Общероссийский математический портал

Д. В. Осипов, Отображение Кричевера и (полу)стабильные пучки на кривых,
УМН, 1999, том 54, выпуск 3, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm166>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:53:00

ОТОБРАЖЕНИЕ КРИЧЕВЕРА И (ПОЛУ)СТАБИЛЬНЫЕ ПУЧКИ НА КРИВЫХ

Д. В. Осипов

1. Пусть k – произвольное поле, $V = k((z)) \oplus k((z))$, $V_0 = k[[z]] \oplus k[[z]]$, $\mu \in \mathbb{Z}$. Определим $\mathrm{Gr}^\mu(V)$ как множество k -векторных подпространств W в V таких, что $\dim_k V/(V_0 + W) < \infty$, $\dim_k W \cap V_0 < \infty$ и $\dim_k W \cap V_0 - \dim_k V/(V_0 + W) = \mu$. (См. подобные определения в [1]–[4].)

На $\mathrm{Gr}^\mu(V)$ можно задать структуру бесконечномерного алгебраического многообразия, обобщающего конечномерное грасманово многообразие. (См. [1], где строится целая отделимая схема над k , k -точки которой совпадают с $\mathrm{Gr}^\mu(V)$.) На схеме $\mathrm{Gr}^\mu(V)$ можно определить линейное (детерминантное) расслоение Det такое, что для каждой k -точки $W \in \mathrm{Gr}^\mu(V)$ слой $\mathrm{Det}_W = \bigwedge^{\max}(W \cap V_0) \otimes \bigwedge^{\max}(V/W + V_0)^*$ (см. [1], [3]).

Определим S_μ как множество последовательностей целых чисел $\{s_{-\mu+1}, s_{-\mu+2}, \dots\}$ таких, что: 1) эти последовательности строго убывающие; 2) $s_k = -k$ для $k \gg 0$.

Пусть Det^* – двойственное линейное расслоение к расслоению Det . Отождествим V и $k((z))$ при помощи следующего изоморфизма: $(\sum a_i z^i) \oplus (b_i z^i) \mapsto \sum (a_i z^{2i} + b_i z^{2i+1})$. Тогда по любому $S \in S_\mu$ в [1], [3] строится сечение π_S расслоения Det^* на $\mathrm{Gr}^\mu(V)$. При этом $W \in \mathrm{Gr}^\mu(V) \mapsto \{\pi_S(W)\}$ определяет замкнутое вложение (плюккерово вложение) $\mathrm{Gr}^\mu(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Pi(S_\mu)^*) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(\Pi(S_\mu)))$, где $\Pi(S_\mu) \subset H^0(\mathrm{Gr}^\mu(V), \mathrm{Det}^*)$ – k -векторное пространство, порожденное глобальными сечениями $\{\pi_S : S \in S_\mu\}$. Последние, при этом, называются плюккеровыми координатами.

Любое $S = \{s_{-\mu+1}, s_{-\mu+2}, \dots\} \in S_\mu$ однозначно определяет $S' = \{s'_{-\mu+1}, s'_{-\mu+2}, \dots\} \in S_{\mu_1}$ и $S'' = \{s''_{-\mu_2+1}, s''_{-\mu_2+2}, \dots\} \in S_{\mu_2}$, так что множество $S = 2S' \cup (2S'' + 1)$, т.е. $\{s_{-\mu+1}, s_{-\mu+2}, \dots\} = \{2s'_{-\mu_1+1}, 2s'_{-\mu_1+2}, \dots\} \cup \{2s''_{-\mu_2+1} + 1, 2s''_{-\mu_2+2} + 1, \dots\}$. Положим $n(S) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mu_1 - \mu_2$.

Пусть $G = \mathrm{SL}(2, k[[z]])$. Естественное действие группы G на V индуцирует корректное действие G на $\mathrm{Gr}^\mu(V)$.

2. Пусть 1) C – неприводимая приведенная полная алгебраическая кривая над k , 2) $p \in C$ – неособая k -рациональная точка, 3) t_p – локальный параметр в точке p (т.е. $\widehat{\mathcal{O}}_p = k[[t_p]]$, где $\widehat{\mathcal{O}}_p$ – пополнение локального кольца $\mathcal{O}_p$ по максимальному идеалу), 4) $\mathcal{F}$ – когерентный пучок без кручения ранга 2 на C , 5) e_p – базис свободного ранга 2 модуля $\widehat{\mathcal{F}}_p$ над $\widehat{\mathcal{O}}_p$, где $\widehat{\mathcal{F}}_p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_C} \widehat{\mathcal{O}}_p$. Пусть эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{F}) = \mu$.

Можно определить отображение Кричевера K , которое каждому такому *квинтету* $(C, p, t_p, \mathcal{F}, e_p)$ сопоставляет замкнутую точку $K(C, p, t_p, \mathcal{F}, e_p) \in \mathrm{Gr}^\mu(V)$ (см. [2], [4]): $(C, p, \mathcal{F}, t_p, e_p) \rightarrow H^0(C \setminus p, \mathcal{F}) \hookrightarrow H^0(\mathrm{Spec} \widehat{\mathcal{O}}_p \setminus p, \mathcal{F}) = \widehat{\mathcal{F}}_p \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_p} \widehat{K}_p \xrightarrow{e_p} (\widehat{\mathcal{O}}_p \oplus \widehat{\mathcal{O}}_p) \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_p} \widehat{K}_p \xrightarrow{t_p} k((z)) \oplus k((z))$, где $\widehat{K}_p$ – поле частных кольца $\widehat{\mathcal{O}}_p$.

Напомним (см. [5]), что пучок $\mathcal{F}$ на C называется (полу)стабильным, если для любого собственного подпучка $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$: $\chi(\mathcal{G}) < \chi(\mathcal{F}/\mathcal{G})$ ($\leq$). Мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $W = K(C, p, t_p, \mathcal{F}, e_p)$. Пучок $\mathcal{F}$ не является (полу)стабильным пучком тогда и только тогда, когда существует $g \in \mathrm{SL}(2, k[[z]])$, так что для любого $S \in S_\mu$ если $\pi_S(gW) \neq 0$, то $n(S) \geq 0$ (> 0).

ПРИМЕР. На $\mathrm{Gr}^\mu(V)$ можно определить стратификацию – клеточное разбиение, индексированное множеством S_μ (см. [3]): $W \in \mathrm{Gr}^\mu(V)$ лежит в клетке $S = \{s_{-\mu+1}, s_{-\mu+2}, \dots\}$, если $\pi_S(W) \neq 0$, и для любого $S' = \{s'_{-\mu+1}, s'_{-\mu+2}, \dots\}$ $\pi_{S'}(W) \neq 0$, если и только если

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 96-15-96146, 96-15-96050).

$s'_{-\mu+1} \geq s_{-\mu+1}, s'_{-\mu+2} \geq s_{-\mu+2}, \dots$. Тогда если $W = K(C, p, t_p, \mathcal{F}, e_p)$ лежит в клетке $S \in S_\mu$ такой, что $S = 2S' \cup (2S' + 1)$, где $S' \in S_{\mu/2}$, то пучок $\mathcal{F}$ полустабилен (μ – четное).

3. Группа G , действуя на $W = K(C, p, t_p, \mathcal{F}, e_p) \in \text{Gr}^\mu(V)$, меняет только базис e_p . И имеет место следующая лемма.

ЛЕММА. Действие G на $\text{Gr}^\mu(V)$ поднимается до линейного действия G на расслоение Det . При этом, k -подпространство $\Pi(S_\mu) \subset H^0(\text{Gr}^\mu(V), \text{Det}^*)$ – G -инвариантно, и $u \begin{pmatrix} \lambda^a & 0 \\ 0 & \lambda^{-a} \end{pmatrix}^* (\pi_S) = \lambda^{a \cdot n(S)} \pi_S$ для любых $S \in S_\mu$, $\lambda \in k^*$, $a \in \mathbb{Z}$.

Поэтому в духе геометрической теории инвариантов (см. [5]) дадим следующие определения.

Для любого $W \in \text{Gr}^\mu(V)$ пусть $\widehat{W}$ – некоторый не равный нулю элемент из $\Pi(S_\mu)^*$ такой, что образ $\widehat{W}$ в $\mathbb{P}(\Pi(S_\mu)^*)$ совпадает с образом W при плюккеровом вложении. Для любых $\lambda \in k^*$, $g \in G$ пусть ${}^gT(\lambda) = g \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} g^{-1}$. Пусть ${}^gT = \{{}^gT(\lambda), \lambda \in k^*\}$ – 1-параметрическая подгруппа: $k^* \rightarrow G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Замкнутая точка $W \in \text{Gr}^\mu(V)$ – (полу)стабильная точка относительно 1-параметрической подгруппы ${}^gT$, если для $x = 0$ и $x = \infty$ предел $\lim_{\lambda \rightarrow x} {}^gT(\lambda)\widehat{W}$ не существует (не существует или $\lim_{\lambda \rightarrow x} {}^gT(\lambda)\widehat{W} \neq 0$).

Теперь из леммы и теоремы 1 следует

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(C, p, t_p, \mathcal{F}, e_p)$ – квинтет, $\chi(\mathcal{F}) = \mu$. Тогда пучок $\mathcal{F}$ (полу)стабилен на кривой C , если и только если $K(C, p, t_p, \mathcal{F}, e_p) \in \text{Gr}^\mu(V)$ – (полу)стабильная точка относительно 1-параметрических подгрупп ${}^gT$ для всех $g \in G$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А. Н. Паршину за постоянное внимание к работе и ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Álvarez Vázquez A., Muñoz Porras J. M., Plaza Martín F. J. The algebraic formalism of soliton equations over arbitrary base fields // Preprint alg-geom/9606009. [2] Mulase M. // Internat. J. Math. 1990. V. 1. №3. P. 293–342. [3] Прессли Э., Сигал Г. Группы петель. М.: Мир, 1990. [4] Previato E., Wilson G. // Proc. Sympos. Pure Math. 1989. V. 49. P. 553–569. [5] Newstead P. E. Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1978. (Tata Inst. of Fund. Research Lect. Notes on Math. and Phys. V. 51.)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
23.04.1999