Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Д. Боянов, Оптимальные квадратурные формулы, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 6, 33–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1675>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:06:09

УДК 517.5

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Б. Боянов

В обзоре рассматриваются результаты и открытые проблемы, связанные с двумя основными концепциями в теории оптимальных квадратурных формул, а именно, с концепциями Гаусса и Колмогорова.

Библиография: 56 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	33
2. Оптимальные квадратуры на классах функций	36
3. Формулы типа Гаусса. Обобщения	40
4. Альтернативный подход	44
5. Интегрирование полигармонических функций	46
6. Сравнения квадратурных формул	49
Список литературы	50

1. Введение

В 1814 г. Карл Фридрих Гаусс опубликовал свою знаменитую квадратурную формулу

$$\int_a^b \mu(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (1.1)$$

наивысшей алгебраической степени точности. В идейном плане, она является одним из самых значимых вкладов того времени в численный анализ.

Почему эта простая формула важна? Можно привести несколько аргументов.

1. При каждом n существует единственная формула вида (1.1) наивысшей алгебраической степени точности, т.е. формула, основанная на n значениях функции f , которая интегрирует точно каждый многочлен степени $2n - 1$.

2. Коэффициенты A_k этой формулы положительные.

Легко показать, что если

$$A_k > 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда научных исследований Болгарского министерства науки и образования (грант № ММ-1402/2004.)

то равномерная норма оператора

$$S_n[f] := \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

на пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций ограничена и, следовательно,

$$S_n[f] \rightarrow \int_a^b \mu(x) f(x) dx \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \forall f \in C[a, b].$$

3. Узлы $x_1, \dots, x_n$ квадратурной формулы Гаусса лежат в нулях многочлена степени n , ортогонального всем многочленам степени $\leq n-1$ на $[a, b]$ с весом $\mu(x)$. Эта связь дала толчок развитию теории ортогональных многочленов.

4. Для каждого многочлена $f(x) = x^{2n} + \dots$ такого, что $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$, выполняется неравенство

$$\int_a^b \mu(x) f(x) dx \geq \int_a^b \mu(x) (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 dx,$$

где $x_1, \dots, x_n$ — узлы Гаусса.

5. Формула Гаусса открыла центральное направление в численном анализе, посвященное построению приближенных методов заданного вида, которые точны для всех многочленов наивысшей возможной степени.

Постановка Гаусса отражала классическое понимание, что алгебраические многочлены являются простыми, хорошими функциями — их можно легко дифференцировать, интегрировать, подсчитать значения в точках. Кроме того, по теореме Вейерштрасса, ими можно приблизить с произвольной заданной точностью любую непрерывную функцию. Поэтому каждый метод приближения, который хорош для широкого класса многочленов, считался хорошим методом. Однако с развитием вычислительной техники стало возможно решать сложные вычислительные задачи. Применение универсальных методов для конкретных, специфических задач оказалось не всегда эффективно. Иногда приходилось конструировать специальный метод для специального узкого класса задач, учитывая особенности класса рассматриваемых функций. Именно с появлением первых компьютеров начали активно рассматриваться теоретические вопросы, связанные с решением экстремальных задач на классах функций (поперечники, ϵ -энтропия, оптимальные алгоритмы). Тогда, в сороковых годах прошлого столетия, Андрей Николаевич Колмогоров поставил задачу:

Построить квадратурную формулу данного типа, которая имеет минимальную погрешность на данном классе функций.

Мы сформулируем задачу более четко. Нам нужны несколько определений.

Пусть $\mathcal{F}$ — заданное метрическое пространство функций, и пусть $L(f), L_1(f), \dots, L_n(f)$ — линейные функционалы, определенные в $\mathcal{F}$. Например,

$$L(f) := \int_a^b \mu(x) f(x) dx, \quad L_k(f) = f(x_k).$$

в качестве L_k могут быть выбраны значения функции или производной в заданной точке, определенные интегралы, коэффициенты Фурье и т. д. Мы будем называть множество

$$T(f) := \{L_1(f), \dots, L_n(f)\}$$

информацией о функции f .

Задача состоит в приближенном восстановлении $L(f)$ на основании информации $T(f)$.

Очевидно, что каждая действительная функция n переменных $S(t_1, \dots, t_n)$ порождает такой метод восстановления посредством формулы

$$L(f) \approx S(L_1(f), \dots, L_n(f)) =: S(f).$$

Погрешность метода S обычно определяется как

$$R(S, T) := \sup\{|L(f) - S(f)| : f \in B(\mathcal{F})\},$$

где $B(\mathcal{F})$ – единичный шар пространства $\mathcal{F}$ или другое подмножество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Метод S^* называется наилучшим методом восстановления функционала $L(f)$ на основании информации $T(f)$ на классе $\mathcal{F}$, если

$$R(S^*, T) = \inf_S R(S, T) =: R(T).$$

Здесь инфимум берется по всем допустимым методам.

Наилучший метод не всегда единствен. В 1965 г. С. А. Смоляк [49] показал, что среди наилучших методов, при некоторых ограничениях, существует линейный наилучший метод.

ЛЕММА СМОЛЯКА. Пусть $B(\mathcal{F})$ – заданное центрально-симметричное тело с центром симметрии 0 в линейном метрическом пространстве $\mathcal{F}$. Пусть линейные функционалы $L(f), L_1(f), \dots, L_n(f)$ определены на $\mathcal{F}$ и

$$\sup_{f \in B_0} L(f) < \infty,$$

где

$$B_0 := \{f \in B(\mathcal{F}) : L_k(f) = 0, k = 1, \dots, n\}.$$

Тогда существуют числа $\{A_k\}_1^n$ такие, что

$$\sup_{f \in B(\mathcal{F})} \left| L(f) - \sum_{k=1}^n A_k L_k(f) \right| = R(T).$$

Более общие вопросы, связанные с оптимальными алгоритмами восстановления функции и функционалов, можно найти в [51].

Стандартная информация, которая обычно используется в теории приближений, состоит из значений функции и ее последовательных производных в заданных точках (такую информацию называют информацией эрмитова типа):

$$T(\mathbf{x}; f) := \{f^{(j)}(x_k) : k = 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, \nu_k - 1\},$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$. Предположим, что наша задача – построить наилучший метод приближения интеграла от f на $[a, b]$ на основании информации эрмитова типа. В таком случае, при заданных $\nu_1, \dots, \nu_n$, погрешность $\mathcal{E}(x_1, \dots, x_n)$ наилучшего метода интегрирования является функцией узлов $x_1, \dots, x_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Узлы $x_1^*, \dots, x_n^*$ называются оптимальными типа $(\nu_1, \dots, \nu_n)$ на $\mathcal{F}$, если

$$a \leq x_1^* < \dots < x_n^* \leq b$$

и

$$\mathcal{E}(x_1^*, \dots, x_n^*) = \inf_{x_1 < \dots < x_n} \mathcal{E}(x_1, \dots, x_n).$$

Характеризация оптимальных узлов известных классов функций является трудной задачей. Именно она привлекла внимание математиков и была стимулом развития колмогоровской теории оптимальных квадратурных формул. В этом обзоре мы перечислим несколько конкретных результатов, которые указывают на дальнейшее развитие идей Гаусса и Колмогорова.

2. Оптимальные квадратуры на классах функций

Колмогоровская идея впервые получила развитие в работах [37], [38] Сергея Михайловича Никольского. Он изучал задачу восстановления интеграла на классах Соболева

$$W_p^r[a, b] := \{f : f^{(r-1)} \text{ абсолютно непрерывна, } \|f^{(r)}\|_p \leq 1\},$$

где $1 \leq p \leq \infty$ и, как обычно,

$$\|g\|_p := \left\{ \int_a^b |g(t)|^p dt \right\}^{1/p} \text{ для } 1 \leq p < \infty, \quad \|g\|_\infty := \sup_{a \leq t \leq b} |g(t)|.$$

В дальнейшем будем обозначать через π_m множество всех алгебраических многочленов степени не выше m .

Связь между квадратурными формулами на классах Соболева и сплайн-функциями была обнаружена и разработана в этих первых публикациях С. М. Никольского. Стоит отметить взаимно однозначное соответствие между классом квадратурных формул и моносплайнами. При заданном интервале $[a, b]$ нам будет удобнее записывать моносплайны степени r с узлами

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad a < x_1 < \dots < x_n < b,$$

кратностей $\nu_1, \dots, \nu_n$, соответственно, в виде

$$M(\mathbf{x}; t) = \frac{(b-t)^r}{r!} - \sum_{j=0}^{r-1} B_j \frac{(b-t)^{r-j-1}}{(r-j-1)!} - \sum_{k=1}^n \sum_{\lambda=0}^{\nu_k-1} a_{k\lambda} \frac{(x_k-t)_+^{r-\lambda-1}}{(r-\lambda-1)!}, \quad (2.1)$$

где $\{a_{k\lambda}\}$ и $\{B_j\}$ – действительные числа. Пусть J_1 и J_2 – заданные подмножества целых чисел,

$$J_1, J_2 \subset \{0, 1, \dots, r-1\}.$$

Обозначим через $\mathcal{M}(\mathbf{x}; J_1, J_2)$ класс всех моносплайнов $M(\mathbf{x}; t)$ вида (2.1), которые удовлетворяют следующим граничным условиям на J_1 и J_2 :

$$\begin{aligned} M^{(j)}(a) &= 0 \text{ для } j \in J_1, \\ M^{(j)}(b) &= 0 \text{ для } j \in J_2. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Каждый моносплайн $M(t)$ из класса $\mathcal{M}(\mathbf{x}; J_1, J_2)$ порождает квадратурную формулу вида*

$$\int_a^b f(t) dt \approx \sum_{j \in \bar{J}_1} A_j f^{(j)}(a) - \sum_{j \in \bar{J}_2} B_j f^{(j)}(b) - \sum_{k=1}^n \sum_{\lambda=0}^{\nu_k-1} a_{k\lambda} f^{(\lambda)}(x_k) =: Q[f], \quad (2.2)$$

где $\bar{J}_i := \{0 \leq j \leq r-1 : r-j-1 \notin J_i\}$, $i = 1, 2$, и коэффициенты A_j , B_j , $a_{k\lambda}$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} A_j &= (-1)^{r-j-1} M^{(r-j-1)}(a), \quad j = 0, 1, \dots, r-1, \\ B_j &= (-1)^{r-j} M^{(r-j-1)}(b), \quad j = 0, 1, \dots, r-1, \\ a_{k\lambda} &= (-1)^{r-\lambda} [M^{(r-\lambda-1)}(x_k - 0) - M^{(r-\lambda-1)}(x_k + 0)], \\ &\quad k = 1, \dots, n, \quad \lambda = 0, 1, \dots, \nu_k - 1, \end{aligned}$$

Эта квадратурная формула точна для всех многочленов из π_{r-1} . Обратно, каждая формула вида (2.2), которая точна для многочленов из π_{r-1} , определяет посредством равенства

$$\int_a^b f(t) dt - Q[f] = \int_a^b M(t) f^{(r)}(t) dt \quad (2.3)$$

моносплайн M из $\mathcal{M}(\mathbf{x}; J_1, J_2)$ с коэффициентами B_j , $a_{k\lambda}$, которые совпадают с коэффициентами квадратурной формулы (2.2).

Характеризация оптимальной квадратурной формулы заданного типа $(\nu_1, \dots, \nu_n)$ на классе $W_p[a, b]$ сводится через соотношение (2.3) к характеристике моносплайна M из $\mathcal{M}(\mathbf{x}; J_1, J_2)$ минимальной L_q -нормы, где q – сопряженное к p число, т.е. $1/p + 1/q = 1$. С.М. Никольским были построены оптимальные квадратурные формулы с одинаковыми кратностями узлов, т.е. типа $(\rho, \dots, \rho)$, при ρ , близком к r . Его ученики и ученики Н.П. Корнейчука из Днепропетровской школы далеко продвинули эту тематику, решая труднейшие экстремальные задачи. Все эти результаты подробно изложены в книге С.М. Никольского [39], которая в течение короткого периода времени выдержала четыре издания, а также в обширном дополнении к ней, написанном Н.П. Корнейчуком. Хорошее описание современного состояния теории оптимального восстановления можно найти в книге А.А. Женсыкбаева [56].

Одна из центральных проблем теории оптимальных квадратур на соболевских классах, которая приобрела широкую известность, состояла в доказательстве гипотезы, что равноотдаленные узлы являются оптимальными на периодических соболевских классах $\bar{W}_p^r$, если кратности узлов одинаковы. Много усилий было затрачено для доказательства этого интуитивно очевидного утверждения. Оно было уже проверено для малых r и для произвольных r , но при кратности ρ , близкой к r . Первые успехи касались случая простых узлов. Впервые В.П. Моторный [31] доказал гипотезу для $p = \infty$ и $p = 1$ (при четных r). Потом А.А. Лигун [27] рассмотрел случай нечетных r для $p = 1$ и Женсыкбаев [54], [55] нашел доказательство для каждого p , $1 \leq p \leq \infty$. В общем случае произвольных одинаковых кратностей гипотеза следует из единственности оптимальных узлов. Единственность оптимальных квадратур произвольного типа $(\nu_1, \dots, \nu_n)$ была установлена для $p = 2$ в [23] (К. Етер и Е. Лане), для $p = \infty$ в [2] (Р.Б. Беррар и Г.Л. Лоеб) и, наконец, для каждого p , $1 < p < \infty$, в [7] (Б. Боянов). В качестве примера приведем результат для случая простых узлов.

ТЕОРЕМА 2.2. Среди всех квадратурных формул вида

$$\int_0^1 f(t) dt \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k)$$

наилучшей для классов

$$\widetilde{W}_p^r := \{f \in W_p^r[0, 1] : f(t) = f(t+1) \forall t\}, \quad r = 1, 2, \dots, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

является формула прямоугольников

$$\int_0^1 f(t) dt \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Для $1 < p \leq \infty$ наилучшая формула единственна (с точностью до жесткого сдвига).

Полная характеристика оптимальных узлов для других известных классов функций еще далеко от завершения. Даже для хорошо изученных классов из аналитических функций нахождение экстремальных квадратур оказывается весьма трудной задачей. Например, известно, что на классе $H_\infty(B)$ всех аналитических и ограниченных на единичном круге B функций f , $|f(z)| \leq 1$ на B , которые принимают действительные значения для действительных z , погрешность $\mathcal{E}(x_1, \dots, x_n)$ наилучшей квадратуры с узлами $x_1, \dots, x_n$ дается формулой (см. [5])

$$\mathcal{E}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-1}^1 \prod_{k=1}^n \left(\frac{x - x_k}{1 - xx_k} \right)^2 dx.$$

Г. Л. Лоэб [28] доказал, что оптимальные узлы существуют, т.е. существуют точки $-1 < x_1^* < \dots < x_n^* < 1$, для которых

$$\mathcal{E}(x_1^*, \dots, x_n^*) = \inf_{-1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1} \int_{-1}^1 \prod_{k=1}^n \left(\frac{x - x_k}{1 - xx_k} \right)^2 dx.$$

Однако вопрос единственности оптимальных узлов на классе $H_\infty(B)$ пока остается открытым.

Общие методы решения экстремальных задач, возникающих в оптимальном восстановлении аналитических функций и функционалов от них, описаны в [41].

Для оценки скорости сходимости оптимальных квадратурных формул обычно используется следующее соотношение двойственности, доказанное С. М. Никольским [36].

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $\mathcal{F}$ – нормированное пространство, $L, L_1, \dots, L_n$ – фиксированная система линейных ограниченных функционалов на F . Тогда

$$\inf_{b_k} \left\| L(f) - \sum_{k=1}^n b_k L_k(f) \right\| = \sup \{ L(f) : f \in F_0 \},$$

где

$$F_0 := \{f \in F : L_k(f) = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad \|f\| \leq 1\}.$$

Применение соотношения двойственности к классам

$$H_p(B) := \left\{ f : f \text{ — аналитическая на } D, \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} \leq 1 \right\}$$

приводит к следующей оценке погрешности $\mathcal{E}_{p,n}$ оптимальной квадратуры:

$$\mathcal{E}_{p,n} \leq C \inf_{x_1, \dots, x_n} \left(\int_{-1}^1 \prod_{k=1}^n \left| \frac{x - x_k}{1 - x x_k} \right|^{2q} dx \right)^{1/q},$$

из которой можно получить точный порядок (см. [1])

$$\mathcal{E}_{p,n} \leq C_1 n^{1/(2q)} e^{-\pi \sqrt{n/q}}.$$

Здесь C и C_1 — абсолютные постоянные.

Идеи Гаусса и Колмогорова доминируют в теории оптимальных квадратурных формул. Исследования экстремальной задачи Колмогорова в последнее время раскрыли близкую связь и аналогию с классическими результатами по формулам Гаусса и подняли новые интересные вопросы в классической области. С одной стороны, формулу Гаусса можно рассматривать как решение задачи Колмогорова на классе многочленов

$$\{x^{2n} + \text{многочлен степени } \leq 2n - 1\},$$

т.е. она является формулой минимальной погрешности на этом классе среди всех формул, использующих n значений функции. С другой стороны, оптимальная формула в смысле Колмогорова на большинстве исследованных классов функций точна на некотором подпространстве этих классов размерности $2n$, т.е. она является формулой типа Гаусса по отношению к этим специальным подпространствам. Например, оптимальная формула на классе $W_2^r[a, b]$ точна на классе естественных сплайнов степени $2r - 1$ с узлами в оптимальных узлах формулы. Оптимальная формула на классе $H_\infty(B)$ точна для специального подпространства рациональных функций размерности $2n$.

Дадим еще один пример аналогии результатов в классическом и новом направлениях теории оптимальных квадратур. Он касается результата А. А. Маркова, который вывел формулу Гаусса, рассматривая формулы интерполяционного типа с двойными узлами:

$$\int_a^b \mu(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) + \sum_{k=1}^n b_k f'(x_k). \quad (2.4)$$

Для каждого выбора узлов

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad x_1 < \dots < x_n,$$

квадратура (2.4) интегрирует точно все алгебраические многочлены степени $2n - 1$. Марков показал, что существует выбор узлов $\mathbf{x}$, при котором $b_k(\mathbf{x}) = 0$, $k = 1, \dots, n$. И это именно узлы Гаусса. Следовательно, формула Гаусса является оптимальной на более широком классе формул с n двойными узлами и узлы Гаусса аннулируют коэффициенты первой производной. Аналог результата Маркова получен в [6]. Грубо говоря, он утверждает, что

при некоторых естественных ограничениях на класс функций $\mathcal{F}$ оптимальная квадратурная формула типа (2.4) на $\mathcal{F}$ такова, что

$$b_k = 0, \quad a_k > 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Приведенные примеры показывают, что существует тесная связь между классическим и новым направлениями в теории оптимальных квадратурных формул и всякий прогресс в одном из этих направлений стимулирует развитие другого. В последующих разделах мы приводим некоторые недавние результаты и открытые проблемы, которые появились в связи с развитием идей Гаусса и Колмогорова.

3. Формулы типа Гаусса. Обобщения

Сразу же после появления формулы Гаусса были получены непосредственные обобщения. Якоби предложил новое простое доказательство, Кристоффель ввел вес, Чебышев и Марков рассматривали формулы Гаусса с ограничениями на узлы и коэффициенты. Мы не будем здесь перечислять все многочисленные обобщения. Остановимся только на трех направлениях, в которых, по нашему мнению, идея Гаусса получила замечательное развитие.

I. Формулы с кратными узлами. Алгебраическая степень точности данной квадратурной формулы – это самая высокая степень m – такова, что квадратура точна для всех многочленов из π_m . Алгебраическая степень точности формулы Гаусса с n узлами равна $2n - 1$. Какую степень точности можно достичь формулой заданного эрмитова типа? В результате усилий многих математиков было доказано следующее.

Для произвольного заданного множества нечетных кратностей $\nu_1, \dots, \nu_n$ существует единственная квадратурная формула вида

$$\int_a^b \mu(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{\nu_k-1} a_{kj} f^{(j)}(x_k)$$

наивысшей алгебраической степени точности, которая равна $\nu_1 + \dots + \nu_n + n - 1$.

П. Туран [53] доказал это утверждение в случае одинаковых кратностей. Существование оптимальных узлов в общем случае доказал впервые Л. Чакалов [52] (см. также [46]). Известно, что оптимальные узлы $\{x_k^*\}$ дают минимум интеграла

$$\int_a^b \prod_{k=1}^n (x - x_k)^{\nu_k+1} dx.$$

Доказать существование оптимальных узлов означает показать, что этот интеграл достигает своего минимального значения в несовпадающих точках, т.е. что $x_1^* < \dots < x_n^*$. Доказательство Чакалова вариационное. В [8] мы привели новое, короткое доказательство, основанное на теореме о неподвижной точке.

Вопрос единственности оптимальных узлов оставался открытым долгое время. Задача сводилась к решению специальной системы нелинейных уравнений. В 1975 г.

итальянские математики А. Гизетти и А. Оссиини [20] дали исключительно красивое доказательство единственности решения. Этот результат является кульминацией классической теории оптимальных квадратурных формул.

Формула Гаусса использует только значения функции. Можно ли достичь такой же степени точности, используя n значений, включая и производные функции? Ответ дает следующий результат [13].

Для каждого набора показателей $k_1, \dots, k_n$ (удовлетворяющих условию Поля) существует квадратурная формула вида

$$\int_a^b \mu(x) f(x) dx = \sum_{j=1}^n a_j f^{(k_j)}(x_j)$$

с алгебраической степени точности $2n - 1$.

II. Квадратуры для системы Чебышева. Говорят, что функции $u_0, \dots, u_m$ образуют систему Чебышева (T -систему) на множестве точек $\mathcal{A}$, если каждый ненулевой обобщенный многочлен $a_0 u_0(x) + \dots + a_m u_m(x)$ по этой системе имеет на $\mathcal{A}$ не более чем m различных нулей.

Следующее интересное обобщение результата Гаусса доказал М. Г. Крейн [26].

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\mu(t)$ – произвольная весовая функция из $L_1[a, b]$. Тогда для каждой системы Чебышева $u_0, \dots, u_{2n-1}$ непрерывных функций на $[a, b]$ существует единственная квадратурная формула вида

$$\int_a^b \mu(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k),$$

которая точна для $u_0, \dots, u_{2n-1}$.

Расширение этого результата на формулы с кратными узлами получили С. Карлин и А. Пинкус [25]. При более общих предположениях единственность оптимальной формулы произвольного типа $(\nu_1, \dots, \nu_n)$ доказал Д. Л. Берроу [3], впервые применив метод топологической степени отображения для задач теории аппроксимации. Дальнейшие обобщения в этом направлении получены в [10] и [4].

В задачах практики обычно информация предоставляется в виде таблиц чисел, чаще всего значений функций, которые получены как результат эксперимента или вычислений. Естественно предполагать, что в таких случаях значения эти, как и точки, в которых они берутся, заданы с некоторой ошибкой. Тогда числа информационной таблицы можно интерпретировать как усредненные значения функции на малых окрестностях точек таблицы. Кроме того, есть примеры практических задач, при которых информация действительно представлена в виде интегралов от функции на разных интервалах. Так естественно возникает задача о наилучшем приближении интеграла на некотором интервале $[a, b]$ на основании интегралов от функции на n подынтервалах. Поскольку для непрерывной функции f

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(x),$$

то таблицы усредненных значений включают как частный случай значения в точках (когда длина интервала усреднения равна нулю). Так что имеются основания рассматривать классические точечные задачи в такой более общей постановке и искать их естественные расширения. Например, интервальная постановка задачи Гаусса выглядела бы следующим образом.

Пусть заданы произвольные длины $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$, $h_1 \geq 0, \dots, h_n \geq 0$, удовлетворяющие условию $h_1 + \dots + h_n \leq b - a$. Рассмотрим множество X точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ таких, что

$$a \leq x_1 \leq x_1 + h_1 < x_2 \leq x_2 + h_2 < \dots < x_n \leq x_n + h_n \leq b.$$

Найти квадратурную формулу вида

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=1}^n a_k \frac{1}{h_k} \int_{x_k}^{x_k+h_k} f(t) dt,$$

с узлами в X , с наивысшей алгебраической степени точности.

Нетрудно заметить, что не существует квадратуры такого вида, которая была бы точна для многочленов степени $2n$. Так что максимальная степень, которую можно ожидать, равна $2n - 1$, как в классической формуле Гаусса. Обратим внимание на то, что подынтервалы выше предполагаются непересекающимися. Без этого ограничения задача становится очень сложной, так как интерполяция многочленами в смысле усредненных значений на произвольных подынтервалах не всегда имеет решение в этой общей постановке. Зато интерполяция по непересекающимся интервалам всегда имеет единственное решение.

Интервальная задача Гаусса сильно нелинейная. При каждом выборе допустимого множества параметров $\mathbf{h}$ надо показать, что существуют узлы $\mathbf{x}$, которые удовлетворяют некоторой нелинейной системе уравнений. Первые результаты (см. [44], [45]) были в том смысле, что можно найти некоторые довольно малые $\{h_k\}$, для которых существует интервальная квадратурная формула алгебраической степени точности $2n - 1$. Как и следовало ожидать, узлы $\mathbf{x}$ этой формулы находятся в окрестностях соответствующих узлов точечной формулы Гаусса. Весьма общая теорема существования, при каждом допустимом $\mathbf{h}$, доказана в [14] при помощи теоремы Борсука о антиподах. Единственность была установлена сначала (см. [40], [14]) только для случая одинаковых длин, $h_1 = \dots = h_n$, а недавно и для общего случая (см. [15]). Интервальный аналог теоремы Крейна получен в [16]. В нем используются взвешенные усредненные значения

$$\int_{x_k}^{x_k+h_k} \mu(t) f(t) dt \quad \left(I_k^\circ := \int_{x_k}^{x_k+h_k} \mu(t) dt \right).$$

Заметим, что

$$\lim_{h_k \rightarrow 0} \frac{1}{I_k^\circ} \int_{x_k}^{x_k+h_k} \mu(t) f(t) dt = f(x_k),$$

т.е. точечный вариант включается как частный случай. Для простоты мы здесь приводим только непосредственное следствие результата, касающееся алгебраических многочленов.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть μ – произвольная суммируемая на $[a, b]$ функция, которая непрерывна и положительна на (a, b) . Тогда для каждого множества неотрицательных чисел $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$, удовлетворяющих условию $h_1 + \dots + h_n \leq b - a$, существует единственный набор узлов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X$ и коэффициентов $\{a_k\}$ таких, что

$$\int_a^b \mu(t) f(t) dt = \sum_{k=1}^n a_k \frac{1}{I_k^0} \int_{x_k}^{x_k + h_k} \mu(t) f(t) dt$$

для каждого алгебраического многочлена f степени не выше $2n - 1$.

Методы вычисления оптимальных подынтервалов для интегрирования с весом Якоби разработаны в [30].

III. Многомерные интегралы. Множество всех алгебраических многочленов d переменных *тотальной степени* n будем обозначать через $\pi_n(\mathbb{R}^d)$, т.е.

$$\pi_n(\mathbb{R}^d) := \left\{ \sum_{|\mathbf{k}|=0}^n c_{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} \right\}.$$

Многомерный аналог задачи Гаусса можно сформулировать в следующей форме.

При заданных числе N , области Ω в $\mathbb{R}^d$ и весовой функции $\mu(\mathbf{x})$ на Ω , какова наивысшая алгебраическая степень точности кубатурной формулы вида

$$\int_{\Omega} \mu(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{k=1}^N a_k f(\mathbf{x}_k),$$

где коэффициенты $\{a_k\}$ и узлы $\{\mathbf{x}_k\}$ – свободные параметры? Найти характеристику оптимальных узлов.

Обычно используется эквивалентная формулировка: при заданном n , каково минимальное число $N^*(n)$ узлов, для которых существует кубатурная формула, основанная на n значениях интегрируемой функции, с алгебраической степенью точности $2n - 1$? Такую формулу, если она существует, будем называть *минимальной*.

В случае $d = 2$, при условии, что Ω и μ обладают центральной симметрией относительно 0, Г. М. Меллер [33] доказал оценку

$$N^*(n) \geq \frac{1}{2}n(n+1) + \left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor.$$

Несмотря на усилия многих математиков, пока нет многомерного аналога точечной формулы Гаусса даже для самых простых областей. Конечно, найдены многочисленные примеры минимальных кубатур на шаре, на квадрате или на симплексах, но только для конкретных, малых значений числа узлов. Отсутствует (для какой-либо простой области) описание всех конфигураций узлов, которые порождают гауссовские кубатуры для каждого n . Известен только один пример описания гауссовской кубатуры на квадрате для бесконечного числа значений n . Этот пример дали впервые Морроу и Т. Н. Л. Патерсон [32] и переоткрывали потом другие. Пример относится к интегрированию на квадрате $R := [-1, 1] \times [-1, 1]$ с чебышевским весом

$$w(x, y) := \{(1 - x^2)(1 - y^2)\}^{-1/2}.$$

Введем обозначение

$$\eta_j := \cos \frac{j\pi}{n}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

для экстремальных точек многочлена Чебышева первого рода $T_n(x) = \cos n \arccos x$.

ТЕОРЕМА 3.3 (К. Р. Морроу и Т. Н. Л. Патерсон). *Для каждого n кубатурная формула*

$$\int_R w(x, y) f(x, y) dx dy \approx \frac{\pi}{n} \sum'_{k - \text{нечетное}} \sum'_{j - \text{четное}} f(\eta_k, \eta_j)$$

точна для всех многочленов $f \in \pi_{2n-1}(\mathbb{R}^2)$. Более того, для четных n она минимальна.

Здесь штрих означает, что первое и последнее слагаемое берутся с коэффициентом $1/2$.

Конфигурация узлов описывается очень просто: берется сетка $\{(\eta_k, \eta_j)\}$ и из нее выбираются только те точки, у которых k – нечетное, а j – четное. Вопрос единственности остается открытым. Для нечетных n пока нет описания конфигурации оптимальных узлов.

4. Альтернативный подход

Без сомнения, самый естественный способ хранения в памяти компьютера и компьютерной реализации одномерной функции – это таблица значений в точках. На основании точечной информации о функции построены основные классические методы численного решения одномерных задач. Элегантность и простота решения некоторых из них – тоже признак естественности точечной постановки задачи. Формула Гаусса, интерполяционная формула Лагранжа, метод Ньютона решения уравнений, метод Ремеза построения наилучшего равномерного приближения – убедительные примеры в поддержку этого тезиса. Значение функции в точке является основным элементом информации и в многомерных задачах. Но здесь уже появляются альтернативные, конкурирующие подходы. Непосредственные точечные аналоги классических одномерных задач в многомерном случае не всегда допускают решение. Например, интерполяционная задача Лагранжа даже в двумерном случае не всегда разрешима. Без значимого успеха остались попытки расширить результат Гаусса для приближения многомерных интегралов кубатурными формулами на простых областях. Эти обстоятельства подсказывают исследователям искать альтернативные постановки при решении многомерных задач. С расширением охвата практических задач, исследуемых компьютерными методами, стало ясно, что не всегда точечная информация самая удобная форма исходных условий. Есть, например, области практики и науки, такие, как томография, электронная микроскопия и другие, при которых выходные данные предоставляются в виде интегралов на линейных сегментах. В таких случаях мы даже обязаны рассматривать численные методы, основанные на информации такого вида. И, что действительно удивительно, – оказывается, что при такой постановке многомерная задача иногда допускает красивое решение. Интерполяционная формула Акопяна [21] (см. также [22]) является замечательным примером. Мы приведем здесь и другие примеры приближенных формул, использующих интегральную информацию.

Пусть функция $f(x, y)$ суммируема на единичном диске $B := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Параметры

$$(\theta, t), \quad \theta \in [0, \pi), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

определяют прямую $\ell(\theta, t; x, y)$ уравнением

$$x \cos \theta + y \sin \theta = t.$$

Иными словами, ℓ – прямая линия, которая ортогональна вектору $(\cos \theta, \sin \theta)$ и проходит на расстоянии t от начала системы координат. Введем хорду

$$I(\theta, t) := \ell(\theta, t; x, y) \cap B.$$

Для $t \in [-1, 1]$ проекция Радона $\mathcal{R}_\theta(f; t)$ функции f с направлением θ определяется как интеграл от функции на линейном сегменте $I(\theta, t)$:

$$\mathcal{R}_\theta(f; t) = \int_{I(\theta, t)} f := \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds.$$

Известно, что функция f полностью определяется своими проекциями Радона, т.е. можно восстановить f по ее преобразованию Радона

$$f \rightarrow \{\mathcal{R}_\theta(f; t) : (\theta, t), \theta \in [0, \pi), 0 \leq t \leq 1\}.$$

Этот фундаментальный результат принадлежит Е. Радону [47] (см. также [24] и [50]).

Для алгебраических многочленов $P(x, y)$ необходимо знать только конечное число проекций Радона, чтобы восстановить P . Верно следующее утверждение [29].

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\theta_0 < \dots < \theta_n$ – произвольные углы в $[0, \pi)$. Тогда проекции

$$\mathcal{R}_{\theta_k}(P; t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

определяют P единственным образом.

Так как

$$\mathcal{R}_\theta(P; t) = \sqrt{1-t^2} p(t)$$

с некоторым многочленом p одной переменной, то ясно, что можно найти $\mathcal{R}_\theta(P; t)$ для каждого t по интерполяционной формулой Лагранжа, зная значения в конечном числе точек t . Весьма частный случай интерполяционного результата Акопяна [21] дает следующий более сильный результат.

Для каждого набора из $n+2$ различных точек $M_0, \dots, M_{n+1}$ на границе диска B множество интегралов от P на всех линейных сегментах $[M_k, M_j]$ определяет многочлен P тотальной степени n однозначно.

Интегрируя интерполяционную формулу Акопяна на диске B , получим кубатурную формулу, точную для всех двумерных многочленов степени n , в виде линейных комбинаций конечного числа проекций Радона. В связи с этим естественно возникает экстремальная задача типа Гаусса:

Какова максимальная алгебраическая степень точности кубатурной формулы вида

$$\int_B f(x, y) dx dy \approx \sum_{k=1}^n C_k \int_{I_k} f \quad (4.1)$$

для пространства двумерных многочленов, где коэффициенты $\{C_k\}$, углы $\{\theta_k\}$ и числа $\{t_k\}$ (которые описывают расположение хорд $I_k := I(\theta_k, t_k)$) – свободные параметры?

Задача была поставлена и исследовалась в [17], [18], где выведен следующий двумерный аналог классической формулы Гаусса.

Обозначим через $\eta_1, \dots, \eta_n$ нули многочлена Чебышева второго рода $U_n(x)$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Кубатурная формула*

$$\int_B f(x, y) dx dy \approx \sum_{k=1}^n A_k \int_{-\sqrt{1-\eta_k^2}}^{\sqrt{1-\eta_k^2}} f(\eta_k, y) dy,$$

где

$$A_k = \frac{\pi}{n+1} \sin \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, \dots, n,$$

точна для всех двумерных алгебраических многочленов $f \in \pi_{2n-1}(\mathbb{R}^2)$. Это единственная (с точностью до вращения) формула вида (4.1) наивысшей алгебраической степени точности.

Результат распространяется на общий d -мерный случай (см. [18]) интегрирования на шаре

$$\mathbf{B}^d(r) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}\| \leq r\} \quad (\mathbf{B}^d := \mathbf{B}^d(1)),$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ обозначает точку из $\mathbb{R}^d$ и

$$\|\mathbf{x}\| := (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{1/2}.$$

Для заданного единичного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$, $\|\xi\| = 1$, и числа t определим гиперплоскость $\beta(\xi, t)$, ортогональную вектору ξ и проходящую через точки $t\xi$.

Напомним, что в многомерном случае проекция Радона функции f определяется равенством

$$\mathcal{R}_\xi(f; t) := \int_{\beta(\xi, t) \cap \mathbf{B}^d} f, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

ТЕОРЕМА 4.3. *Для каждого натурального числа n и размерности d существует единственная с точностью до вращения кубатурная формула вида*

$$\int_{\mathbf{B}^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{k=1}^n A_k \mathcal{R}_{\xi_k}(f; t_k),$$

точная для всех многочленов пространства $\pi_{2n-1}(\mathbb{R}^d)$. Параметры $\{t_k\}$ экстремальной формулы лежат в нулях многочлена Гегенбауэра, ортогонального всем многочленам степени $n-1$ на $[-1, 1]$ с весом $(1-t^2)^{(d-1)/2}$.

5. Интегрирование полигармонических функций

Функция f называется *полигармонической* порядка m на шаре $\mathbf{B}^d(r)$, если

$$\Delta^m f = 0 \quad \text{на } \mathbf{B}^d(r).$$

Обозначим через $H^{(m)}(\mathbf{B}^d(r))$ класс всех функций u , полигармонических порядка m в некоторой окрестности, содержащей $\mathbf{B}^d(r)$.

Рассмотрим кубатурные формулы для интеграла

$$\int_{\mathbf{B}^d(r)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

с возможно более высоким *полигармоническим порядком точности* (ППТ). Поскольку очевидно, что

$$\pi_{2m-1}(\mathbb{R}^d) \subset H^{(m)}(\mathbf{B}^d(r)),$$

каждая формула полигармонического порядка точности m имеет алгебраическую степень точности $2m - 1$. Таким образом, методами теории полигармонических функций можно строить и исследовать кубатурные формулы высокой алгебраической степени точности. Здесь мы приведем примеры таких формул. Начнем с классического результата П. Пицетти [43].

ФОРМУЛА ПИЦЕТТИ. Для каждой полигармонической функции u порядка m на шаре $\mathbf{B}^d(r)$ выполняется равенство

$$\int_{\mathbf{B}^d(r)} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \pi^{d/2} r^d \sum_{k=0}^{m-1} \frac{r^{2k}}{2^{2k} \Gamma(d/2 + k + 1)} \frac{\Delta^k u(0)}{k!}.$$

Формула Пицетти была обобщена в [9], где в качестве информации были взяты усредненные значения лапласианов на сфере $S(\rho)$ радиуса $\rho \geq 0$. В частном случае, когда $\rho = 0$, получается результат Пицетти.

ТЕОРЕМА 5.1. Для каждого ρ , $0 \leq \rho \leq r$, существуют коэффициенты $\{a_k(\rho)\}_{k=0}^{m-1}$ такие, что кубатурная формула

$$\int_{\mathbf{B}^d(r)} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k(\rho) \frac{1}{\gamma_d \rho^{d-1}} \int_{S(\rho)} \Delta^k u(\xi) d\sigma(\xi) \quad (5.1)$$

становится точна для каждой полигармонической функции u порядка m .

Здесь $\sigma(\xi)$ – поверхностная мера на соответствующей сфере.

В частности, при $m = 2$, беря $\rho = \rho_1$ такое, что $\frac{r^2}{d+2} - \frac{\rho_1^2}{d} = 0$, получаем простую кубатурную формулу

$$\int_{\mathbf{B}^d(r)} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{r}{d} \left(\frac{d+2}{d} \right)^{\frac{d-1}{2}} \int_{S(\rho_1)} u(\xi) d\sigma(\xi),$$

которая точна для всех бигармонических функций. Этот факт установил другим непосредственным способом Д. Димитров [19].

Аналогично для $m = 3$, выбирая подходящим образом параметр ρ , именно,

$$\rho_2 = \left(\frac{n}{n+4} \right)^{\frac{1}{2}} r,$$

получаем простую кубатурную формулу

$$\int_{\mathbf{B}^d(r)} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{r}{n} \left(\frac{n+4}{n} \right)^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \int_{S(\rho_2)} u(\xi) d\sigma(\xi) + \frac{r^2}{(n+2)(n+4)} \int_{S(\rho_2)} \Delta u(\xi) d\sigma(\xi) \right\},$$

точную для всех 3-гармонических функций. При этом формула такого вида и такой точности единственна.

Остается открытым вопрос: при каждом ли m существует (единственное) ρ , для которого последний коэффициент в (5.1) обращается в нуль? В случае положительного ответа мы имели бы единственную формулу вида (5.1) гауссовского типа.

Приведем теперь другой результат из [11], в котором построена кубатурная формула на шаре, использующая интегралы по концентрическим сферам $S(\rho_k)$ радиуса ρ_k .

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\mu(t)$ – произвольная весовая функция на $[0, 1]$. Существуют единственная последовательность радиусов $0 < \rho_1 < \dots < \rho_m \leq 1$ и соответствующие действительные коэффициенты A_k , $k = 1, \dots, m$, такие, что кубатурная формула

$$\int_{\mathbf{B}^d} u(\mathbf{x}) \mu(\|\mathbf{x}\|) d\mathbf{x} \approx \sum_{k=1}^m A_k \int_{S(\rho_k)} u(\xi) d\sigma(\xi) \quad (5.2)$$

интегрирует точно все полигармонические функции порядка $2m$. Экстремальные радиусы расположены в положительных нулях многочлена степени $2m$, ортогонального на $[-1, 1]$ с весом $|t|^{d-1}$ всем многочленам степени $2m - 1$.

Как следствие отсюда получается, что формула (5.2) имеет самую высокую алгебраическую степень точности, равную $4m - 1$. Этот результат уже давно известен в двумерном случае и принадлежит Л. А. Люстернику и Канторовичу (см. [34; с. 128]).

Недавно Г. Петрова [42] показала, что формула в предыдущей теореме с этим экстремальным свойством единственна даже на классе всех формул, использующих m интегралов на произвольных (не обязательно концентрических) сферах в шаре.

Наконец, дадим еще один пример формулы гауссовского типа, построенной на основании усредненных значений по окружностям на сфере. Он получен в [12].

Конструкция формулы связана с формулой Гаусса на $[-1, 1]$ с весом

$$\mu_d(t) := (1 - t)^{\frac{d-3}{2}},$$

а именно,

$$\int_{-1}^1 \mu_d(t) f(t) dt \approx \sum_{k=1} \tilde{\alpha}_k f(\lambda_k).$$

Ниже, в теореме, $C(\lambda, \xi)$ – это пересечение единичной сферы S^{d-1} в $\mathbb{R}^d$ с плоскостью, ортогональной вектору ξ и проходящей через точку $\lambda\xi$.

ТЕОРЕМА 5.3. Для каждого $\xi \in S^{d-1}$ квадратурная формула

$$\int_{S^{d-1}} P(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) \approx \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_{C(\lambda_k, \xi)} P(\mathbf{x}) d\sigma_k(\mathbf{x}),$$

где

$$\alpha_k = \frac{\tilde{\alpha}_k}{(1 - \lambda_k^2)^{\frac{d-2}{2}}},$$

интегрирует точно все d -мерные алгебраические многочлены P тотальной степени $2n - 1$.

Вопрос единственности (с точностью до вращения) экстремальной квадратуры пока открыт. В [12] приведены несколько результатов, которые дают только частичную характеризацию экстремальных окружностей $\{C(\lambda_k, \xi)\}$.

6. Сравнения квадратурных формул

В задаче Гаусса, как и в задаче Колмогорова, задается тип формулы и ищутся оптимальные в каком-то смысле параметры. В задаче Колмогорова минимизируется погрешность на классе. В задаче Гаусса тоже можно определить погрешность формулы как погрешность на классе всех многочленов степени $2n$ с фиксированным старшим коэффициентом. Так что в обоих случаях можно говорить о погрешности $\mathcal{E}$ формулы. Пусть две формулы разного типа, типа Q_1 и типа Q_2 , используют одно и то же число элементов информации, скажем, N значений функции и некоторых производных. Пусть $\mathcal{E}(Q_1)$ и $\mathcal{E}(Q_2)$ – соответствующая погрешность оптимальных формул (в заданном смысле). Если $\mathcal{E}(Q_1) < \mathcal{E}(Q_2)$, то ясно, что информация первого типа более полезна для вычисления интеграла, чем информация второго типа. Интуитивно ясно, например, что оптимальная формула, основанная на n значениях функции, будет иметь меньшую погрешность, чем оптимальная формула, использующая n значений тейлоровского типа $f(c), f'(c), \dots, f^{(n-1)}(c)$ при произвольном c . Весьма показателен следующий простой пример.

Предположим, что $0 \leq k_1 < \dots < k_m < r$. Пусть

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=0}^{r-1} A_j f^{(j)}(a) + \sum_{j=1}^m B_j f^{(k_j)}(b)$$

– наилучшая формула этого вида на классе Соболева $W_p^r[a, b]$. Как показал Г. Николов [35],

$$\mathcal{E}(k_1^\circ, \dots, k_m^\circ) \leq \mathcal{E}(k_1, \dots, k_m)$$

в предположении, что

$$k_j^\circ \leq k_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Иначе говоря, чем ниже порядок производных в формуле, тем меньше погрешность на классах Соболева.

Непосредственно из доказательства Николова следует интересный факт:

$$\inf_{c_1, \dots, c_m} \|x^r - (c_1 x^{r-1} + \dots + c_m x^{r-m})\|_q \leq \inf_{c_1, \dots, c_m} \|x^r - (c_1 x^{\lambda_1} + \dots + c_m x^{\lambda_m})\|_q,$$

где $\lambda_j = r - k_j - 1$ и q – сопряженное число к p . Задача такого вида сравнения аппроксимационных свойств мономов была поставлена Г. Лоренцем и решена П. Смитом [48].

По-видимому, верно следующее сравнение более общего вида на классах Соболева и классах Харди $H_p(B)$ аналитических на круге функций.

Пусть тип квадратурной формулы задается матрицей инцидентности $\mathbf{E}$ из n строк и r столбцов. Элементами $\mathbf{E}$ могут быть 0 или 1. При этом единица на k -й позиции i -й строки означает, что $(k-1)$ -я производная в i -м узле участвует в формуле. Предполагаем, что все рассматриваемые здесь матрицы удовлетворяют условию Пойа: *в первых k столбцах лежит не менее чем k единиц*, $k = 1, \dots, r$. Мы пишем

$$\mathbf{E}_1 \prec \mathbf{E}_2 \tag{6.1}$$

если матрицы имеют одинаковую размерность, содержат одно и то же число единиц и k -я единица в i -й строке в $\mathbf{E}_1$ находится не выше, чем в $\mathbf{E}_2$.

Обозначим через $\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{E})$ погрешность наилучшей квадратурной формулы типа $\mathbf{E}$ на классе Соболева $W_p^r[a, b]$.

ГИПОТЕЗА. Если две матрицы инцидентности удовлетворяют условию (6.1), то для каждого набора узлов $\mathbf{x}$

$$\inf_{\mathbf{y}} \mathcal{E}(\mathbf{y}, \mathbf{E}_1) \leq \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{E}_2). \quad (6.2)$$

Подобное предположение можно сформулировать и для квадратур Гаусса. Оно будет относиться к сравнению интегральных норм положительных многочленов четной степени. Сформулируем одну нерешенную задачу этого типа.

Пусть задана пара $(\mathbf{x}, \mathbf{E})$, где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$ и $\mathbf{E}$ — матрица инцидентности размерности $n \times r$, которая содержит только четные блоки единиц, и число единиц равно $2N$. Пусть многочлен

$$Q(x) = x^{2N} + \dots$$

удовлетворяет условию $Q|_{(\mathbf{x}, \mathbf{E})} = 0$, т.е. $Q^{(k-1)}(x_i) = 0$, если $\mathbf{E}$ содержит 1 на k -й позиции в i -й строке. Пусть $\mathbf{H}$ — эрмитова матрица, которая получается из матрицы $\mathbf{E}$ перестановкой всех единиц в начало соответствующей строки. Очевидно, что $\mathbf{H} \prec \mathbf{E}$. Пусть

$$P(\mathbf{y}; t) = t^{2N} + \dots, \quad P|_{(\mathbf{y}, \mathbf{H})} = 0.$$

Верно ли, что

$$\inf_{y_1, \dots, y_n} \int_a^b P(\mathbf{y}; t) dt \leq \int_a^b Q(t) dt?$$

В [13] доказано, что если $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ содержат только одну пару единиц в каждой строке, то (6.1) влечет (6.2), где погрешность $\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{E})$ определена в смысле погрешности формулы Гаусса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J.-E. Andersson, B. D. Bojanov. A note on the optimal quadrature in H^p // Numer. Math. 1984. V. 44. № 2. P. 301–308.
- [2] R. B. Barrar, H. L. Loeb. On a nonlinear characterization problem for monosplines // J. Approx. Theory. 1976. V. 18. № 3. P. 220–240.
- [3] D. L. Barrow. On multiple node Gaussian quadrature formulae // Math. Comp. 1978. V. 32. № 142. P. 431–439.
- [4] B. D. Bojanov, G. R. Grozev, A. A. Zhensykbayev. Generalized Gaussian quadrature formulas for weak Tchebyshev systems // Optimal Recovery. Proceedings of the 2nd International Symposium on Optimal Control (Varna, 1989) / ed. B. Bojanov and H. Wozniakowski. Commack: Nova Science, 1992. P. 115–140.
- [5] Б. Д. Боянов. Оптимальная скорость интегрирования и ε -энтропии одного класса аналитических функций // Матем. заметки. 1973. Т. 14, № 1. С. 3–10.
- [6] B. D. Bojanov. On the existence of optimal quadrature formulae for smooth functions // Calcolo. 1979. V. 16. № 1. P. 61–70.
- [7] B. D. Bojanov. Uniqueness of the optimal nodes of quadrature formulae // Math. Comp. 1981. V. 36. № 154. P. 525–546.
- [8] B. Bojanov. Optimal recovery of functions and integrals // First European Congress of Mathematics (Paris, 1992) V. I. Invited Lectures (Part 1). Basel: Birkhäuser, 1994. P. 371–390. (Progr. Math. V. 119.)
- [9] B. Bojanov. An extension of the Pizzetti formula for polyharmonic functions // Acta Math. Hungar. 2001. V. 91. № 1–2. P. 99–113.
- [10] B. Bojanov, D. Braess, N. Dyn. Generalized Gaussian quadrature formulas // J. Approx. Theory. 1986. V. 48. № 4. P. 335–353.

- [11] B. D. Bojanov, D. K. Dimitrov. Gaussian extended cubature formulae for polyharmonic functions // *Math. Comp.* 2001. V. 70. № 234. P. 671–683.
- [12] B. Bojanov, V. Gushev. A quadrature formula of Gaussian type on the sphere // *East J. Approx.* 2005. V. 11. № 2. P. 119–130.
- [13] B. Bojanov, G. Nikolov. Comparison of Birkhoff type quadrature formulae // *Math. Comp.* 1990. V. 54. № 190. P. 627–648.
- [14] B. D. Bojanov, P. P. Petrov. Gaussian interval quadrature formula // *Numer. Math.* 2001. V. 87. № 4. P. 625–643.
- [15] B. Bojanov, P. Petrov. Uniqueness of the Gaussian interval quadrature formula // *Numer. Math.* 2003. V. 95. № 1. P. 53–62.
- [16] B. Bojanov, P. Petrov. Gaussian interval quadrature formulae for Tchebycheff systems // *SIAM J. Numer. Anal.* 2005. V. 43. № 2. P. 787–795.
- [17] B. Bojanov, G. Petrova. Numerical integration over a disc. A new Gaussian quadrature formula // *Numer. Math.* 1998. V. 80. № 1. P. 39–59.
- [18] B. Bojanov, G. Petrova. Uniqueness of the Gaussian quadrature for a ball // *J. Approx. Theory.* 2000. V. 104. № 1. P. 21–44.
- [19] D. K. Dimitrov. Integration of polyharmonic functions // *Math. Comp.* 1996. V. 65. № 215. P. 1269–1281.
- [20] A. Ghizzetti, A. Ossicini. Sull'esistenza e unicità delle formule di quadratura gaussiane // *Rend. Mat. (6)*. 1975. V. 8. P. 1–15.
- [21] H. A. Hakopian. Multivariate divided differences and multivariate interpolation of Lagrange and Hermite type // *J. Approx. Theory.* 1982. V. 34. № 3. P. 286–305.
- [22] H. A. Hakopian. Multivariate spline functions, B -splines bases and polynomial interpolation. II // *Studia Math.* 1984. V. 79. № 1. P. 91–102.
- [23] K. Jetter, G. Lange. Die Eindeutigkeit L_2 -optimaler polinomiale Monosplines // *Math. Z.* 1978. V. 158. № 1. P. 23–34.
- [24] F. John. Abhängigkeiten zwischen den Flächenintegralen einer stetigen Funktion // *Math. Ann.* 1935. V. 111. № 1. P. 541–559.
- [25] S. Karlin, A. Pinkus. An extremal property of multiple Gaussian nodes // *Studies in Spline Functions and Approximation Theory*. New York: Academic Press, 1976. P. 143–162.
- [26] М. Г. Крейн. Идеи П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие // *УМН*. 1951. Т. 4. № 4. С. 3–120.
- [27] А. А. Лигун. Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций // *Матем. заметки*. 1976. Т. 19. № 6. С. 913–926.
- [28] H. L. Loeb. A note on optimal integration in H_∞ // *C. R. Acad. Bulgare Sci.* 1974. V. 27. P. 615–618.
- [29] B. F. Logan, L. A. Shepp. Optimal reconstruction of a function from its projections // *Duke Math. J.* 1975. V. 42. № 4. P. 645–659.
- [30] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković. Uniqueness and computation of Gaussian interval quadrature formula for Jacobi weight function // *Numer. Math.* 2004. V. 99. № 1. P. 141–162.
- [31] В. П. Моторный. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^n p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1974. Т. 38. № 3. С. 583–614.
- [32] C. R. Morrow, T. N. L. Patterson. Construction of algebraic cubature rules using polynomial ideal theory // *SIAM J. Numer. Anal.* 1978. V. 15. № 5. P. 953–976.
- [33] H. M. Möller. Kubaturformeln mit minimaler Knotenzahl // *Numer. Math.* 1975/76. V. 25. № 2. P. 185–200.
- [34] И. П. Мысовских. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
- [35] G. P. Nikolov. A comparison theorem in the theory of quadrature formulae // *Math. Balkanica (N.S.)*. 1988. V. 2. № 1. P. 3–10.
- [36] С. М. Никольский. Приближение функций тригонометрическими многочленами в среднем // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1946. Т. 10. № 3. С. 207–256.
- [37] С. М. Никольский. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // *УМН*. 1950. Т. 5. № 2. С. 165–177.
- [38] С. М. Никольский. Квадратурные формулы // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1952. Т. 16. № 1. С. 181–196.

- [39] С. М. Никольский. Квадратурные формулы (с добавлениями Н. П. Корнейчука). 4-е изд., доп. М.: Наука, 1988.
- [40] M. Omladič, S. Pahor, A. Suhadolc. On a new type of quadrature formulas // Numer. Math. 1975/76. V. 25. № 4. P. 421–426.
- [41] K. Yu. Osipenko. Optimal Recovery of Analytic Functions. Huntington, NY: Nova Science, 2000.
- [42] G. Petrova. Uniqueness of the Gaussian extended cubature for polyharmonic functions // East J. Approx. 2003. V. 9. № 3. P. 269–275.
- [43] P. Pizzetti. Sulla media dei valore che una funzione dei punti della spazio assume alla superficie di una sfera // Rom. Accad. Lincei Rend. Ser. (5). 1909. V. XVIII; 1 sem. P. 182–185.
- [44] F. Pittnauer, M. Reimer. Interpolation mit Intervallfunktionalen // Math. Z. 1976. V. 146. № 1. P. 7–15.
- [45] F. Pittnauer, M. Reimer. Intervallfunktionale vom Gauss–Legendre–Typ // Math. Nachr. 1979. V. 87. P. 239–248.
- [46] T. Popoviciu. Aspura unei generalizari a formulei de integrare numerica a lui Gauss // Acad. Republ. Popul. Romine Studii Cerc. Mat. 1955. V. 6. P. 29–57.
- [47] J. Radon. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig Vol. 1917. V. 69. P. 262–277.
- [48] P. W. Smith. An improvement theorem for Descartes systems // Proc. Amer. Math. Soc. 1978. V. 70. № 1. P. 26–30.
- [49] С. А. Смоляк. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1965.
- [50] D. C. Solmon. The X-ray transform // J. Math. Anal. Appl. 1976. V. 56. № 1. P. 61–83.
- [51] J. F. Traub, H. Woźniakowski. A General Theory of Optimal Algorithms. New York: Academic Press, 1980.
- [52] Л. Чакалов. Общи квадратурни формули от гаусов тип // БАН Изв. Матем. Инст. 1954. Т. 1. № 2. С. 67–84; англ. пер.: L. Tschakaloff // East J. Approx. 1995. V. 1. № 2. P. 261–276.
- [53] P. Turán. On the theory of the mechanical quadrature // Acta Sci. Math. (Szeged). 1950. V. 12. Part A. P. 30–37.
- [54] А. А. Женсыкбаев. О наилучшей квадратурной формуле на классе $W^r L_p$ // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 2. С. 277–279.
- [55] А. А. Женсыкбаев. Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41. № 5. С. 1110–1124.
- [56] А. А. Женсыкбаев. Проблемы восстановления операторов. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

Софийский университет, Болгария
E-mail: boris@fmi.uni-sofia.bg

Поступила в редакцию
 24.08.2005