Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Владимиров, О нелинейном уравнении p -адической открытой струны для скалярного поля, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 6, 73–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1677>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 14:13:01

УДК 510.6+519.21

Дорогому С. М. Никольскому в связи со 100-летием со дня рождения

О НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ p -АДИЧЕСКОЙ
ОТКРЫТОЙ СТРУНЫ ДЛЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

В. С. ВЛАДИМИРОВ

Дается обзор результатов о структуре решений одномерного нелинейного псевдодифференциального уравнения, описывающего динамику (роллинг) p -адической открытой струны для скалярного поля тахионов. Указывается на возможность появления разрывных решений при $p = 2$. Применяются метод разложения решения в ряды по полиномам Эрмита и метод сведения к нелинейной краевой задаче для уравнения теплопроводности. Приведены некоторые нерешенные вопросы, в частности вопрос о существовании решения краевой задачи при $p = 2$.

Библиография: 20 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	73
§ 2. Полиномы Эрмита	76
§ 3. Свойства оператора K	77
§ 4. Разложение решений в ряды по полиномам Эрмита	78
§ 5. Связь с решениями уравнения теплопроводности	79
§ 6. Случай четного $p = 2q$	81
§ 7. Случай $p = 2$	85
§ 8. Случай нечетного $p = 2q + 1$	86
Список литературы	87

§ 1. Введение

Динамика открытой p -адической струны для скалярного поля тахионов описывается нелинейным псевдодифференциальным уравнением движения вида (см. работы [1]–[14] и литературу в них)

$$p^{\frac{1}{2}}\square\Phi = \Phi^p, \quad (1.1)$$

где $\Phi = \Phi(x_0, x_1, \dots, x_{d-1})$ – поле тахионов и

$$\square = \partial_t^2 - \Delta, \quad \Delta = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_{d-1}}^2, \quad t = x_0$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента РФ № НШ-1542. 2003.1.

– оператор Даламбера и p – простое число, $p = 2, 3, 5, \dots$. Будем считать p любым целым числом ≥ 2 . Физический смысл имеют вещественные решения уравнения (1.1), и впредь только такие решения будут рассматриваться.

Исследование этого нового класса уравнений (а также более общих уравнений) представляет значительный интерес не только для p -адической математической физики, но и для космологии [7]. В струнной теории поля взаимодействие нелокально [1], что существенно отличает ее от классической локальной теории поля. Этими задачами занимались многие физики и математики с широким использованием компьютерной техники: М. Б. Грин, Дж. Г. Шварц, Е. Виттен [1], Л. Брекке, П. Ж. Фрэйнд, М. Олсон, Е. Виттен [2], П. Г. Фрэмpton, Ю. Окада [3], А. Сен [7], Д. Гхошал, А. Сен [8], Н. Мёллер, Б. Цвибах [6], Дж. А. Минахан [12], Н. Мёллер, М. Шнабль [13], Н. Барнаби [14] и др.; в России – И. В. Волович [10], В. С. Владимирова, И. В. Волович и Е. И. Зеленов [4], И. Я. Арефьева, Л. В. Жуковская и А. С. Кошелев [9]. Работы В. С. Владимирова и Я. И. Воловича [11], [15], [16] и Л. В. Жуковской [17] посвящены чисто математическим и вычислительным аспектам, и этот обзорный доклад, основанный на них, имеет целью привлечь внимание математиков к новым нелокальным задачам.

В одномерном случае ($d = 1$) с помощью замены неизвестной функции

$$\varphi(t) = \Phi(t\sqrt{2\ln p})$$

уравнение (1.1) приводится к эквивалентному виду

$$e^{\frac{1}{2}\partial_t^2}\varphi = \varphi^p. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) есть нелинейное интегральное уравнение вида [15]

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)^2} \varphi(\tau) d\tau = \varphi^p(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Исследование уравнения (1.3) – задача классического анализа: от p -адических чисел здесь осталось только целое число p , к тому же оно не обязано быть простым.

Решение уравнения (1.3) предполагается в классе измеримых функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию роста

$$|\varphi(t)| \leq C \exp[(1-\varepsilon)t^2] \quad \text{при любом } \varepsilon > 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Физический смысл имеют следующие краевые задачи для уравнения (1.3):

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 1, \quad p - \text{четное}; \quad (1.5)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = -1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 1, \quad p - \text{нечетное}. \quad (1.6)$$

Наряду с решением $\varphi(t)$ уравнения (1.3), функции $\varphi(-t)$ и $\varphi(t+t_0)$ при любом t_0 , а при нечетном p и функция $-\varphi(t)$ также являются решением его. Поэтому решение уравнения (1.3) неединственно, если оно существует.

Тем не менее справедлива следующая теорема существования (и единственности) (при $\alpha = 0$ она доказана в [15]).

ТЕОРЕМА. Все вещественные решения уравнения (1.3) вида

$$\varphi(t) = e^{\alpha t^2} \psi(t), \quad \psi \in \widetilde{S'_+}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

где $\widetilde{S'_+}$ – алгебра по умножению преобразований Фурье обобщенных функций медленного роста с носителем на полусоси $[0, \infty)$, представляются с виде

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, \pm 1, \pm \varphi_0(t), & p - \text{нечетное}, \\ 0, 1, \varphi_0(t), & p - \text{четное}, \end{cases} \quad (1.7)$$

где

$$\varphi_0(t) = p^{\frac{1}{2(p-1)}} \exp\left(\frac{p-1}{p} t^2\right). \quad (1.8)$$

Для исследования и решения интегрального уравнения (1.3) и соответствующих краевых задач рассматриваются:

- метод разложения по полиномам Эрмита;
- метод сведения к нелинейной краевой задаче для уравнения теплопроводности;
- нерешенные вопросы.

Нам понадобится шкала весовых сепарабельных гильбертовых пространств L_2^α , $0 < \alpha < \infty$, состоящих из измеримых квадратично-суммируемых функций на $\mathbb{R}$ по мере

$$d\mu_\alpha(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha t^2} dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\mu_\alpha(t) = 1,$$

со следующими скалярным произведением и нормой

$$(f, g)_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} d\mu_\alpha(t), \quad \|f\|_\alpha = \sqrt{(f, f)_\alpha}, \quad f, g \in L_2^\alpha, \quad \alpha > 0.$$

Вложение $L_2^\alpha \subset L_2^\beta$, $\alpha < \beta$, плотно и непрерывно.

Справедливы следующие известные утверждения [15], [16].

УТВЕРЖДЕНИЯ. Пусть φ – решение уравнения (1.3). Тогда

- 1) если $\varphi(t)$ – ограничено, то оно кусочно-вещественно-аналитично (при p нечетном – непрерывно) и справедливо неравенство

$$|\varphi(t)| < 1, \quad t \in \mathbb{R};$$

- 2) если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = a, \quad |a| < \infty,$$

то $a = 0$ или $a = 1$ при p четном и $a = 0$ или $a = \pm 1$ при p нечетном; при этом

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi^p)'(t) = 0$$

и если $a \neq 0$, то и $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(t) = 0$, $n = 1, 2, \dots$.

§2. Полиномы Эрмита

Полиномами Эрмита называются полиномы вида [18]

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

так что $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x, \dots$

Они образуют полную ортогональную систему в гильбертовом пространстве L_2^1 , причем

$$\|H\|_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) d\mu_1(x) = 2^n n!, \quad (2.2)$$

так что $f \in L_2^1$ разлагается в ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (f, H_n)_1 \frac{H_n(x)}{2^n n!} \quad \text{в } L_2^1. \quad (2.3)$$

Имеют место следующие равенства [19]:

$$(x^m, H_n)_1 = \begin{cases} 2^{n-m} m! \left(\frac{m-n}{2}! \right)^{-1}, & m \geq n \text{ и } n \equiv m, \\ 0, & m < n \text{ или } n \not\equiv m. \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь принято обозначение: $a \equiv b$ или $a \not\equiv b$, если целые числа a и b одной или разной четности соответственно.

Разложение полиномов Эрмита по степеням x [20]

$$H_n(x) = n! \sum_{m=0, m \equiv n}^n c_{n,m} x^m, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

где

$$c_{n,m} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-m}{2}} \frac{2^m}{m!} \left(\frac{m-n}{2}! \right)^{-1}, & m \equiv n \text{ и } m \leq n, \\ 0, & m \not\equiv n \text{ или } m > n. \end{cases} \quad (2.6)$$

Модифицированные полиномы Эрмита – это полиномы вида [16]

$$V_n(x) = 2^{-n/2} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

так что $V_0(x) = 1$, $V_1(x) = x$, $V_2(x) = x^2 - 1$, $V_3(x) = x^3 - 3x, \dots$

Они образуют полную ортогональную систему в гильбертовом пространстве $L_2^{1/2}$, причем

$$\|V_n\|_{1/2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} V_n^2(x) d\mu_{1/2}(x) = n!, \quad (2.8)$$

так что $f \in L_2^{1/2}$ разлагается в ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (f, V_n)_{1/2} \frac{V_n(x)}{n!} \quad \text{в } L_2^{1/2}. \quad (2.9)$$

Имеют место следующие равенства [20]

$$(H_m, V_n)_{1/2} = \begin{cases} 2^n m! \left(\frac{m-n}{2} \right)!^{-1}, & m \geq n \text{ и } n \equiv m, \\ 0, & m < n \text{ или } n \not\equiv m; \end{cases} \quad (2.10)$$

$$(H_n, V_m)_1 = \begin{cases} (-1)^{\frac{m-n}{2}} 2^{n-m} m! \left(\frac{m-n}{2} \right)!^{-1}, & m \geq n \text{ и } n \equiv m, \\ 0, & m < n \text{ или } n \not\equiv m. \end{cases} \quad (2.11)$$

Разложение полиномов V_n по H_n и полиномов H_n по V_n следует из формул (2.3), (2.9), (2.10) и (2.11):

$$V_n(x) = 2^{-n} n! \sum_{m=0, m \equiv n}^n (-1)^{\frac{n-m}{2}} \left(\frac{m-n}{2} \right)!^{-1} \frac{H_m(x)}{m!}, \quad (2.12)$$

$$H_n(x) = n! \sum_{m=0, m \equiv n}^n \frac{2^m}{m!} \left(\frac{m-n}{2} \right)!^{-1} V_m(x). \quad (2.13)$$

Интегральное представление для модифицированных полиномов Эрмита [20]

$$V_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\tau) e^{-2(t/2-\tau)^2} d\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Пусть $f \in L_2^{1/2}$. Тогда в силу (1.2) $f \in L_2^1$ и справедливы равенства

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{H_n(x)}{2^n n!} = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{V_n(x)}{n!} \quad \text{в } L_2^1, \quad (2.15)$$

причем коэффициенты $a_n = (f, H_n)_1$ и $b_n = (f, V_n)_{1/2}$ выражаются один через другой по формулам

$$a_n = \sum_{m \geq n, m \equiv n} (-1)^{\frac{m-n}{2}} 2^{n-m} \left(\frac{m-n}{2} \right)!^{-1} b_m, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.16)$$

$$b_n = \sum_{m \geq n, m \equiv n} 2^{n-m} \left(\frac{m-n}{2} \right)!^{-1} a_m, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

§ 3. Свойства оператора K

Обозначим через K линейный интегральный оператор в уравнении (1.3)

$$\varphi \rightarrow (K\varphi)(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)^2} \varphi(\tau) d\tau.$$

Имеют место следующие леммы [16].

ЛЕММА 1. Оператор K переводит всякую функцию $f(t)$, удовлетворяющую условию (1.4), в целую функцию $(Kf)(z)$ с оценкой

$$|(Kf)(z)| \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \exp[y^2 + (1/\varepsilon - 1)t^2], \quad z = t + iy. \quad (3.1)$$

ЛЕММА 2. Оператор K переводит функцию $f \in L_2^\alpha$, $0 < \alpha < 2$ в целую функцию $(Kf)(z)$ с оценкой

$$|(Kf)(z)| \leq \|f\|_\alpha (2 - \alpha)^{-1/4} \exp\left(y^2 + \frac{\alpha}{2 - \alpha} t^2\right), \quad z = t + iy. \quad (3.2)$$

ЛЕММА 3. Оператор K ограничен из L_2^α , $0 < \alpha < 2$, в L_2^β , $\beta > \frac{2\alpha}{2-\alpha}$, и справедлива оценка

$$\|Kf\|_\beta \leq \left(\frac{2\alpha - 2\alpha^2}{\beta - \alpha^2}\right)^{-1/4} \|f\|_\alpha, \quad f \in L_2^\alpha. \quad (3.3)$$

ЛЕММА 4. Если $f \in L_2^1$, то ее образ $(Kf)(t)$ разлагается в ряд Тейлора

$$(Kf)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}, \quad a_n = (f, H_n)_1, \quad (3.4)$$

сходящийся равномерно на каждом компакте $\mathbb{R}$. Если $f \in L_2^{1/2}$, то

$$(Kf)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{H_n(t)}{2^n n!} \quad \text{в } L_2^1, \quad b_n = (Kf, H_n)_1, \quad (3.5)$$

при этом справедливы равенства

$$(Kf, H_n)_1 = (f, V_n)_{1/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

§ 4. Разложение решений в ряды по полиномам Эрмита

Пусть φ есть решение уравнения (1.3) из L_2^1 , так что $\varphi^p = K\varphi$. Тогда, обозначая $a_n = (\varphi, H_n)_1$, в силу (2.3) будем иметь

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{H_n(t)}{2^n n!} \quad \text{в } L_2^1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{2^n n!} = \|\varphi\|^2. \quad (4.1)$$

При этом функция $\varphi^p(t)$ есть след целой функции $A(z) = (K\varphi)(z)$, удовлетворяющей оценке (3.2) при $\alpha = 1$:

$$|A(z)| \leq \|\varphi\|_1 e^{|z|^2}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.2)$$

и по лемме 4 она разлагается в ряд Тейлора (3.4) [16]

$$\varphi^p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}. \quad (4.3)$$

Если же решение уравнения (1.3) $\varphi \in L_2^{1/2}$, то по лемме 3 $\varphi^p \in L_2^1$ и справедливо неравенство

$$\|\varphi^p\|_1 \leq \sqrt{2} \|\varphi\|_{1/2}, \quad (4.4)$$

а по лемме 4 справедливы равенства (3.6) (интегральные законы сохранения):

$$(\varphi^p, H_n)_1 = b_n = (\varphi, V_n)_{1/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Поэтому функция $\varphi^p(t)$ разлагается в ряд по полиномам Эрмита, а функция $\varphi(t)$ – по модифицированным полиномам Эрмита:

$$\varphi^p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{H_n(t)}{2^n n!} \quad \text{в } L_2^1, \quad (4.6)$$

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{V_n(t)}{n!} \quad \text{в } L_2^{1/2}. \quad (4.7)$$

§ 5. Связь с решениями уравнения теплопроводности

Интегральное уравнение (1.3) эквивалентно следующей краевой задаче для уравнения теплопроводности [16]:

$$u_x = \frac{1}{4} u_{tt}, \quad 0 < x \leq 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(1, t) = \varphi^p(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

(Обратим внимание, что переменные x и t в (5.1) поменялись местами по сравнению с классическим уравнением теплопроводности.)

Решением краевой задачи (5.1)–(5.2) назовем всякую измеримую функцию $u(x, t)$, ограниченную условием роста (1.4) по t , причем такую, что C не зависит от x . Функцию $u(x, t)$ назовем *интерполирующей* между решением $\varphi(t)$ и его степенью $\varphi^p(t)$.

Отметим, что интерполирующая функция представляется формулой Пуассона для уравнения (5.1):

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) \exp \left[-\frac{(t - \tau)^2}{x} \right], \quad 0 < x \leq 1. \quad (5.3)$$

Если функция φ удовлетворяет условию роста

$$|\varphi(t)| \leq C \exp(\varepsilon t^2) \quad \text{при любом } \varepsilon > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

то формула (5.3) дает ее вещественно-аналитическое продолжение в область $x > 1$, $t \in \mathbb{R}$ и, далее, – аналитическое продолжение $u(\zeta, z)$ в комплексную область $T^+ \times \mathbb{C}$, где T^+ – правая полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta = x > 0$.

Из представления (5.3) следует: если φ есть решение краевых задач (1.3)–(1.5) или (1.3)–(1.6), то $|u(x, t)| < 1$ при $0 \leq x, t \in \mathbb{R}$, $u(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (1.5) или (1.6) соответственно и $u(x, t) > 0$ при $x > 1$ для задачи (1.3)–(1.5).

ПРИМЕР. Для решения $\varphi_0(t)$ (см. (1.8)) уравнения (1.3) интерполирующая функция равна

$$u(x, t) = p^{\frac{1}{2(p-1)}} (1 - x + x/p)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{t^2(p-1)}{p - xp + x} \right].$$

ТЕОРЕМА [16]. Пусть $u(x, t)$ – интерполирующая функция между решением φ краевых задач (1.3)–(1.5) и (1.3)–(1.6) и его степенью φ^p . Тогда справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(t)[1 - \varphi^{2p-2}(t)] dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x, t) dx dt, \quad (5.5)$$

и законы сохранения

$$\int_{-\infty}^{\infty} [u(x, t) - \varphi(t)] dt = 0 = \int_{-\infty}^{\infty} [u(x+1, t) - \varphi^p(t)] dt = 0, \quad x \geq 0. \quad (5.6)$$

СЛЕДСТВИЯ. 1) Для того чтобы интегралы

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^0 \varphi^2(t) dt, & \int_0^{\infty} [1 - \varphi^{2p-2}(t)] dt, & \text{для задачи (1.3)–(1.5),} \\ \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \varphi^{2p-2}(t)] dt, & & \text{для задачи (1.3)–(1.6),} \end{cases} \quad (5.7)$$

сходились, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x, t) dx dt < \infty.$$

2) Для задачи (1.3)–(1.5) сходятся интегралы

$$\int_0^{\infty} [1 - \varphi^{p-1}(t)] dt, \quad \int_0^{\infty} [1 - \varphi(t)] dt, \quad \int_0^{\infty} [1 - u(x, t)] dt, \quad x \geq 1,$$

а если $\varphi(t)$ знакопостоянна при $t < c$, то сходятся и интегралы

$$\int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt, \quad \int_{-\infty}^0 u(x, t) dt, \quad x \geq 1.$$

3) Для задачи (1.3)–(1.6) сходятся интегралы:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \varphi^{p-1}(t)] dt, & \quad \int_0^{\infty} [1 - \varphi(t)] dt, & \quad \int_{-\infty}^0 [1 + \varphi(t)] dt, \\ \int_0^{\infty} [1 - u(x, t)] dt, & \quad \int_{-\infty}^0 [1 + u(x, t)] dt, & \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

ВОПРОС. Можно ли избавиться в 2) от условия $\varphi(t)$ знакопостоянства при $t < c$?

§ 6. Случай четного $p = 2q$

Уравнение (1.3) принимает вид

$$\varphi^{2q}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-(t-\tau)^2} d\tau, \quad q = 1, 2, \dots \quad (6.1)$$

В работе [15] получен такой результат: не существует непрерывных неотрицательных решений краевой задачи (6.1), (1.5).

Пусть существует кусочно-непрерывное решение $\varphi(t)$ краевой задачи уравнения (6.1), (1.5). Тогда $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi^{2q}(t) = A(t), \quad (6.2)$$

где $A(t) \geq 0$ – следцелой функции $A(z)$, удовлетворяющей оценке (4.2). В окрестности каждой точки существуют два вещественных решения уравнения (6.2)

$$\varphi(t) = \pm A^{\frac{1}{2q}}(t). \quad (6.3)$$

Поэтому глобальная структура решения $\varphi(t)$ зависит от ее точек разрыва I рода T_k и от вещественных нулей t_k целой функции $A(z)$. Множества $\{T_k\}$ и $\{t_k\}$ ограничены сверху, конечны либо счетны.

В окрестности нуля t_k функция $\varphi^{2q}(t)$ в силу (6.2) имеет представление

$$\varphi^{2q}(t) = \frac{a_{2\sigma_k}}{(2\sigma_k)!} (t - t_k)^{2\sigma_k} [1 + O(|t - t_k|)], \quad (6.4)$$

где $a_{2\sigma_k} > 0$, $2\sigma_k$ – кратность нуля t_k . При этом справедливы равенства

$$\frac{2^{2\sigma_k}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) (t_k - \tau)^n e^{-(t_k - \tau)^2} d\tau = \begin{cases} a_{2\sigma_k} > 0, & n = 2\sigma_k, \\ 0, & n = 0, 1, \dots, 2\sigma_k - 1. \end{cases} \quad (6.5)$$

Рис. 1

Рис. 2

В работах [15], [16] получены следующие результаты.

ТЕОРЕМА. Если φ – решение краевой задачи (6.1), (1.5), то:

- 1) решение $\varphi(t)$ – кусочно-вещественно-аналитическое всюду за исключением его нулей и точек разрыва I рода;
- 2) если $\varphi^{2q}(t)$ не имеет нулей или имеет только один нуль, то $\varphi(t)$ может иметь разрывы I рода;
- 3) если $\varphi^{2q}(t)$ имеет только два нуля t_0 и t_1 и $\varphi(t)$ непрерывна, то она имеет вид (см. рис. 3)

$$\varphi(t) = \begin{cases} A^{\frac{1}{2q}}(t), & t > 0, \\ -A^{\frac{1}{2q}}(t), & t_1 < t < 0, \\ A^{\frac{1}{2q}}(t), & t < t_1; \end{cases} \quad (6.6)$$

- 4) в окрестности нуля t_k решение $\varphi(t)$ имеет одно из четырех представлений (см. рис. 1 и 2):

$$\varphi(t) = \pm \left\{ \frac{1}{\operatorname{sgn} t} \right\} \left[\frac{a_{2\sigma_k}}{(2\sigma_k)!} \right]^{\frac{1}{2q}} |t - t_k|^{\frac{\sigma_k}{q}} [1 + O(|t - t_k|)]; \quad (6.7)$$

- 5) в окрестности точки разрыва I рода T_k функция $\varphi(t)$ имеет представление (см. рис. 4 и 5)

$$\varphi(t) = \pm \operatorname{sgn}(t - T_k) A^{\frac{1}{2q}}(t), \quad t \neq T_k, \quad (6.8)$$

и ее скачок в точке T_k , равен

$$\pm 2A^{\frac{1}{2q}}(T_k + 0); \quad (6.9)$$

- 6) если решение $\varphi(t)$ непрерывно, то число перемен знака его не превосходит числа нулей функции $\varphi^{2q}(t)$ и не меньше $\sup_k 2\sigma_k$.

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 5

С помощью принципа сжатых отображений для нулей интерполирующей функции $u(x, t)$ доказывается следующая теорема [16].

ТЕОРЕМА (о ветвлении нулей). Пусть $u(x, t)$ – интерполирующая функция между решением φ краевой задачи (5.1)–(5.2) и φ^{2q} такая, что $u(1, t)$ имеет в точке $t = 0$ нуль кратности $2n$. Тогда уравнение

$$u(1 - \varepsilon, t) = 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0 \quad (6.10)$$

имеет ровно $2n$ простых вещественных корней

$$t_k^\pm(\varepsilon) = \frac{1}{2} \lambda_k^\pm \sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.11)$$

где $\lambda_k^\pm$ – корни универсального уравнения

$$H_{2n}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \equiv \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{\lambda^{2n-2m}}{(2n-2m)! m!} = 0. \quad (6.12)$$

Рис. 6

ПРИМЕРЫ. Уравнение (6.12) и его корни имеют следующий вид:

при $n = 1$ $\lambda^2 = 2$, $\lambda^\pm = \pm\sqrt{2}$;

при $n = 2$ $\lambda^4 - 12\lambda^2 + 12 = 0$,

$$\lambda_1^\pm = \pm\sqrt{6 + 2\sqrt{6}}, \quad \lambda_2^\pm = \pm\sqrt{6 - 2\sqrt{6}};$$

при $n = 3$ $\lambda^6 - 30\lambda^4 + 180\lambda^2 - 120 = 0$,

$$\lambda_1^\pm \approx \pm 0.845, \quad \lambda_2^\pm \approx \pm 2.67, \quad \lambda_3^\pm \approx \pm 4.70.$$

ВОПРОСЫ. 1) Существует ли непрерывное или разрывное решение краевой задачи (6.1), (5.1)?

2) Всегда ли в нуле функции $\varphi^{2q}(t)$ имеет место перемена знака у решения $\varphi(t)$?

§ 7. Случай $p = 2$

Уравнение (1.3) принимает вид

$$\varphi^2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-(t-\tau)^2} d\tau. \quad (7.1)$$

Пусть $\varphi(t)$ – решение уравнения (7.1) из L_2^1 . Выведем формально бесконечную систему нелинейных уравнений для коэффициентов a_n в разложении (4.3) функции φ^2 и в разложении (4.1) функции φ . Ряд Тейлора для $\varphi(t)$ вытекает из ряда (4.1) с помощью переразложения (2.5) полиномов Эрмита по степеням t . Тогда

$$a_n = n! \sum_{k+i=n} \left(\sum_{m=k, m \equiv k}^{\infty} \frac{a_m}{2^m} c_{m,k} \right) \left(\sum_{s=i, s \equiv i}^{\infty} \frac{a_s}{2^s} c_{s,i} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.2)$$

Отметим, что ряды в (7.2) сходятся в силу равенства Парсеваля–Стеклова (4.1) и неравенства Коши–Буняковского.

Анализ нелинейной системы (7.2) показывает [16], что уравнение для коэффициента $a_n, n \geq 1$, при условии $a_0 > 0$ линейно относительно неизвестных $a_k, k \equiv n, k = n, n+1, \dots$. Аналогичное свойство имеет место и при $a_0 = a_1 = 0, a_2 > 0$ и т. д.

Рассмотрим усеченную систему (7.2) при $n = 0, 1, 2, 3$ ($(n = 3)$ -приближение), полагая $a_4 = a_5 = \dots = 0$. Используем для этого равенства (2.6) для коэффициентов $c_{m,k}$. При $n = 0$

$$a_0 = \left(\sum_{m=0}^3 (-1)^m \frac{a_{2m}}{4^m m!} \right)^2 \geq 0. \quad (7.3)$$

Рассмотрим для определенности случай $a_0 > 0$. (Случай $a_0 = 0$ рассматривается аналогично, см. [16].) В результате получим следующую нелинейную систему уравнений ($\varepsilon = \pm$) для коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3 :

$$a_0 = \varepsilon \sqrt{a_0} + a_2/4, \quad (7.4_0)$$

$$a_1 = 2\varepsilon \sqrt{a_0} (a_1 - a_3/4), \quad (7.4_1)$$

$$a_2 = \frac{a_1^2}{2a_0} + 2\varepsilon \sqrt{a_0} a_2, \quad (7.4_2)$$

$$a_3 = 2\varepsilon \sqrt{a_0} a_3 + \frac{3a_1 a_2}{\varepsilon \sqrt{a_0}}. \quad (7.4_3)$$

Рассмотрим линейную систему относительно коэффициентов a_1 и a_3 , состоящую из уравнений (7.4₁) и (7.4₃):

$$\begin{cases} (1 - \varepsilon \sqrt{a_0}) a_1 + 1/2 \varepsilon \sqrt{a_0} a_3 = 0, \\ -3 \frac{a_2 a_1}{\varepsilon \sqrt{a_0}} + (1 - 2\varepsilon \sqrt{a_0}) a_3 = 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

Определитель этой системы равен

$$D = 1 + 10a_0 - 10\varepsilon \sqrt{a_0}. \quad (7.6)$$

Для решений системы (7.4) справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если $a_0 > 0$ и $D \neq 0$, то

- а) $a_0 = 1$ и $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, что соответствует тривиальному решению $\varphi(t) = 1$;
- б) $a_0 = 1/4$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = 0$ (и тогда $\varepsilon = +$), что соответствует приближенному решению

$$\varphi_1(t) \approx \frac{1}{2}(1 - t^2). \quad (7.7)$$

Если $a_0 > 0$ и $D = 0$ (и тогда $\varepsilon = +$), то

- с) $a_0 = 0.4000 + \sqrt{0.15} \approx 0.7873$, $a_1 \approx \pm 0.6984$, $a_2 = -0.4000$, $a_3 \approx \pm 1.219$, что соответствует двум приближенным решениям

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &\approx 0.7873 \pm 0.6984t - 0.05000H_2(t) \pm 0.02540H_3(t) \\ &= 0.8873 \pm 0.3936t - 0.2000t^2 \pm 0.2032t^3. \end{aligned} \quad (7.8)$$

ВОПРОС. Являются ли приближенные решения (7.7) и (7.8) “паразитными” или это первые члены неизвестных решений из L_2^1 ?

По крайней мере до t^4 квадраты этих решений совпадают с их квадратами, вычисленными по формуле (4.3):

$$\begin{aligned} \varphi_1^2 &\approx \frac{1}{4}(1 - 2t^2), \\ \varphi_2^2(t) &\approx 0.7873 \pm 0.6984t - 0.2000t^2 \pm 0.2032t^3. \end{aligned}$$

Изложенный метод для решения уравнения (7.1) применяется и к решению $\varphi(t)$ краевой задачи (7.1), (1.5) [16]. Это решение ищется в виде

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}(t) + e^{-(\alpha^2-1)t^2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m H_m(\alpha t) \quad (7.9)$$

с неизвестными коэффициентами $c_0, c_1, c_2, \dots$, где $\alpha > 1$ – некоторый параметр.

§ 8. Случай нечетного $p = 2q + 1$

Совсем другая картина наблюдается при нечетных p . Уравнение (1.3) принимает вид

$$\varphi^{2q+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{-(t-\tau)^2} d\tau, \quad q = 1, 2, \dots \quad (8.1)$$

Для построения решений уравнения (8.1) можно применить метод разложения по полиномам Эрмита, изложенный в § 7. Однако вычисления будут довольно громоздкими

даже в случае $p = 3$. Наконец, для решения краевой задачи (8.1), (1.6) может оказаться полезной подстановка, аналогичная подстановке (7.9):

$$\varphi(t) = \operatorname{erf}(t) + e^{-(\alpha^2-1)t^2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m H_m(\alpha t).$$

В работах [11], [15], [16], [17] доказано существование непрерывного монотонно возрастающего нечетного вещественно-аналитического при $t \neq 0$ решения краевой задачи (8.1), (1.6) с единственным вещественным нулем в точке $t = 0$, причем

$$\varphi(t) = (a_1 t)^{\frac{1}{2q+1}} [1 + O(|t|)] \quad \text{при } t \rightarrow 0, \quad (8.2)$$

где

$$a_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(\tau) e^{-\tau^2} \tau d\tau > 0. \quad (8.3)$$

Как и в случае четного p (см. §6), справедлива следующая теорема [15], [16].

ТЕОРЕМА. Если $\varphi(t)$ – решение краевой задачи (8.1), (1.6), то оно непрерывно, функция $\varphi^{2q+1}(t)$ имеет конечное число нулей t_k конечной кратности σ_k , $k = 1, \dots, l$, $\sum_{k=1}^l \sigma_k$ – нечетное число, причем

$$\varphi(t) = \left[\frac{a_{\sigma_k}}{(\sigma_k)!} \right]^{\frac{1}{2q+1}} (t - t_k)^{\frac{\sigma_k}{2q+1}} [1 + O(|t - t_k|)] \quad \text{при } t \rightarrow t_k, \quad (8.4)$$

где

$$\frac{2^{\sigma_k}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) (\tau - t_k)^n e^{-(t_k - \tau)^2} d\tau = \begin{cases} a_{\sigma_k}, & n = \sigma_k, \\ 0, & n = 0, 1, \dots, \sigma_k - 1. \end{cases} \quad (8.5)$$

Число перемен знака у функций $\varphi(t)$ и $\varphi^{2q+1}(t)$ одинаково, нечетно, ≥ 3 , не больше l и не меньше $\max_{1 \leq k \leq l} \sigma_k$.

ВОПРОСЫ. 1) Всегда ли в нуле функции $\varphi^{2q+1}(t)$ имеет место перемена знака у решения $\varphi(t)$?

2) Будут ли нули функции $\varphi^{2q+1}(t)$ простыми?

Автор благодарит И. Я. Арефьеву, А. В. Воронина и С. В. Козырева за полезные обсуждения и помощь при оформлении рисунков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен. Теория суперструн. Т. I, II. М.: Мир, 1990.
- [2] L. Brekke, P. G. O. Freund, M. Olson, E. Witten. Non-Archimedean string dynamics // Nuclear Phys. B. 1988. V. 302. №3. P. 365–402.
- [3] P. H. Frampton, Y. Okada. Effective scalar field theory of p -adic string // Phys. Rev. D (3). 1989. V. 37. №10. P. 3077–3079.
- [4] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов. p -адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
- [5] L. Brekke, P. G. O. Freund. p -Adic numbers in physics // Phys. Rep. 1993. V. 233. №1. P. 1–66.

- [6] N. Moeller, B. Zwiebach. Dynamics with infinitely many time derivatives and rolling tachyons // J. High Energy Phys. 2002. № 10. Paper 034; arXiv:hep-th/0207107.
- [7] A. Sen. Rolling tachyon // J. High Energy Phys. 2002. № 4. Paper 48; arXiv:hep-th/0203211.
- [8] D. Ghoshal, A. Sen. Tachyon condensation and brane descent relations in p -adic string theory // Nuclear Phys. B. 2000. V. 584. № 1–2. P. 300–312.
- [9] I. Ya. Aref'eva, L. V. Joukovskaya, A. S. Koshelev. Time evolution in superstring field theory on non-BPS brane. I. Rolling tachyon and energy-momentum conservation // J. High Energy Phys. 2003. № 9. Paper 012; arXiv:hep-th/0301137.
- [10] I. V. Volovich. p -Adic string // Classical Quantum Gravity. 1987. V. 4. № 4. P. L83–L87.
- [11] Ya. Volovich. Numerical study of nonlinear equations with infinite numbers of derivatives // J. Phys. A. 2003. V. 36. № 32. P. 8685–8701; arXiv:math-ph/0301028.
- [12] J. A. Minahan. Mode interactions of the tachyon condensate in p -adic string theory // J. High Energy Phys. 2001. № 3. Paper 28.
- [13] N. Moeller, M. Schnabl. Tachyon condensation in open-closed p -adic string theory // J. High Energy Phys. 2004. № 1. Paper 011.
- [14] N. Barnaby. Caustic formation in tachyon effective field theories // J. High Energy Phys. 2004. № 7. Paper 025; arXiv:hep-th/0406120.
- [15] В. С. Владимиров, Я. И. Волович. О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны // ТМФ. 2004. Т. 138. № 3. С. 355–368; arXiv:math-ph/0306018.
- [16] В. С. Владимиров. Об уравнении p -адической открытой струны для скалярного поля тахионов // Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69. № 3. С. 55–80.
- [17] Л. В. Жуковская. Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения теории струн // ТМФ. (в печати).
- [18] А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978.
- [19] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Физматлит, 1983.
- [20] И. С. Градштейн, М. И. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: vladim@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
 17.08.2005