{C}} \setminus S$ выбрана такая ветвь корня, что $\sqrt{h(z)} \sim z^p$ при $z \rightarrow \infty$. В “типичном” случае $\overline{\mathbb{C}} \setminus [\alpha, \beta]$ – *максимальная* область равномерной сходимости последовательности $\{P_n/Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Точнее, справедлива [4]–[7] следующая

ТЕОРЕМА. Если гармонические меры $\omega_1(\infty), \dots, \omega_p(\infty)$ отрезков $\Delta_1, \dots, \Delta_p$ рационально независимы, то нули ортогональных многочленов $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ всюду плотны в лакунах $[\beta_j, \alpha_{j+1}]$, $j = 1, \dots, p-1$, между отрезками.

2. Пусть $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k/z^{k+1}$ – степенной ряд, $\{[n/n]_f\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность его диагональных аппроксимаций Паде: $[n/n]_f = P_n/Q_n$, где $\deg P_n, \deg Q_n \leq n$, $Q_n \not\equiv 0$ и $R_n(z) := (Q_n f - P_n)(z) = O(1/z^{n+1})$ при $z \rightarrow \infty$; R_n – функция остатка. Для $f = \hat{\mu}$ (см. (1)) функция $[n/n]_{\hat{\mu}}$ – в точности n -я подходящая дробь к J -дроби, ассоциированной с $\hat{\mu}$. Как известно [8], [9], сходимость $[n/n]_f$ фактически определяется поведением нулей Q_n .

Пусть $f = \hat{\mu}$, мера μ задана (2), а ρ – такая вещественнозначная функция, что μ может иметь на разных компонентах S разные знаки, т.е. $\rho/\sqrt{-h}$ – *индефинитный* вес; в дальнейшем будем называть весом функцию ρ . В [6] показано, что асимптотика тех нулей Q_n , которые имеют предельные точки вне S (будем называть такие нули “*ложными*”; см. [8], [10]), при некоторых “начальных” условиях полностью описывается в терминах асимптотического поведения дивизора $d(n) = \mathbf{z}_1(n) + \dots + \mathbf{z}_g(n)$, удовлетворяющего проблеме обращения Якоби с правой частью, зависящей от ρ и индекса n . Точнее, пусть $\mathfrak{R}: w^2 = h(z)$ – двулистная гиперэллиптическая риманова поверхность рода $g = p-1$, $\mathbf{z} = (z, w)$ – точки на $\mathfrak{R}$, где $w = \sqrt{h}$ на первом листе и $w = -\sqrt{h}$ – на втором; $d\Omega_k(\mathbf{z}) = p_k(z) dz/w$, $k = 1, \dots, g$, – стандартный a -нормированный базис абелевых дифференциалов на $\mathfrak{R}$, B_{kj} – b -периоды этих дифференциалов, а $\Omega_k(\mathbf{z})$ – соответствующие многозначные абелевы функции на $\mathfrak{R}$. Пусть дивизор $d^0 = \mathbf{z}_1^0 + \dots + \mathbf{z}_g^0$ удовлетворяет системе сравнений (проблеме обращения Якоби) $\sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j^0) \equiv \xi_k^0$, $k = 1, \dots, g$, где знак $\equiv$ означает равенство по модулю периодов базисных дифференциалов, а величины ξ_k^0 определяются весом ρ [6]. Как известно [11], если дивизор d^0 – неспециальный, то он является *единственным* решением этой системы и, тем самым, однозначно определяется x, y -координатами вектора $\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_g^0)$ в многообразии Якоби $\text{Jac } \mathfrak{R}$:

$$x_k^0 = -\frac{1}{\pi} \int_S \arg \rho(x) d\Omega_k^+(x) \pmod{1}, \quad y_k^0 = -\frac{g}{2} \omega_k(\infty) + \rho_k \pmod{1}, \quad k = 1, \dots, g, \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-01027), фонда INTAS (грант № 03-51-6637) и программы поддержки ведущих научных школ России (грант № НШ-1551.2003.1).

где $d\Omega_k^+(x) = d\Omega_k(x + i0)$, $\sum_{k=1}^g \rho_k B_{kj} = \frac{i}{\pi} \int_S \log |\rho(x)| d\Omega_j^+(x)$, $j = 1, \dots, g$ [6]. Пусть $d(n) = \mathbf{z}_1(n) + \dots + \mathbf{z}_g(n)$ – последовательность дивизоров, удовлетворяющих при каждом $n = 0, 1, 2, \dots$ системе сравнений

$$\sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) \equiv \xi_k, \quad k = 1, \dots, g, \quad \text{где} \quad \xi_k = x_k^0 + \sum_{j=1}^g y_j^0 B_{kj} + n \sum_{j=1}^g \omega_j(\infty) B_{kj}. \quad (4)$$

Имеем: $x_k(n) = x_k^0$, $y_k(n) = y_k^0 + n\omega_k(\infty) \pmod{1}$, т.е. x -координаты не зависят от n . Если дивизор $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ таков, что $z_j \in [\alpha_j, \beta_j]$, то он неспециальный и имеет x -координаты $x_k = (g - k + 1)/2 \pmod{1}$; верно и обратное [6]. Пусть вес ρ такой, что для $d(0) = d^0$ имеем: все $z_j^0 \in [\alpha_j, \beta_j]$. Тогда и при каждом $n = 1, 2, \dots$ все $z_j(n) \in [\alpha_j, \beta_j]$, дивизор $d(n)$ неспециальный, а динамика ложных нулей Q_n полностью определяется динамикой y -координат $d(n)$. Отсюда уже с помощью развитого в [4]–[6] метода, основанного на исследовании специальной краевой задачи Римана на $\mathfrak{R}$ и сингулярного интегрального уравнения Наттолла, вытекает сформулированная выше теорема. Приведенные рассуждения остаются справедливыми и при замене одной из лаун $[\alpha_j, \beta_j]$ бесконечной лауной, поэтому этот подход позволяет получить новые результаты и для случая *индефинитного* веса ρ .

3. Пусть S состоит из двух отрезков: $S = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$, $[\alpha, \beta]$ – выпуклая оболочка S и выполнено условие “общего положения”: число $\omega_1(\infty)$ – иррационально (см. [12]).

Если $\rho/\sqrt{-h}$ меняет знак на S , то из свойства ортогональности Q_n вытекает, что ложный нуль Q_n может располагаться лишь во внешней лауне $\mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta]$. Это вытекает и из приведенных выше рассуждений, основанных на (3)–(4). Действительно, так как $\arg \rho = 0$ на S , то $x_1^0 = 0 \pmod{1}$. Такую же x -координату имеют все дивизоры $d(n) = \mathbf{z}_1(n)$. Следовательно, $z_1(n) \in \mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta]$ при всех $n \geq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть в условиях общего положения $\rho/\sqrt{-h}$ меняет знак на S . Тогда $\mathbb{N} = \Lambda_1 \sqcup \Lambda_2 \sqcup \Lambda_3$, где плотности последовательностей $\Lambda_1 = \Lambda_1(\rho)$ и $\Lambda_2 = \Lambda_2(\rho)$ равны $1/2$ и

- 1) множество $\{z_n : n \in \Lambda_1, z_n \in \mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta], Q_n(z_n) = 0\}$ всюду плотно в $\mathbb{R} \setminus (\alpha, \beta)$,
- 2) множество $\{\zeta_n : n \in \Lambda_2, \zeta_n \in \mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta], R_n(\zeta_n) = 0\}$ всюду плотно в $\mathbb{R} \setminus (\alpha, \beta)$.

Аналогичные результаты справедливы и для случая нескольких отрезков; исследование этого общего случая также основано на соотношениях (3)–(4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. И. Ахиезер // Математика XIX века / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1987. С. 9–79. [2] П. Л. Чебышев. О непрерывных дробях // Ученые записки Имп. Акад. Наук. 1855. Т. III. С. 636–664. [3] А. А. Марков. Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues // Acta Math. 1895. V. 19. P. 93–104. [4] С. П. Суетин // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 9. С. 81–114. [5] С. П. Суетин // УМН. 2002. Т. 57. № 1. С. 45–142. [6] С. П. Суетин // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 12. С. 105–133. [7] F. Peherstorfer. Zeros of polynomials orthogonal on several intervals // arXiv: math-ph/0203058. [8] Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. [9] А. А. Гончар // Матем. сб. 1982. Т. 118. № 4. С. 535–556. [10] С. П. Суетин // УМН. 2004. Т. 59. № 4. С. 201–202. [11] Э. И. Зверович // УМН. 1971. Т. 26. № 1. С. 113–180. [12] С. П. Суетин // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 12. С. 63–92.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: suetin@mi.ras.ru

Представлено А. Г. Сергеевым
Принято редколлегией 07.09.2005