Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Бесов, В. А. Садовничий, С. А. Теляковский, О научной деятельности
С. М. Никольского, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 6, 5–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1673>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:18:18

УДК 517.5

О НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ С.М. НИКОЛЬСКОГО

О. В. БЕСОВ, В. А. САДОВНИЧИЙ, С. А. ТЕЛЯКОВСКИЙ

В основу статьи положен доклад, сделанный авторами на первом пленарном заседании конференции, посвященной 100-летию академика Сергея Михайловича Никольского. Освещены различные периоды жизни С. М. Никольского и приведен обзор его научной деятельности по основным ее направлениям.

Библиография: 24 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Уравнения в банаховых пространствах	7
2. Теория приближения функций	9
3. Теория функциональных пространств и ее приложения	14
Список литературы	19

В мае 2005 года проходила Международная конференция, посвященная 100-летию Сергея Михайловича Никольского – выдающегося ученого и педагога, академика Российской академии наук, академика Венгерской, Польской и Казахской академий наук, Краковской академии наук и искусств, лауреата Сталинской премии, дважды лауреата Государственной премии СССР, награжденного академической золотой медалью имени И. М. Виноградова, лауреата академических премий имени П. Л. Чебышева и А. Н. Колмогорова, премии Правительства РФ по образованию, награжденного орденами Ленина, Октябрьской Революции, Трудового Красного Знамени, а в этом году орденом “За заслуги перед Отечеством” II степени. Одним словом, С. М. Никольский – человек-легенда.

Конференции, посвященные юбилею ученого, – нередкое событие в научной жизни. Но если этот юбилей – столетний и ученый действительно стал легендарной личностью, событие приобретает совсем другой, беспрецедентный для нашей жизни масштаб.

Сергей Михайлович Никольский – выдающийся математик, крупный деятель математического образования, организатор науки. И, наконец, человек кипучей энергии и целеустремленного, стойкого характера.

В мировом математическом сообществе он известен своими фундаментальными результатами в функциональном анализе, в теории приближения функций и квадратурных формулах, в теории функциональных пространств, в вариационных методах решения дифференциальных уравнений с частными производными.

Его первый цикл работ в 30-е годы по теории линейных операторов дал начало яркому новому направлению в функциональном анализе на этапе его бурного развития как математической дисциплины.

Ставший классическим цикл работ С. М. Никольского по теории приближения функций содержит решение трудных проблем, связанных с нахождением точных оценок приближения функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами. Им была создана теория наилучших квадратурных формул для классов функций и получены точные оценки.

Основополагающий цикл работ С. М. Никольского относится к теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям к решению уравнений в частных производных; так, им впервые были получены обратимые теоремы вложения пространств дифференцируемых функций.

С. М. Никольский обосновал решение вариационным методом краевых задач широкого класса уравнений.

С. М. Никольский является главой большой и активно работающей научной школы теории функций. Среди его учеников более 40 докторов и кандидатов физико-математических наук.

Книги С. М. Никольского – настоящие жемчужины в современной математической литературе. Его монографии по функциональным пространствам и теории приближения функций, по квадратурным формулам, серия учебников по математике для студентов и школьников вошли в золотой фонд отечественной и мировой литературы по математике, отличаясь высоким научным уровнем и прозрачностью изложения.

В своих “Воспоминаниях” С. М. Никольский так пишет о роли научной среды, научных школ в формировании ученого и развитии науки в целом:

“Дубок, выросший из желудя, сразу растет неплохо, даже в тени. Но через пять лет, если он не получает нужного света, погибает.

А какой может быть свет? Представьте себе, что вырубili дубовый лес. Осенью перед этим напало много желудей. На другой год они дадут много маленьких дубочков. Но их покрывает тут же выросшая после рубки крапива или лопух. Больше того, из пней вырастает мощная поросль, и она уже не даст жить бедному семенному дубку. Абсолютное большинство дубков не выдерживает и погибает.

Чтобы было побольше семенных дубков, нужна активная помощь человека”.

Сергею Михайловичу повезло. Он оказался в школе с богатыми традициями, в окружении выдающихся математиков, каждый из которых оставил в науке значительный и яркий след (имеются в виду математические школы, сложившиеся в Московском университете). Его научным руководителем был Андрей Николаевич Колмогоров.

В 1929 г. Сергей Михайлович закончил Днепропетровский университет, называвшийся тогда Институтом народного образования, и был оставлен там на преподавательскую работу.

С крупными математиками он познакомился уже в зрелом возрасте. В Днепропетровск в 30-е годы регулярно приезжали читать лекции П. С. Александров, А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский. Сергей Михайлович слушал их лекции и, как он сам пишет, “сделался учеником А. Н. Колмогорова”, занявшись под его влиянием задачами теории приближения функций.

Эта фраза Сергея Михайловича – “сделался учеником Колмогорова” говорит о многом. В ней проявляется присущая ему самостоятельность, которая так характерна для его научного творчества. О том, что значил для него Андрей Николаевич, который стал не просто научным руководителем, но и наставником, Учителем с большой буквы, Сергей Михайлович говорит так: “До последних минут жизни этот великий, благородный человек, мой учитель, будет находиться в моем сердце”.

В 1934–1935 гг. С.М. Никольский был прикомандирован из Днепропетровска в МГУ для работы над кандидатской диссертацией. Он пишет, что большую часть времени он проводил в “читальне Математического кабинета МГУ”, занимаясь с 9 утра до 9 вечера. Посещал семинары А.Н. Колмогорова, В.Л. Гончарова, Л.А. Люстерника и других. В 1935 г. закончил аспирантуру, защитив на мехмате МГУ кандидатскую диссертацию на тему “Линейные уравнения в банаховом пространстве”.

Летом 1940 г. С.М. Никольский приехал в Математический институт имени В.А. Стеклова Академии наук СССР поступать в докторантуру, с января 1941 г. приступил к работе в отделе теории функций МИАН. Его научным консультантом в докторантуре был А.Н. Колмогоров.

С этого времени научная жизнь Сергея Михайловича Никольского проходит в МИАН, в отделе теории функций. В 1953–1961 гг. он был заместителем директора МИАН, в 1960–1988 гг. заведовал Отделом теории функций.

С начала организации Московского физико-технического института в 1947 г. (тогда еще факультета МГУ) С.М. Никольский преподает в МФТИ, более 50 лет читая основные математические курсы, он является почетным профессором МФТИ.

С.М. Никольский – профессор кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ, заслуженный профессор МГУ.

1. Уравнения в банаховых пространствах

Во время докторантуры С.М. Никольский завершил цикл исследований (начатый еще в кандидатской диссертации), относящийся к линейным уравнениям в банаховых пространствах. Еще в кандидатской диссертации Сергей Михайлович перенес теорию Банаха таких уравнений для вполне непрерывного линейного оператора на более общие случаи. Теория Банаха представляет собой обобщение на произвольное банахово пространство известной теории Ф. Рисса (1918) в пространстве C непрерывных функций. Сергей Михайлович поставил себе задачу осуществить подобный перенос с пространства C на банаховы пространства для известной теории Радона. В случае, когда пространство имеет базис, этот вопрос был решен в кандидатской диссертации С.М. Никольского.

Но когда пространство не имеет базиса, задача оказывается значительно более трудной. Преодолеть эти трудности Сергею Михайловичу удалось в 1940 г. (эти результаты были напечатаны только в 1943 г.).

Для банахова пространства, имеющего базис, легко доказывается, что определенный в нем вполне непрерывный линейный оператор с любой точностью аппроксимируется по норме конечномерным оператором K . Отсюда следует, что если A – обратимый, а V – вполне непрерывный операторы, то сумма $A + V$ может быть представлена

в виде

$$A + V = A' + K, \quad (1)$$

где A' – обратимый оператор, а K – конечномерный линейный оператор. Сергею Михайловичу удалось виртуозно снять здесь предположение о существовании базиса, доказав, что представление (1) справедливо в произвольном банаховом пространстве.

Эта теорема Никольского (об операторах фредгольмова типа) была опубликована в Известиях Академии наук СССР уже во время войны в 1943 г. [1]. Значительная ценность этого результата подчеркивается полученным значительно позже контрпримером Энфлю вполне непрерывного оператора, не аппроксимируемого конечномерными. У этой теоремы Никольского счастливая судьба, она открыла новое направление: обобщенные фредгольмовы элементы в кольцах операторов в функциональном анализе и в структурной теории колец. Среди ее приложений – задачи теории упругости.

Теорема Никольского заняла свое достойное место в учебниках по общему функциональному анализу. Она украшает и современные лекционные курсы по функциональному анализу.

Теорему Никольского сейчас часто формулируют в следующем виде.

Пусть E и F – банаховы пространства, $S: E \rightarrow F$ – линейный оператор. Оператор S является фредгольмовым (т.е. его ядро $\text{Ker}(S)$ имеет конечную размерность $\dim \text{Ker}(S)$, а его образ $\text{Im}(S)$ имеет конечную коразмерность $\text{codim Im}(S)$) тогда и только тогда, когда существует линейный оператор $R: F \rightarrow E$ такой, что $RS = 1_E - T_1$, $SR = 1_F - T_2$, где T_1 и T_2 – компактные операторы.

Начиная с работ Фредгольма и Шмидта в функциональный анализ, наряду с категорией банаховых пространств, вошла категория Ban/K банаховых пространств, в которой морфизмами между банаховыми пространствами E и F объявляются классы смежности ограниченных операторов $B(E, F)$ по подпространству компактных операторов $K(E, F)$:

$$\text{Hom}_{\text{Ban}/K}(E, F) = B(E, F)/K(E, F).$$

В этом контексте теорема Никольского утверждает, что оператор $S: E \rightarrow F$ фредгольмов тогда и только тогда, когда его класс смежности $S + K(E, F)$ является изоморфизмом в категории Ban/K , при этом, хотя компактных операторов существенно “больше”, чем конечномерных, “быть изоморфизмом с точностью до компактных возмущений” равносильно “быть изоморфизмом с точностью до конечномерных возмущений”. Это и есть утверждение теоремы Никольского.

Допустим, что $F = E$, $S: E \rightarrow E$. Если $B(E) = B(E, E)$ – кольцо операторов, $K(E) = K(E, E)$ – идеал компактных операторов в $B(E)$, $C(E) = B(E)/K(E)$ – алгебра Калкина – фактор-алгебра, то в этом случае теорема Никольского утверждает, что оператор $S \in B(E)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда смежный класс $S + K(E)$ обратим в алгебре Калкина $C(E)$.

Теорема Никольского играет заметную роль в фундаменте теории индекса операторов, имея своим следствием утверждение об устойчивости индекса $\text{Ind}(S) = \dim \text{Ker}(S) - \text{codim Im}(S)$ фредгольмова оператора $S: E \rightarrow F$ при компактных возмущениях: если $T \in K(E, F)$ – компактный оператор, то $S + T$ фредгольмов и $\text{Ind}(S + T) = \text{Ind}(S)$.

Индексы фредгольмовых операторов нашли существенное применение в топологической К-теории при описании значений К-функтора в случае произвольного топологического компактного пространства Ω (М. Атья и др.).

Наконец, еще одно следствие. Тот факт, что кольцо операторов $B(E)$ банахова пространства E не имеет нильпотентных идеалов (такие кольца называются полупервичными), подсказал, как построить теорию фредгольмовых элементов полупервичных колец. Тем самым выявился и алгебраический характер теории Никольского, и она вошла в теорию колец.

2. Теория приближения функций

Следующий цикл работ С. М. Никольского посвящен различным задачам теории приближения функций. В этом разделе дается обзор ряда полученных им принципиальных результатов. Отметим, что работам С. М. Никольского по теории приближений и их развитию посвящена большая статья Н. П. Корнейчука [2].

Верхние грани приближений суммами Фурье на классах функций. Исследование скорости приближения периодических функций заданных классов частными суммами рядов Фурье было начато А. Лебегом [3]. В качестве характеристики аппроксимативных свойств сумм Фурье на классе функций $\mathfrak{M}$ он рассматривал верхнюю грань уклонений по классу

$$S_n(\mathfrak{M}) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \|f(x) - s_n(f, x)\|_C. \quad (2)$$

Лебег доказал, что для класса функций $H(\omega)$, модуль непрерывности которых не превосходит заданного модуля непрерывности $\omega(\delta)$, справедливо порядковое равенство

$$S_n(H(\omega)) \sim \omega\left(\frac{1}{n}\right) \log n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Следующий шаг в изучении верхних граней (2) был сделан А. Н. Колмогоровым [4]. Для величин (2), когда в качестве $\mathfrak{M}$ взят класс функций W_C^r , $r = 1, 2, \dots$, у которых производная порядка $r - 1$ абсолютно непрерывна, а производная порядка r там, где она существует, удовлетворяет условию $|f^{(r)}(x)| \leq 1$, он установил асимптотическое равенство

$$S_n(W_C^r) = \frac{4}{\pi^2} \frac{\log n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Первым значительным продолжением этого результата Колмогорова был цикл работ С. М. Никольского 1940–1946 гг. [5]–[11]. В них помимо величин (2) для сумм Фурье изучены также аналогичные верхние грани для приближений на классах функций суммами Фейера и интерполяционными полиномами.

Приведем результат С. М. Никольского о приближении суммами Фурье классов функций $W^r H(\omega)$, $r > 0$, у которых производная $f^{(r)} \in H(\omega)$, где ω – выпуклый вверх модуль непрерывности:

$$S_n(W^r H(\omega)) = \frac{2}{\pi^2} \frac{\log n}{n^r} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + O\left(\frac{1}{n^r} \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Отметим, что в отличие от оценки (3), для которой экстремальными являются функции с кусочно постоянными производными $f^{(r)}(x)$, функции, экстремальные в задаче (4), имеют более сложную природу. У этих функций график производной $f^{(r)}(x)$ составлен из конечного числа графиков сжатий и сдвигов функции $\omega(x)$. Поэтому доказательство оценки (4) потребовало разработки нового метода исследования.

Работы С. М. Никольского об асимптотическом поведении величин (2) составили его докторскую диссертацию, которую он защитил в январе 1942 г.

После работ А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского задача об асимптотическом поведении величин, подобных верхним граням (2), изучалась многими авторами в различных постановках. Эту задачу называют иногда задачей Колмогорова–Никольского.

Теоремы двойственности. Нахождение верхних граней вида (2) на классах функций, представимых в виде свертки, сводится к задаче о приближении ядра свертки в метрике сопряженного пространства.

С. М. Никольский [11] рассмотрел подобную закономерность в общем виде.

Пусть B – банахово пространство и B^* – сопряженное с ним пространство.

Зафиксируем элементы $x_1, \dots, x_n$ из пространства B . Тогда для наилучших приближений произвольного элемента $x \in B$ полиномами по системе $x_1, \dots, x_n$ справедливо равенство

$$\min_{a_k} \left\| x - \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\|_B = \max_F F(x),$$

где максимум берется по всем линейным функционалам $F \in B^*$, удовлетворяющим условиям $\|F\|_{B^*} \leq 1$ и $F(x_1) = \dots = F(x_n) = 0$, и этот максимум достигается на некотором функционале F .

Другая теорема двойственности Никольского относится к случаю, когда фиксируются линейные функционалы $F_1, \dots, F_n$ из B^* и произвольный функционал $F \in B^*$ приближается полиномами по системе $F_1, \dots, F_n$. Тогда

$$\min_{a_k} \left\| F - \sum_{k=1}^n a_k F_k \right\|_{B^*} = \sup_x F(x),$$

где верхняя грань берется по всем элементам $x \in B$ таким, что $\|x\|_B \leq 1$ и $F_1(x) = \dots = F_n(x) = 0$.

Теоремы двойственности С. М. Никольского стали отправной точкой дальнейших исследований экстремальных задач функционального анализа. Кроме того, они открыли подходы к решению ряда задач теории приближения функций.

Приближение в среднем. Первые приложения приведенных выше теорем двойственности к задачам теории приближений были даны С. М. Никольским в той же работе [11].

Пусть W_L^r – класс 2π -периодических функций f , производная порядка r которых удовлетворяет условию $\|f^{(r)}\|_L \leq 1$. Тогда для верхних граней наилучших приближений тригонометрическими полиномами порядка n в метрике C функций из W_C^r и наилучших приближений в метрике L функций из W_L^r справедливы равенства

$$E_n(W_C^r)_C = E_n(W_L^r)_L, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Значения величин $E_n(W_C^r)_C$ были к этому времени найдены Ж. Фаваром [12]. Таким образом, благодаря равенствам (5) стали известны и значения $E_n(W_L^r)_L$.

Равенства вида (5) были установлены в [11] также для наилучших приближений классов функций $\overline{W}_C^r$ и $\overline{W}_L^r$, сопряженных соответственно с функциями из W_C^r и W_L^r .

Более того, С.М. Никольский установил, что аналогичные равенства имеют место для классов функций f , представимых в виде свертки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(t-x) \varphi(t) dt,$$

где $K(t) \in L$ – ядро свертки, удовлетворяющее определенным условиям, а для функций φ справедливы оценки $\|\varphi(x)\|_C \leq 1$ или $\|\varphi(x)\|_L \leq 1$.

При этом для широкого класса ядер $K(t)$ им были найдены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы совпадали верхние грани наилучших приближений соответствующих классов функций в метриках C и L .

Кроме того, в [11] доказано, что соотношения вида (5) справедливы как точные или асимптотические равенства для многих методов суммирования рядов Фурье (суммы Фурье, суммы Фейера и другие).

Приближение алгебраическими многочленами с улучшением порядка вблизи концов отрезка. Приближение функций алгебраическими многочленами для удобства сравнения с приближениями периодических функций изучается обычно на отрезке $[-1, 1]$. В этом разделе для простоты формулировок ограничимся рассмотрением классов $\text{Lip } \alpha$ функций f , удовлетворяющих на $[-1, 1]$ условию Липшица порядка α

$$|f(x') - f(x'')| \leq M |x' - x''|^\alpha, \quad M > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (6)$$

Уже в первых работах Д. Джексона, С.Н. Бернштейна и Ш.-Ж. Валле Пуссена 1911–1919 гг., посвященных прямым и обратным теоремам теории приближений, было выяснено, что прямые теоремы в тригонометрическом и алгебраическом случаях формулируются одинаково: если $f \in \text{Lip } \alpha$, то

$$E_n(f)_C \leq \frac{A}{n^\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где A – абсолютная положительная постоянная.

Но обратные теоремы для тригонометрического и алгебраического случаев существенно отличаются. Именно, если для наилучших приближений периодической функции f справедлива оценка (7) при $\alpha < 1$, то f удовлетворяет условию Липшица (6) порядка α с некоторой постоянной M .

А для приближений алгебраическими многочленами из оценки (7) при $\alpha < 1$ не следует, что функция f принадлежит классу $\text{Lip } \alpha$ на всем отрезке $[-1, 1]$, а можно утверждать только, что f удовлетворяет условию Липшица порядка α на каждом отрезке $[a, b] \subset (-1, 1)$, причем множитель M в (6) зависит от выбора отрезка $[a, b]$.

Таким образом, оставался открытым вопрос о характеристизации функций, удовлетворяющих на отрезке условию Липшица, в терминах приближений их алгебраическими многочленами.

Путь к решению этой задачи открыла работа С. М. Никольского 1946 г. [13]. В этой работе показано, что если $P_n(x)$ – аналог средних Фавара порядка n ряда Фурье функции $f \in \text{Lip } 1$ на $[-1, 1]$ по полиномам Чебышева $\cos m \arccos x$, то справедлива оценка

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + O\left(|x| \frac{\log(n+1)}{n^2}\right), \quad (8)$$

равномерная относительно $x \in [-1, 1]$. При этом в оценке (8) в точках $x = \pm 1$ нельзя заменить O на o , а главное – нельзя уменьшить множитель $\pi/2$, что следует из другого результата С. М. Никольского той же работы [13]:

$$\sup_{f \in \text{Lip } 1} E_n(f)_C = \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n \log n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (9)$$

причем остаточный член в (9) отрицателен.

Оценка (8) дает улучшение порядка приближения при $n \rightarrow \infty$ в окрестности концов отрезка $[-1, 1]$. Это обстоятельство привело С. М. Никольского к следующей гипотезе. Для того чтобы функция f удовлетворяла на $[-1, 1]$ условию Липшица порядка $\alpha < 1$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность алгебраических многочленов $\{p_n(x)\}$, для которой имеет место оценка

$$|f(x) - p_n(x)| \leq A \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^\alpha. \quad (10)$$

Справедливость этой гипотезы установили ученики Сергея Михайловича. В 1951 г. А. Ф. Тиман доказал соответствующую прямую теорему, а в 1956 г. В. К. Дзялык – обратную теорему.

Дальнейшие исследования показали, что многие теоремы о приближении периодических функций тригонометрическими полиномами имеют аналоги для приближений алгебраическими многочленами на $[-1, 1]$, если $1/n$ в периодическом случае заменить на

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2},$$

как в оценке (10).

Квадратурные формулы. Начало изучения квадратурных формул, т.е. формул приближенного интегрирования вида

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k),$$

относится к XVII веку. С тех пор накоплено много разных результатов, посвященных этим вопросам.

В 1950 г. С. М. Никольский [14] рассмотрел новую экстремальную задачу о квадратурных формулах, близкую по своему духу к задачам о поперечниках классов функций. Для заданного класса функций $\mathfrak{M}$ и фиксированного числа n узлов квадратурной формулы требуется найти величину

$$\inf_{a_k, x_k} \sup_{f \in \mathfrak{M}} \left| \int_0^1 f(x) dx - \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) \right|, \quad (11)$$

где нижняя грань берется по весам a_k и узлам x_k квадратурной формулы.

С. М. Никольский разработал общие вопросы, связанные с такой постановкой задачи, и нашел асимптотически точные значения величин (11), когда $\mathfrak{M}$ – класс функций на $[0, 1]$ с заданным модулем непрерывности производной порядка r .

Кроме того, он дал точное решение задачи (11) в некоторых случаях. В частности, он установил, что для нахождения величины (11) на классе функций $f(x)$, имеющих ограниченную единичей производную второго порядка и удовлетворяющих начальным условиям $f(0) = f'(0) = 0$, нужно найти наилучшее приближение в метрике $L[0, 1]$ функции x^2 непрерывными кусочно линейными функциями, которые могут иметь n точек разрыва производной. Используя современную терминологию, можно сказать, что речь идет о приближении функции x^2 сплайнами степени 1 дефекта 1 с n свободными узлами.

С. М. Никольский доказал, что наилучшими узлами и весами в задаче (11) для этого класса функций являются

$$x_k = k\alpha_n, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad \alpha_n = \frac{4}{\sqrt{3} + 4n},$$

$$a_k = \alpha_n, \quad k = 1, 2, \dots, n-1; \quad a_n = \alpha_n \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

Таким образом, узлы оптимальной квадратурной формулы располагаются на отрезке $[0, 1]$ равномерно, но ближайший к точке 1 узел приближен к концу отрезка, а веса для всех узлов, кроме последнего, равны между собой.

В те годы исследования по приближению сплайнами только начинали разворачиваться, и этот результат С. М. Никольского был одним из первых, когда было найдено точное решение задачи о приближении сплайнами.

С. М. Никольским были получены также подобные результаты для квадратурных формул, в которых участвуют значения не только самой функции, но и ее производных.

В 1958 г. вышла в свет монография С. М. Никольского “Квадратурные формулы” [15], выдержавшая затем несколько изданий. Она стимулировала дальнейшие исследования экстремальных задач для квадратурных формул и содействовала внедрению результатов теоретических исследований в практику вычислений.

Приближения на многообразиях. Цикл работ Сергея Михайловича, начатый в 1990 г. [16], посвящен приближениям функций на многообразиях тригонометрическими полиномами, целыми функциями, алгебраическими многочленами. Общие теоремы о приближении установлены им для многообразий $\Gamma = \Gamma^{(m)} \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq m < n$, для которых имеются теоремы о продолжении функций пространства $H_p^r(\Gamma)$ до функций пространства $H_p^r(\mathbb{R}^n)$, $\rho = r + \frac{n-m}{p}$.

Отметим, например, теорему о приближении функции алгебраическими многочленами: свойство функции

$$f \in H_p^r(\Gamma)$$

эквивалентно существованию последовательности многочленов $\{P_N\}_1^\infty$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

$$\|f - P_N\|_{L_p(\Gamma)} \leq CN^{-r}, \quad (12)$$

$$\|P_N\|_{H_p^r(\Gamma)} \leq C. \quad (13)$$

Эта теорема содержит новую постановку вопроса и законченный результат. Новым здесь сравнительно с классической постановкой (Джексон, Бернштейн, Валле Пуссен) является условие (13). Заметим, что при классической постановке вопроса, т.е. при замене условия (13) на условие

$$\|P_N\|_{L_p(\Gamma)} \leq C, \quad (14)$$

теорема перестает быть верной даже для интервала $\Gamma = (0, 1) \subset \mathbb{R}^1$, когда условия (12), (14) влекут $f \in H_p^{\frac{r}{2}}(\Gamma)$, но не влекут $f \in H_p^{\frac{r}{2}+\varepsilon}(\Gamma)$ ни при каком $\varepsilon > 0$.

Наряду с этим С. М. Никольским описаны те многообразия Γ , для которых условия (12), (14) влекут $f \in H_p^r(\Gamma)$.

Приближениям на многообразиях был посвящен доклад Сергея Михайловича на настоящей конференции.

3. Теория функциональных пространств и ее приложения

В 1951 г. вышла работа С. М. Никольского [17], в которой установлены неравенства разных метрик для целых функций экспоненциального типа и тригонометрических полиномов. Эти результаты послужили основой для исследований самого Сергея Михайловича и его многочисленных последователей по теоремам вложения пространств дифференцируемых функций многих переменных и их приложениям к задачам математической физики. В последующие годы научные интересы С. М. Никольского сместились в значительной степени к этим направлениям.

В работе [17] С. М. Никольский установил оценки, связывающие нормы целых функций экспоненциального типа (а также тригонометрических полиномов) в метриках пространств L^p при разных p . Приведем эти неравенства для целых функций конечных степеней $g_\nu(z) = g_\nu(z_1, \dots, z_n)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$:

$$\|g_\nu\|_{q, \mathbb{R}^n} \leq 2^n \left(\prod_{j=1}^n \nu_j \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|g_\nu\|_{p, \mathbb{R}^n}, \quad 1 \leq p < q \leq \infty, \quad (15)$$

$$\|g_\nu\|_{p, \mathbb{R}^m} \leq 2^n \left(\sum_{j=m+1}^n \nu_j \right)^{\frac{1}{p}} \|g_\nu\|_{p, \mathbb{R}^n}, \quad 1 \leq m < n, \quad (16)$$

где $\|\cdot\|_{p, \mathbb{R}^n}$, $\|\cdot\|_{p, \mathbb{R}^m}$ — лебеговы нормы на пространстве $\mathbb{R}^n$ и его подпространстве $\mathbb{R}^m = \{x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0\}$. Важно, что множители, зависящие от ν , в правых частях неравенств (15) и (16) являются точными по порядку.

Эти неравенства наряду с доказанными им оценками производных

$$\|D^\alpha g_\nu\|_{p, \mathbb{R}^n} \leq \nu^\alpha \|g_\nu\|_{p, \mathbb{R}^n}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (17)$$

переносящими неравенство С. Н. Бернштейна для $p = \infty$ на другие значения p , дали возможность Сергею Михайловичу связать аппроксимационные свойства функции из $L_p(\mathbb{R}^n)$ с их гладкостью в $L_p(\mathbb{R}^n)$ (включая гладкость нецелого порядка) и применить результаты к исследованию введенных им пространств дифференцируемых функций H_p^r , нормированных следующим образом:

$$\|f\|_{H_p^r(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{p, \mathbb{R}^n} + \sup_{|h|>0} \frac{\|\Delta_h^k \nabla^{\bar{r}} f\|_{p, \mathbb{R}^n}}{|h|^{r-\bar{r}}}, \quad (18)$$

где $r > 0, \bar{r} \in \mathbb{N}_0, 0 \leq \bar{r} < r \leq \bar{r} + 1, k \in \{1, 2\}, k > r - \bar{r}, \nabla^m f$ — градиент f порядка m , $\Delta_h^k f(x)$ — разность порядка k с шагом $h \in \mathbb{R}^n$ функции f в точке x .

Сергей Михайлович доказал следующую теорему вложения:

$$H_p^r(\mathbb{R}^n) \subset H_q^\rho(\mathbb{R}^m), \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty, \quad 1 \leq m \leq n, \quad r - \frac{n}{p} = \rho - \frac{m}{q}. \quad (19)$$

Эта теорема точна (неулучшаема ни по одному из параметров).

Случай $1 \leq m < n, q = p$ показывает, что след на $\mathbb{R}^m$ функции из $H_p^r(\mathbb{R}^n)$ содержится в $H_p^\rho(\mathbb{R}^m)$, $\rho = r - \frac{n-m}{p} > 0$. Замечательно, что это утверждение обратимо, как было показано С.М. Никольским в 1951 г. [17]. Там же он поставил и решил более общую задачу о построении функции $f \in H_p^r(\mathbb{R}^n)$ с заданными следами на $\mathbb{R}^m$ самой функции и всех ее нормальных производных до определенного порядка. Тем самым впервые была дана точная (обратимая) характеристика следа функции на многообразиях измерений $m < n$:

$$H_p^r(\mathbb{R}^n)|_{\mathbb{R}^m} = H_p^\rho(\mathbb{R}^m), \quad \rho = r - \frac{n-m}{p} > 0. \quad (18)$$

Теоремы вложения для пространств функций многих действительных переменных были впервые установлены С.Л. Соболевым в конце 30-х годов для введенных им функциональных пространств

$$W_p^l(\mathbb{R}^n), \quad l \in \mathbb{N}, \quad \|f\|_{W_p^l(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha f\|_{p, \mathbb{R}^n}.$$

Эти теоремы (вместе с дополнением В.П. Ильина) имеют вид

$$W_p^l(\mathbb{R}^n) \subset L_q(\mathbb{R}^m), \quad 1 < p \leq q \leq \infty, \quad l - \frac{n}{p} + \frac{m}{q} \geq 0 \text{ при } q < \infty, \quad l - \frac{n}{p} > 0 \text{ при } q = \infty. \quad (21)$$

Вложение (21) неулучшаемо в терминах участвующих в его формулировке пространств Соболева и Лебега. Однако в теории вложения пространств Соболева оставались нерешенными некоторые важные вопросы. Так, например, в рамках этих пространств нельзя получить обращение теоремы о следах (которая дала бы возможность внутренним образом охарактеризовать следы функций из пространства Соболева на подпространстве $\mathbb{R}^n$).

Работы Сергея Михайловича явились важнейшим этапом в развитии теории вложения функциональных пространств дифференцируемых функций, определившим на десятилетия направление ее развития. Значение построенной Сергеем Михайловичем теории функциональных пространств, если говорить коротко, состояло в следующем.

1. Широко вовлечены в рассмотрение пространства как целой, так и нецелой гладкости — важная для приложений детализация характеристики функций.
2. Построенные пространства $H_p^l(\mathbb{R}^n)$ при целых l сколь угодно близки к пространствам Соболева:

$$H_p^{l+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \subset W_p^l(\mathbb{R}^n) \subset H_p^l(\mathbb{R}^n) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

3. Впервые получены точные (обратимые) теоремы о следах и установлена их обратимость.
4. Система $\{H_p^r(\mathbb{R}^n)\}$ замкнута относительно теорем вложения и обратных теорем о продолжении функций.
5. Теория вложения охватывает анизотропные пространства дифференцируемых функций

$$H_{\mathbf{p}}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^n), \quad \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n), \quad r_i > 0, \quad \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \quad p_i \in [1, \infty].$$

Для описания результатов С. М. Никольского по анизотропным пространствам дифференцируемых функций многих переменных введем некоторые обозначения. Обозначим через

$$\Delta_{i,h}^k f(x), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad h \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N},$$

разность порядка k с шагом h функции f в точке x , взятую по переменной x_i . Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in [1, \infty]^n$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in (0, \infty)^n$.

Пространством $H_{\mathbf{p}}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^n)$ называется банахово пространство определенных на $\mathbb{R}^n$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{H_{\mathbf{p}}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{i=1}^n \left(\|f\|_{L_{p_i}(\mathbb{R}^n)} + \sup_{|h|>0} |h|^{\bar{r}_i - r_i} \left\| \Delta_{i,h}^{k_i} \frac{\partial^{\bar{r}_i}}{\partial x_i^{\bar{r}_i}} f \right\|_{L_{p_i}(\mathbb{R}^n)} \right), \quad (22)$$

где $\bar{r}_i \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq \bar{r}_i < r_i \leq \bar{r}_i + 1$, $k_i \in \{1, 2\}$, $k_i > r_i - \bar{r}_i$.

В случае одинаковых p_i ($p_1 = \dots = p_n = p$) вместо $H_{\mathbf{p}}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^n)$ пишут $H_p^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^n)$, а если еще и $r_1 = \dots = r_n = r$, то пишут $H_p^r(\mathbb{R}^n)$. В последнем случае в норме (22) участвуют лишь несмешанные производные функции f и разности, взятые в координатных направлениях. Однако в этом случае норма (22) эквивалентна норме (18) в силу доказанной С. М. Никольским теоремы о свойствах смешанных производных от функций из пространства $H_{\mathbf{p}}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^n)$, которая при $p_1 = \dots = p_n = p$ утверждает, что всякая функция $f \in H_p^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^n)$ имеет на $\mathbb{R}^n$ производную $D^{\alpha} f$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, если

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{r_i} < 1,$$

и при этом справедлива оценка

$$\|D^{\alpha} f\|_{H_p^{\rho}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{H_p^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^n)}, \quad (23)$$

где

$$\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n) \in (0, \infty)^n, \quad \rho_j = r_j \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{r_i} \right),$$

а множитель C не зависит от f .

Оценка типа (23) для функций из $H_{\mathbf{p}}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^n)$ с $\mathbf{p} \in [1, \infty]^n$ и явилась первой общей теоремой интерполяционного характера для дифференцируемых функций многих переменных, когда “промежуточные” свойства функции индуцируются другими ее дифференциальными свойствами разных порядков, описанными в разных L_p -метриках.

С. М. Никольский установил общую теорему о вложении $H_{\mathbf{p}}^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^n) \subset H_{\mathbf{q}}^{\mathbf{p}}(\mathbb{R}^m)$, которая в случае $p_1 = \dots = p_n = p, q_1 = \dots = q_m = q$ утверждает, что при

$$1 \leq m \leq n, \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty, \quad \kappa = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i} - \frac{1}{p} \sum_{i=m+1}^n \frac{1}{r_i} > 0$$

имеет место вложение

$$H_p^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^n) \subset H_q^{\kappa \mathbf{r}^{(m)}}(\mathbb{R}^m), \quad (22)$$

где $\mathbf{r}^{(m)} = (r_1, \dots, r_m)$ – проекция $\mathbf{r}$ на $\mathbb{R}^m$.

Им было получено и обращение теоремы (24) в случае $1 \leq m < n, p = q$, показывающее точность (обратимость) характеристики следа функции $f \in H_p^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^n)$ на $\mathbb{R}^m$ (обобщение на анизотропный случай соотношения (20)).

Сергеем Михайловичем были найдены условия компактности множеств в пространстве $H_p^{\mathbf{r}}(\mathbb{R}^n)$.

Свои результаты Сергей Михайлович распространил на случай пространств $H_p^r(G)$, заданных на области $G \subset \mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей ∂G [18]. При этом норма в $H_p^r(G)$ имеет вид

$$\|f\|_{H_p^r(G)} = \|f\|_{p,G} + \sup_{h \in \mathbb{R}^n, 0 < |h| < \delta} \frac{\|\Delta_h^k \nabla^{\bar{r}} f\|_{p, G_{k\delta}}}{|h|^{r-\bar{r}}},$$

где, как и в (18),

$$r > 0, \quad \bar{r} \in \mathbb{N}_0, \quad 0 \leq \bar{r} < r \leq \bar{r} + 1, \quad k \in \{1, 2\}, \quad k > r - \bar{r},$$

$\delta > 0$ достаточно мало, $G_{\delta} = \{x : \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G) > \delta\}$.

Он построил линейный непрерывный оператор продолжения

$$H_p^r(G) \rightarrow H_p^r(\mathbb{R}^n), \quad (25)$$

что дало возможность применить к пространствам $H_p^r(G)$ развитую уже теорию пространств $H_p^r(\mathbb{R}^n)$.

Сергеем Михайловичем найдена точная (обратимая) характеристика следов функций из $H_p^r(G)$ на достаточно гладкой границе ∂G [18]:

$$H_p^r(G)|_{\partial G} = H_p^{\rho}(\partial G). \quad (26)$$

Им найдена точная (обратимая) характеристика следов функций $H_p^r(G)$ на границе плоской области G , имеющей угловые точки.

Результаты Сергея Михайловича по теории функциональных пространств содержатся в монографиях [19], [20].

Свои результаты по теории функциональных пространств Сергей Михайлович применил к уравнениям математической физики и прежде всего к вариационному методу решения краевых задач.

Он впервые установил в терминах граничных данных достаточные условия разрешимости, отличающиеся по гладкости от необходимых “на сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ ”.

Например, для разрешимости вариационным методом краевой задачи для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{на } G, \\ u|_{\partial G} = \phi, \end{cases}$$

где область $G \subset \mathbb{R}^n$ имеет достаточно гладкую границу ∂G , необходимо, чтобы $\phi \in H_2^{\frac{1}{2}}(\partial G)$, и достаточно, чтобы $\phi \in H_2^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\partial G)$.

Отдельный цикл работ Сергея Михайловича 1957–1958 гг. (см. [21]) посвящен решению вариационным методом задачи Гильберта (о нахождении гармонической вне ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$ функции с определенными условиями). Примененный им вариационный метод позволил провести исследование в многомерном случае ($n \geq 2$), в то время как используемая ранее теория интеграла Коши действовала лишь при $n = 2$.

Сергей Михайлович изучил пространства функций с доминирующей смешанной производной $S_p^r H$. В таких пространствах свойства некоторых смешанных производных играют определяющую роль. Он установил для этих пространств теоремы вложения и другие свойства и применил эти исследования к доказательству существования и к изучению свойств решения первой краевой задачи для уравнения

$$\sum_{k,l \in E} (-1)^{|l|} (a_{kl}(x) u^{(k)}(x))^{(l)} = 0,$$

где множество E мультииндексов выпукло и содержит все проекции каждого из своих мультииндексов. При этом предполагалось выполненным условие

$$\int_G \sum_{k,l \in E} a_{kl}(x) f^{(k)}(x) f^{(l)}(x) dx \geq \kappa \int_G \sum_{k=1}^N (f^{(k^s)}(x))^2 dx,$$

где выпуклая оболочка множества $\{0\} \cup \{k^s\}_1^N$ совпадает с E . Класс таких уравнений выходит за рамки гипоеллиптических.

Весовым пространствам и их приложениям к вырождающимся эллиптическим уравнениям посвящен цикл работ С. М. Никольского и П. И. Лизоркина, начатый в 1964 г. Существенную роль при этом играет неравенство

$$\|f\|_{L_p(G)} \leq C \left(\sum_{j=0}^{s-1} \left\| \frac{\partial^j f}{\partial \nu^j} \right\|_{L_p(\partial G)} + \sum_{|k|=r} \|\rho^\lambda f^{(k)}\|_{L_p(G)} \right).$$

Здесь область $G \subset \mathbb{R}^n$, $\rho(x) = \text{dist}(x, \partial G)$, ν – нормаль на ∂G , $\frac{r}{2} \leq s \leq r$, $r - \frac{1}{p} - \lambda < s < r - \frac{1}{p} - \lambda + 1$.

После доказательства этого неравенства для отрезка Сергеем Михайловичем был предложен так называемый метод мостов, позволяющий получить его для области.

С. М. Никольский и П. И. Лизоркин [22] применили эти результаты к сильно вырождающемуся эллиптическому уравнению порядка $2r$

$$\begin{cases} Lu = F & \text{на } G, \\ \left. \frac{\partial u^j}{\partial \nu^j} \right|_{\partial G} = \phi_j, & j = 0, 1, \dots, s-1, \end{cases}$$

где

$$Lu = \sum_{|k|, |l| \leq r} (-1)^{|k|} (a_{kl}(x) u^{(l)}(x))^{(k)}, \quad a_{kl} = a_{lk},$$

$$\sum_{|k|, |l| \leq r} a_{kl}(x) \xi_k \xi_l \geq \frac{\varkappa}{\rho(x)^{2\lambda}} \sum_{|k|=r} \xi_k^2 \quad \forall \xi_k.$$

При сильном вырождении ($\lambda < -\frac{1}{2} \implies s < r$) число граничных условий меньше r на всей границе, что отличает постановку этой задачи от классической.

В 1999 г. Сергей Михайлович изучил [23] краевую задачу для многочленов для самосопряженного эллиптического дифференциального оператора порядка $2l$

$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ на } G \subset \mathbb{R}^n, \\ \left. \frac{\partial^m u}{\partial \nu^m} \right|_{\partial G} = \left. \frac{\partial^m P}{\partial \nu^m} \right|_{\partial G}, \quad m = 0, 1, \dots, l-1, \end{cases}$$

где P — многочлен.

Показано, что если ∂G — сфера или эллипсоид, то решением является многочлен той же степени, что и P , и что это не так, если ∂G — алгебраическая поверхность порядка $2s > 2$. Полученные в этой задаче результаты можно рассматривать и как обобщение основной теоремы для сферических функций (в последней $L = \Delta$, $l = 1$, ∂G — сфера).

В 2001 г. С. М. Никольский [24] показал, что решение граничной задачи

$$\begin{cases} Lu = f \text{ на } G \subset \mathbb{R}^n, \\ u^{(\alpha)}|_{\partial G} = 0, \quad |\alpha| \leq l-1, \end{cases}$$

где ∂G — эллипсоид, может быть аппроксимировано полиномами P_{N+2l} , являющимися решениями той же задачи, в которой функция f заменена на полином P_N , аппроксимирующий f . Он также получил асимптотические оценки разности $u - P_{N+2l}$ при $N \rightarrow \infty$ в терминах свойств функции f .

Из недавних результатов Сергея Михайловича отметим теоремы об ослабленной компактности ограниченных множеств в различных пространствах дифференцируемых функций, определенных на области (2005 г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1943. Т. 7. № 3. С. 147–166.
- [2] Н. П. Корнейчук. С. М. Никольский и развитие исследований по теории приближения функций в СССР // УМН. 1985. Т. 40. № 5. С. 71–131.
- [3] H. Lebesgue. Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz // Bull. Soc. Math. France. 1910. V. 38. P. 184–210.
- [4] A. Kolmogoroff. Zur Größenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen // Ann. of Math. (2). 1935. V. 36. P. 521–526.
- [5] С. М. Никольский. Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4. № 6. С. 501–508.
- [6] С. М. Никольский. Оценка остатка суммы Фейера для периодических функций, имеющих ограниченную производную // Докл. АН СССР. 1941. Т. 31. № 3. С. 210–214.

- [7] С. М. Никольский. Асимптотическая оценка остатка при приближении интерполяционными тригонометрическими полиномами // Докл. АН СССР. 1941. Т. 31. № 3. С. 215–218.
- [8] С. М. Никольский. Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32. № 6. С. 386–389.
- [9] С. М. Никольский. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Труды МИАН. 1945. Т. 15.
- [10] С. М. Никольский. Ряд Фурье функции с данным модулем непрерывности // Докл. АН СССР. 1946. Т. 52. № 3. С. 191–194.
- [11] С. М. Никольский. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1946. Т. 10. № 3. С. 207–256.
- [12] J. Favard. Sur l'approximation des fonctions périodiques par des polynômes trigonométriques // C. R. Acad. Sci. Paris. 1936. V. 203. P. 1122–1124.
- [13] С. М. Никольский. О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1946. Т. 10. № 4. С. 295–322.
- [14] С. М. Никольский. К вопросу об оценках приближения квадратурными формулами // УМН. 1950. Т. 5. № 2. С. 165–177.
- [15] С. М. Никольский. Квадратурные формулы. М.: Физматгиз, 1958.
- [16] С. М. Никольский. Приближения на многообразиях следами функций экспоненциального типа // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. № 4. С. 786–789.
- [17] С. М. Никольский. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Труды МИАН. 1951. Т. 38. С. 244–278.
- [18] С. М. Никольский. Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях // Матем. сб. 1953. Т. 33. № 2. С. 261–326.
- [19] С. М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969; 2-е изд., 1977.
- [20] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975; 2-е изд., 1996.
- [21] С. М. Никольский. Вариационная задача Гильберта // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22. № 5. С. 590–630.
- [22] П. И. Лизоркин, С. М. Никольский. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью // Труды МИАН. 1983. Т. 161. С. 157–183.
- [23] С. М. Никольский. Краевая задача для многочленов // Труды МИАН. 1999. Т. 227. С. 223–236.
- [24] С. М. Никольский. Еще о краевой задаче с многочленами // Труды МИАН. 2001. Т. 232. С. 286–288.