Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Прест, В. А. Пунинская, Модули с малым числом типов над коммутативным
прюферовым кольцом, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 3, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm167>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:57:03

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

МОДУЛИ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ТИПОВ НАД
КОММУТАТИВНЫМ ПРЮФЕРОВЫМ КОЛЬЦОМ

М. Прест, В. А. Пунинская

Гипотеза Воота утверждает, что для любой счетной (полной) теории T первого порядка число неизоморфных счетных моделей T либо счетно, либо континуум. Интерес к ней стимулируется уверенностью в том, что счетная теория с малым (т.е. меньшим, чем континуум) числом моделей допускает хорошую структурную теорию.

В общем случае эта задача не слишком продвинута, отметим, что Шелах [1] доказал ее для ω -стабильных теорий.

В случае модулей над (счетным) кольцом можно надеяться, что гипотетическая структурная теория носит алгебраический характер, т.е. содержит естественные конструкции типа разложений в прямые суммы. Так, Каравалья [2] в доказательстве этой гипотезы для ω -стабильных теорий модулей на завершающем этапе использует разложение в прямую сумму модулей, для которых верна теорема Крулля–Шмидта.

Несколько особняком здесь стоит работа Биклера [3], где он проверил гипотезу Воота для модулей U -ранга 1. Его доказательство основано на идеях геометрической теории стабильности, и до сих пор не существует чисто кольцевого изложения этого результата (см. [4], [5]). Кроме того, Биклер показал, что гипотеза Воота для произвольных алгебраических структур конечного U -ранга может быть сведена к случаю модулей.

Решая гипотезу Воота для модулей, естественным представляется фиксировать некоторый хороший класс колец, разрешая модулям над ним быть произвольными. Так, Циглер [6] показал, что гипотеза Воота верна для любой полной теории модулей над (счетной) коммутативной дедекиндовой областью.

Недавно, существенно задействовав теорию колец и модулей, Пунинская доказала гипотезу Воота для модулей над счетным полуцепным кольцом [7] и для модулей над счетным (некоммутативным) дедекиндовым первичным кольцом [8]. Во всех этих случаях удалось показать, что теория с малым числом моделей ω -стабильна, что позволяет применить результат Каравалья.

Коммутативное кольцо R называется *прюферовым*, если его решетка идеалов дистрибутивна. Этот класс колец включает в себя все коммутативные дедекиндовы области, например, кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел.

Основным результатом нашей статьи является:

ТЕОРЕМА 1. *Каждый модуль с малым числом моделей над (счетным) коммутативным прюферовым кольцом ω -стабилен.*

Доказательство теоремы состоит из ряда редукций, исключающих из рассмотрения модули, теория которых имеет континуум счетных моделей (т.е. гипотеза Воота верна). Это сводит задачу к модулям с более простой структурой. Заключительная редукция подчеркивает сходство общей ситуации с теорией абелевых групп. А именно, пусть R – коммутативная прюферова область, M – R -модуль с малым числом типов, являющийся счетной прямой суммой инъективных оболочек M_i простых модулей $S_i = R/P_i$, $i \in I$. Здесь P_i – максимальный идеал кольца R такой, что R/P_i – конечное поле, и $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_i^n = 0$ для всех $i \in I$.

Тогда (как и для кольца $\mathbb{Z}$) доказывается, что $\bigcap_{i \in J} P_i = 0$ для любого бесконечного подмножества $J \subseteq I$, поэтому модуль M является ω -стабильным.

При доказательстве теоремы 1 мы существенно используем классификацию неразложимых ω -стабильных модулей над коммутативными прюферовыми кольцами, полученную Кампс и Факчини [9].

Из этой теоремы немедленно получаем:

Следствие 2. *Гипотеза Воота верна для произвольной полной теории модулей над счетным коммутативным прюферовым кольцом.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Harrington L., Makkai M., Shelah S. // Israel J. Math. 1984. V. 49. P. 259–280.
- [2] Garavaglia S. // J. Symbolic Logic. 1980. V. 45. P. 155–164. [3] Buechler S. // J. Symbolic Logic. 1988. V. 53. P. 975–979. [4] Herzog I. // J. Algebra. 1992. V. 149. P. 358–370. [5] Rothmaler Ph. Independence in U-rk 1 modules with few types // Preprint. Kiel: Christian-Albrechts-Universität, 1987. [6] Ziegler M. // Ann. Pure Appl. Logic. 1984. V. 26. P. 149–213. [7] Puninskaya V. Vaught's conjecture for modules over a serial ring // J. Symbolic Logic. (to appear).
- [8] Puninskaya V. Vaught's conjecture for modules over a Dedekind prime ring // Bull. London Math. Soc. (to appear). [9] Camps R., Facchini A. // Comm. Algebra. 1994. V. 22. P. 3133–3157.

Принято редколлегией
23.04.1999