Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Ильин, Е. И. Моисеев, Оптимизация граничных управлений колебаниями струны, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 6, 89–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1678>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 05:50:50

УДК 517.984.5

ОПТИМИЗАЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УПРАВЛЕНИЙ
КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ

В. А. Ильин, Е. И. Моисеев

В работе для большого промежутка времени T проводится оптимизация граничных управлений колебаниями струны для следующих семи задач: задачи граничного управления смещением на одном конце при условии, что второй конец или закреплен, или свободен, задачи граничного управления смещениями на двух концах, задачи граничного управления упругой силой на одном конце при условии, что второй конец или закреплен, или свободен, задачи граничного управления упругой силой на двух концах и задачи комбинированного граничного управления смещением на одном конце и упругой силой на другом конце. Оптимальные граничные управления в каждой из указанных семи задач ищутся как функции, доставляющие минимум соответствующему интегралу граничной энергии при наличии условий связи, вытекающих из выполнения в начальный момент времени $t = 0$ заданных начальных условий и в финальный момент времени $t = T$ заданных финальных условий. Для всех семи задач оптимальные граничные управления предъявляются в явном аналитическом виде.

Библиография: 17 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	90
1°. Задача 1 (об оптимизации граничного управления смещением на одном конце при закрепленном втором конце)	92
2°. Задача 2 (оптимизация граничного управления смещением на двух концах)	94
3°. Задача 3 (оптимизация граничного управления смещением на одном конце при свободном втором конце)	97
4°. Задача 4 (оптимизация граничного управления упругой силой на одном конце при закрепленном другом конце)	98
5°. Задача 5 (оптимизация граничного управления упругой силой на одном конце при свободном втором конце)	100
6°. Задача 6 (оптимизация граничных управлений упругой силой на двух концах)	101
7°. Задача 7 (оптимизация комбинированного граничного управления упругой силой на одном конце и смещением на другом конце)	104
8°. Обоснование основных утверждений, используемых при проведении оптимизации в задаче 7	106
Заключительное замечание	113
Список литературы	113

Введение

В настоящей работе для большого промежутка времени T в терминах обобщенного решения волнового уравнения $u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0$, допускающего существование в любой момент времени t конечной энергии, проводится оптимизация семи задач граничного управления (граничного управления смещением на одном конце при закреплённом втором конце, граничного управления смещением на двух концах, граничного управления смещением на одном конце при свободном втором конце, граничного управления упругой силой на одном конце при закреплённом втором конце, граничного управления упругой силой на одном конце при свободном втором конце, граничного управления упругой силой на двух концах и комбинированного граничного управления упругой силой на одном конце и смещением на втором конце).

Во всех семи задачах в “длинном” прямоугольнике $Q_T = [0 \leq x \leq l] \times [0 \leq t \leq T]$ рассматривается допускающее существование конечной энергии обобщенное решение смешанной задачи для волнового уравнения

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \quad (1)$$

с произвольно заданными начальными условиями

$$\{u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x)\} \quad (2)$$

и с такими граничными условиями первого или второго рода (частично, может быть, однородными), которые обеспечивают выполнение в финальный момент времени $t = T$ произвольно заданных финальных условий

$$\{u(x, T) = \widehat{\varphi}(x), u_t(x, T) = \widehat{\psi}(x)\}. \quad (3)$$

Это решение определяется как функция $u(x, t)$, удовлетворяющая тому интегральному тождеству, которое в случае гладкой функции $u(x, t)$ получается при перебрасывании в тождестве

$$\int_0^l \int_0^T [u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t)] \Phi(x, t) dx dt = 0$$

посредством интегрирования по частям производных функции $u(x, t)$ на соответствующие производные гладкой пробной функции $\Phi(x, t)$.

Однако проведенный анализ показал, что указанное обобщенное решение $u(x, t)$ на самом деле является более гладким, чем традиционное обобщенное решение из класса $W_2^1(Q_T)$, и принадлежит впервые введенному В. А. Ильиным в работах [1] и [2] классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, который определяется как множество функций двух переменных $u(x, t)$, непрерывных в замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T$ и имеющих в нем обе обобщенные частные производные $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$, каждая из которых принадлежит не только классу $L_2(Q_T)$, но и классу $L_2[0 \leq x \leq l]$ при каждом t из сегмента $[0, T]$ и классу $L_2[0 \leq t \leq T]$ при каждом x из сегмента $[0, l]$.

В классе $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ вся теория приобретает законченный характер, ибо необходимым условием принадлежности решения $u(x, t)$ этому классу является принадлежность начальных условий (2) указанными ниже классам:

$$u(x, 0) = \varphi(x) \in W_2^1[0, l], \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \in L_2[0, l], \quad (4)$$

финальных функций (3) классам

$$u(x, T) = \widehat{\varphi}(x) \in W_2^1[0, l], \quad u_t(x, T) = \widehat{\psi}(x) \in L_2[0, l], \quad (5)$$

граничных условий, задаваемых смещениями, классу

$$u(0, t) = \mu(t) \in W_2^1[0, T], \quad u(l, t) = \nu(t) \in W_2^1[0, T] \quad (6)$$

и граничных условий, задаваемых упругими силами, классу

$$u_x(0, t) = \mu(t) \in L_2[0, T], \quad u_x(l, t) = \nu(t) \in L_2[0, T]. \quad (7)$$

При $T > l$ в случае граничных управлений на двух концах и при $T > 2l$ в случае граничного управления на одном конце существует бесконечно много различных граничных управлений, обеспечивающих переход колебательного процесса от произвольно заданных начальных условий (2) к произвольно заданным финальным условиям (3).

Поэтому при больших T мы находим и предъявляем в явном аналитическом виде **оптимальные граничные управления**, которые доставляют минимум соответствующему интегралу граничной энергии при наличии условий связи, извлекаемых из выполнения заданных начальных условий (2) и заданных финальных условий (3).

При этом минимизируемый интеграл граничной энергии имеет следующий вид:

$$\int_0^T [\mu'(t)]^2 dt \quad (8)$$

в случае граничного управления смещением $u(0, t) = \mu(t)$ на одном конце $x = 0$;

$$\int_0^T \{[\mu'(t)]^2 + [\nu'(t)]^2\} dt \quad (9)$$

в случае граничных управлений смещениями $u(0, t) = \mu(t)$, $u(l, t) = \nu(t)$ на двух концах $x = 0$ и $x = l$;

$$\int_0^T \mu^2(t) dt \quad (10)$$

в случае граничного управления упругой силой $u_x(0, t) = \mu(t)$ на одном конце $x = 0$;

$$\int_0^T \{\mu^2(t) + \nu^2(t)\} dt \quad (11)$$

в случае граничных управлений упругими силами $u_x(0, t) = \mu(t)$, $u_x(l, t) = \nu(t)$ на двух концах $x = 0$ и $x = l$;

$$\int_0^T \{\mu^2(t) + [\nu'(t)]^2\} dt \quad (12)$$

в случае комбинированного граничного управления упругой силой $u_x(0, t) = \mu(t)$ на одном конце $x = 0$ и смещением $u(l, t) = \nu(t)$ на втором конце $x = l$.

Нами будет установлено, что для ряда задач оптимальные граничные управления зависят не от самих начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из начальных условий (2) и финальных функций $\widehat{\varphi}(x)$ и $\widehat{\psi}(x)$ из финальных условий (3), а только от разностей

$$\widetilde{\varphi}(x) = \widehat{\varphi}(x) - \varphi(x) \quad \text{и} \quad \widetilde{\psi}(x) = \widehat{\psi}(x) - \psi(x) \quad (13)$$

финального и начального смещений и финальной и начальной скоростей.

Для получения более изящных результатов мы будем для задач с граничными условиями **одного рода** на концах $x = 0$ и $x = l$ считать T кратным $2l$ и равным $T = 2l(n + 1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, а для задач с граничными условиями **разных родов** на концах $x = 0$ и $x = l$ считать T кратным $4l$ и равным $T = 4l(n + 1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$.

Наше дальнейшее изложение состоит из восьми пунктов. В каждом из пунктов 1°–7° мы приводим стереотипно получаемые результаты оптимизации одной из семи рассматриваемых нами задач, придерживаясь следующего плана.

1) Установление интегрального тождества, которому при любом $T > 0$ должно удовлетворять обобщенное из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ решение $u(x, t)$ смешанной задачи для волнового уравнения (1) с начальными условиями (2) и с рассматриваемыми в данной задаче граничными условиями. (Сразу же отметим, что из этого тождества в силу схемы, изложенной в [3; гл. 2, §9], будет вытекать, что для любого $T > 0$ указанная смешанная задача может иметь только одно решение из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$.)

2) Построение при $T > l$ в случае граничного управления на двух концах и при $T > 2l$ в случае граничного управления на одном конце специального решения $\tilde{u}(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи для волнового уравнения $\tilde{u}_{tt}(x, t) - \tilde{u}_{xx}(x, t) = 0$ с начальными условиями $\tilde{u}(x, 0) = \varphi(x)$, $\tilde{u}_t(x, 0) = \psi(x)$ и с явно заданными граничными условиями рассматриваемого в данной задаче типа.

3) Построение при $T = 2l(n + 1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$ (в случае граничных условий на двух концах одного рода), и при $T = 4l(n + 1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$ (в случае граничных условий на двух концах разных родов), явного аналитического вида решения $\hat{u}(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи для волнового уравнения $\hat{u}_{tt}(x, t) - \hat{u}_{xx}(x, t) = 0$ с нулевыми начальными условиями $\hat{u}(x, 0) = 0$, $\hat{u}_t(x, 0) = 0$ и с произвольно заданными граничными условиями рассматриваемого в данной задаче типа.

4) Установление с помощью результатов предыдущего шага условий связи, которые следует присоединить к интегралу граничной энергии при его минимизации в рассматриваемой задаче граничного управления.

5) Явный аналитический вид оптимальных граничных управлений для рассматриваемой задачи.

6) Анализ основных свойств найденных оптимальных граничных управлений.

В п. 8° приводится реализация указанного плана для одной из семи рассматриваемых задач — для задачи 7 об оптимизации комбинированного граничного управления упругой силой на одном конце и смещением на другом конце.

1°. Задача 1 (об оптимизации граничного управления смещением на одном конце при закрепленном втором конце)

1) При любом $T > 0$ обобщенное из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ решение $u(x, t)$ смешанной задачи для волнового уравнения (1) с начальными условиями (2) из классов (4) и с граничными условиями $u(0, t) = \mu(t)$, $u(l, t) = 0$, в которых $\mu(t) \in W_2^1[0, T]$ и выполнены условия согласования $\varphi(0) = \mu(0)$, $\varphi(l) = 0$, определяется как функция $u(x, t)$

из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_0^T u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t)] dx dt + \int_0^l \varphi(x) \Phi_t(x, 0) dx \\ & - \int_0^l \psi(x) \Phi(x, 0) dx - \int_0^T \mu(t) \Phi_x(0, t) dt = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

для любой функции $\Phi(x, t)$ из класса $C^{(2)}(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющей следующим условиям:

$$\Phi(x, T) \equiv 0, \quad \Phi_t(x, T) \equiv 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq l, \quad (15)$$

$$\Phi(0, t) \equiv 0, \quad \Phi(l, t) \equiv 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq T. \quad (16)$$

2) При $T > 2l$ функция $\tilde{u}(x, t)$, определяемая равенством

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi \right] & \text{в } \Delta_1, \\ \frac{1}{2} \left[\varphi(x+t) + \varphi(0) + \int_0^{x+t} \psi(\xi) d\xi \right] & \text{в } \Delta_2, \\ \frac{1}{2} \left[\varphi(0) + \varphi(2l) + \int_0^{2l} \psi(\xi) d\xi \right] = C_0 = \text{const} & \text{в } \Delta_3, \end{cases} \quad (17)$$

в котором Δ_1 — треугольник, ограниченный отрезками прямых $x-t=0$, $x-l=0$ и $t=0$, Δ_2 — треугольник, ограниченный отрезками прямых $x-t=0$, $x+t-2l=0$ и $x=0$, Δ_3 — четырехугольник, ограниченный отрезками прямых $x+t-2l=0$, $x=0$, $x-l=0$ и $t-T=0$, при условии, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ продолжены нечетно¹ относительно точки $x=l$ с сегмента $[0, l]$ на сегмент $[l, 2l]$ и что выполнено условие согласования $\varphi(l)=0$, является единственным решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи для волнового уравнения $\tilde{u}_{tt}(x, t) - \tilde{u}_{xx}(x, t) = 0$ с начальными условиями $\tilde{u}(x, 0) = \varphi(x)$, $\tilde{u}_t(x, 0) = \psi(x)$ и с граничными условиями

$$\begin{aligned} \tilde{u}(0, t) = \tilde{\mu}(t) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\varphi(t) + \varphi(0) + \int_0^t \psi(\xi) d\xi \right] & \text{при } 0 \leq t \leq 2l, \\ 0 & \text{при } 2l \leq t \leq T, \end{cases} \\ \tilde{u}(l, t) = \tilde{\nu}(t) &= 0 \quad \text{для всех } 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

3) При $T = 2l(n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, функция $\hat{u}(x, t) = u(x, t) - \tilde{u}(x, t)$, являющаяся единственным решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ волнового уравнения $\hat{u}_{tt}(x, t) - \hat{u}_{xx}(x, t) = 0$ с нулевыми начальными условиями $\hat{u}(x, 0) = 0$, $\hat{u}_t(x, 0) = 0$ и с граничными условиями $\hat{u}(0, t) = \hat{\mu}(t) = \mu(t) - \tilde{\mu}(t)$, $\hat{u}(l, t) = 0$ при выполнении условия $\hat{\mu}(0) = 0$, определяется равенством

$$\hat{u}(x, t) = \sum_{k=0}^n \hat{\mu}(t-x-2kl) - \sum_{k=1}^{n+1} \hat{\mu}(t+x-2kl), \quad (18)$$

¹При таком продолжении постоянная C_0 в (17) равна нулю.

в котором через $\widehat{\mu}(t)$ обозначена функция, совпадающая с $\widehat{\mu}(t)$ при $0 \leq t \leq T$ и равная нулю при $t < 0$.

4) При $T = 2l(n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, из равенства (18) и из финальных условий (3), в которых $\widehat{\varphi}(l) = 0$, в предположении, что функции $\widehat{\varphi}(x)$ и $\widehat{\psi}(x)$ также продолжены нечетно относительно точки $x = l$ с сегмента $[0, l]$ на сегмент $[l, 2l]$, мы получим следующее **условие связи**

$$-\sum_{k=0}^n \mu'(2lk+x) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}'(x) + \widetilde{\psi}(x)], \quad (19)$$

являющееся равенством элементов $L_2[0, 2l]$ и зависящее только от разностей $\widetilde{\varphi}(x) = \widehat{\varphi}(x) - \varphi(x)$ и $\widetilde{\psi}(x) = \widehat{\psi}(x) - \psi(x)$ финального и начального смещений и финальной и начальной скоростей.

5) Решая задачу об отыскании минимума интеграла граничной энергии (8) с условием связи (19), мы получим следующее выражение для оптимального граничного управления $u(0, t) = \mu(t)$:

$$\mu(t) = L(t) + \alpha(t), \quad (20)$$

в котором главный член $L(t)$ является линейной функцией вида

$$L(t) = \widehat{\varphi}(0)\frac{t}{T} + \varphi(0)\left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad (21)$$

а добавочный член $\alpha(t)$ является на сегменте $[0, T] = [0, 2l(n+1)]$ периодической функцией периода $2l$ и для любого $k = 0, 1, \dots, n$ и любого x из сегмента $[0, 2l]$ имеет вид

$$\alpha(2lk+x) = \frac{1}{2(n+1)} \left\{ \widetilde{\varphi}(0) \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \widetilde{\varphi}(x) - \int_0^x \widetilde{\psi}(\xi) d\xi \right\}. \quad (22)$$

6) Подчеркнем, что главный член (21) является единственной линейной функцией, обращающейся в $\varphi(0)$ при $t = 0$ и в $\widehat{\varphi}(0)$ при $t = T$.

Подчеркнем, что добавочный член $\alpha(t)$ зависит только от разностей $\widetilde{\varphi}(x)$ и $\widetilde{\psi}(x)$ финального и начального смещений и финальной и начальной скоростей, обращается в нуль на концах сегментов периодичности (т.е. в точках $0, 2l, 4l, \dots, 2l(n+1)$), равномерно на всем сегменте $[0, T]$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{T}\right)$, а в центрах сегментов периодичности (т.е. в точках $l, 3l, 5l, \dots, 2ln+l$) принимает значение $-\frac{1}{2(n+1)} \int_0^l \widetilde{\psi}(\xi) d\xi$, зависящее только от разности $\widetilde{\psi}(x) = \widehat{\psi}(x) - \psi(x)$ финальной и начальной скоростей и совсем не зависящее от начального и от финального смещений.

2°. Задача 2 (оптимизация граничного управления смещением на двух концах)

1) При любом $T > 0$ обобщенное из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ решение $u(x, t)$ смешанной задачи для волнового уравнения (1) с начальными условиями (2) из классов (4) и с граничными условиями $u(0, t) = \mu(t)$, $u(l, t) = \nu(t)$ из классов (6) при выполнении

условий согласования $\varphi(0) = \mu(0)$, $\varphi(l) = \nu(0)$ определяется как функция $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_0^T u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t)] dx dt + \int_0^l \varphi(x) \Phi_t(x, 0) dx \\ & - \int_0^l \psi(x) \Phi(x, 0) dx - \int_0^T \mu(t) \Phi_x(0, t) dt + \int_0^T \nu(t) \Phi_x(l, t) dt = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

для любой функции $\Phi(x, t)$ из класса $C^{(2)}(\overline{Q_T})$, удовлетворяющей тем же условиям (15) и (16), что и в задаче 1.

2) При $T > l$ функция $\tilde{u}(x, t)$, определяемая равенством

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi \right] & \text{в } \Delta_1, \\ \frac{1}{2} \left[\varphi(x+t) + \varphi(0) + \int_0^{x+t} \psi(\xi) d\xi \right] & \text{в } \Delta_2, \\ \frac{1}{2} \left[\varphi(l) + \varphi(x-t) + \int_{x-t}^l \psi(\xi) d\xi \right] & \text{в } \Delta_3, \\ \frac{1}{2} \left[\varphi(0) + \varphi(l) + \int_0^l \psi(\xi) d\xi \right] = C_0 = \text{const} & \text{в } \Delta_4, \end{cases} \quad (24)$$

в котором Δ_1 – треугольник, ограниченный отрезками прямых $x-t=0$, $x+t-l=0$ и $t=0$, Δ_2 – треугольник, ограниченный отрезками прямых $x-t=0$, $x+t-l=0$ и $x=0$, Δ_3 – треугольник, ограниченный отрезками прямых $x-t=0$, $x+t-l=0$ и $x-l=0$, Δ_4 – пятиугольник, ограниченный отрезками прямых $x-t=0$, $x+t-l=0$, $x=0$, $x-l=0$ и $t-T=0$, является единственным решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи для волнового уравнения $\tilde{u}_{tt}(x, t) - \tilde{u}_{xx}(x, t) = 0$ с начальными условиями $\tilde{u}(x, 0) = \varphi(x)$, $\tilde{u}_t(x, 0) = \psi(x)$ и с граничными условиями

$$\begin{aligned} \tilde{u}(0, t) = \tilde{\mu}(t) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\varphi(t) + \varphi(0) + \int_0^t \psi(\xi) d\xi \right] & \text{при } 0 \leq t \leq l, \\ C_0 & \text{при } l \leq t \leq T, \end{cases} \\ \tilde{u}(l, t) = \tilde{\nu}(t) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\varphi(l-t) + \varphi(l) + \int_{l-t}^l \psi(\xi) d\xi \right] & \text{при } 0 \leq t \leq l, \\ C_0 & \text{при } l \leq t \leq T. \end{cases} \end{aligned}$$

3) При $T = 2l(n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, функция $\hat{u}(x, t) = u(x, t) - \tilde{u}(x, t)$, являющаяся единственным решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи для волнового уравнения $\hat{u}_{tt}(x, t) - \hat{u}_{xx}(x, t) = 0$ с нулевыми начальными условиями $\hat{u}(x, 0) = 0$, $\hat{u}_t(x, 0) = 0$ и с граничными условиями $\hat{u}(0, t) = \hat{\mu}(t) = \mu(t) - \tilde{\mu}(t)$, $\hat{u}(l, t) = \hat{\nu}(t) = \nu(t) - \tilde{\nu}(t)$, удовлетворяющими условиям согласования $\hat{\mu}(0) = 0$, $\hat{\nu}(0) = 0$, определяется равенством

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, t) &= \sum_{k=0}^n \hat{\mu}(t-x-2kl) - \sum_{k=1}^{n+1} \hat{\mu}(t+x-2kl) \\ &+ \sum_{k=0}^n \hat{\nu}(t+x-2kl-l) - \sum_{k=1}^{n+1} \hat{\nu}(t-x-2kl+l), \end{aligned} \quad (25)$$

в котором символы $\widehat{\mu}(t)$ и $\widehat{\nu}(t)$ обозначают функции, совпадающие с $\widehat{\mu}(t)$ и $\widehat{\nu}(t)$ соответственно при $0 \leq t \leq T$ и равные нулю при $t < 0$.

4) Из равенства (25) и финальных условий (3) и из условия согласования получим следующие три зависящие только от разностей (13) условия связи:

$$\begin{cases} -\sum_{k=0}^n \mu'(2lk+x) + \sum_{k=1}^{n+1} \nu'(2lk+x-l) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\psi}(x)], \\ -\sum_{k=1}^{n+1} \mu'(2lk-x) + \sum_{k=0}^n \nu'(2lk+l-x) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}'(x) - \tilde{\psi}(x)], \\ \int_0^T [\mu'(t) + \nu'(t)] dt = \tilde{\varphi}(0) + \tilde{\varphi}(l), \end{cases} \quad (26)$$

первые два из которых являются равенствами элементов $L_2[0, l]$.

5) Решая задачу об отыскании минимума интеграла граничной энергии (9) с условиями связи (26), мы получим следующие выражения для оптимальных граничных управлений $u(0, t) = \mu(t)$ и $u(l, t) = \nu(t)$:

$$\mu(t) = L_1(t) + \alpha_1(t), \quad \nu(t) = L_2(t) + \alpha_2(t), \quad (27)$$

главные члены $L_1(t)$ и $L_2(t)$ которых являются линейными функциями вида

$$L_1(t) = \tilde{\varphi}(0) \frac{t}{T} + \varphi(0) \left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad L_2(t) = \tilde{\varphi}(l) \frac{t}{T} + \varphi(l) \left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad (28)$$

а добавочные члены $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ которых являются на сегменте $[0, T] = [0, 2l(n+1)]$ периодическими функциями периода $2l$ и для любого $k = 0, 1, \dots, n$ и любого x из сегмента $0 \leq x \leq 2l$ имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_1(2lk+x) &= \frac{\tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(0)}{4l(n+1)} x \\ &+ \begin{cases} \frac{1}{4(n+1)} \left[\tilde{\varphi}(0) - \tilde{\varphi}(x) - \int_0^x \tilde{\psi}(\xi) d\xi \right] & \text{при } 0 \leq x \leq l, \\ \frac{1}{4(n+1)} \left[\tilde{\varphi}(0) - 2\tilde{\varphi}(l) + \tilde{\varphi}(2l-x) - \int_0^{2l-x} \tilde{\psi}(\xi) d\xi \right] & \text{при } l \leq x \leq 2l, \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(2lk+x) &= \frac{\tilde{\varphi}(0) - \tilde{\varphi}(l)}{4l(n+1)} x \\ &+ \begin{cases} \frac{1}{4(n+1)} \left[\tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(l-x) - \int_{l-x}^l \tilde{\psi}(\xi) d\xi \right] & \text{при } 0 \leq x \leq l, \\ \frac{1}{4(n+1)} \left[\tilde{\varphi}(l) - 2\tilde{\varphi}(0) + \tilde{\varphi}(x-l) - \int_{x-l}^l \tilde{\psi}(\xi) d\xi \right] & \text{при } l \leq x \leq 2l. \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

6) Подчеркнем, что первый из главных членов (28) является единственной линейной функцией, обращающейся в $\varphi(0)$ при $t = 0$ и в $\tilde{\varphi}(0)$ при $t = T$, а второй из главных членов (28) является единственной линейной функцией, обращающейся в $\varphi(l)$ при $t = 0$ и в $\tilde{\varphi}(l)$ при $t = T$.

Подчеркнем, что добавочные члены (29) и (30) зависят только от разностей $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ финального и начального смещений и финальной и начальной скоростей, обращаются в нуль на концах сегментов периодичности (т.е. в точках $0, 2l, 4l, 6l, \dots, 2l(n+1)$), равномерно на всем сегменте $[0, T]$ имеют порядок $O(\frac{1}{T})$, а в центрах сегментов периодичности (т.е. в точках $l, 3l, 5l, \dots, 2ln+l$) принимают значение $-\frac{1}{4(n+1)} \int_0^l \tilde{\psi}(\xi) d\xi$, зависящее только от разности $\tilde{\psi}(x) = \hat{\psi}(x) - \psi(x)$ финальной и начальной скоростей и совсем не зависящее от начального и от финального смещений.

3°. Задача 3 (оптимизация граничного управления смещением на одном конце при свободном втором конце)

1) При любом $T > 0$ обобщенное из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ решение $u(x, t)$ смешанной задачи для волнового уравнения (1) с начальными условиями (2) из классов (4) и с граничными условиями $u(0, t) = \mu(t)$, $u_x(l, t) = 0$, в которых $\mu(t) \in W_2^1[0, T]$, определяется как функция $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, удовлетворяющая тому же самому тождеству (14), что и в задаче 1, но для любой функции $\Phi(x, t)$ из класса $C^{(2)}(\overline{Q}_T)$, для которой выполнены условия (15) и условия $\Phi(0, t) \equiv 0$, $\Phi_x(l, t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T$.

2) При $T > 2l$ функция $\tilde{u}(x, t)$, определяемая равенством (17) с теми же Δ_1, Δ_2 и Δ_3 , что и в задаче 1, при условии, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ продолжены четно относительно точки $x = l$ с сегмента $[0, l]$ на сегмент $[l, 2l]$, является единственным решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи для волнового уравнения $\tilde{u}_{tt}(x, t) - \tilde{u}_{xx}(x, t) = 0$ с начальными условиями $\tilde{u}(x, 0) = \varphi(x)$, $\tilde{u}_t(x, 0) = \psi(x)$ и с граничными условиями

$$\tilde{u}(0, t) = \tilde{\mu}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\varphi(t) + \varphi(0) + \int_0^t \psi(\xi) d\xi \right] & \text{при } 0 \leq t \leq 2l, \\ \varphi(0) + \int_0^l \psi(\xi) d\xi = C_0 = \text{const} & \text{при } 2l < t \leq T, \end{cases}$$

$$\tilde{u}_x(l, t) = 0 \text{ как элемент пространства } L_2[0, T].$$

3) При $T = 4l(n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, функция $\hat{u}(x, t) = u(x, t) - \tilde{u}(x, t)$, являющаяся единственным решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи для волнового уравнения $\hat{u}_{tt}(x, t) - \hat{u}_{xx}(x, t) = 0$ с нулевыми начальными условиями $\hat{u}(x, 0) = 0$, $\hat{u}_t(x, 0) = 0$ и с граничными условиями $\hat{u}(0, t) = \hat{\mu}(t) = \mu(t) - \tilde{\mu}(t)$, $\hat{u}_x(l, t) = 0$, удовлетворяющими условию согласования $\hat{\mu}(0) = 0$, определяется равенством

$$\hat{u}(x, t) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \hat{\mu}(t - x - 2kl) - \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \hat{\mu}(t + x - 2kl), \quad (31)$$

в котором символ $\hat{\mu}(t)$ обозначает функцию, совпадающую с $\hat{\mu}(t)$ при $0 \leq t \leq T$ и равную нулю при $t < 0$.

4) Из равенства (31) и финальных условий (3) и из условия согласования в предположении, что функции $\hat{\varphi}(x)$ и $\hat{\psi}(x)$ также продолжены четно относительно точки

$x = l$ с сегмента $[0, l]$ на сегмент $[l, 2l]$, мы получим следующие зависящие только от разностей (13) условия связи:

$$\begin{cases} -\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \mu'(2lk + x) = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\psi}(x)], \\ \int_0^T \mu'(t) dt = \tilde{\varphi}(0), \end{cases} \quad (32)$$

первое из которых является равенством элементов $L_2[0, 2l]$.

5) Решая задачу об отыскании минимума интеграла граничной энергии (8) с условиями связи (32), мы получим следующее выражение для оптимального граничного управления $u(0, t) = \mu(t)$:

$$\mu(t) = L(t) + \alpha(t), \quad (33)$$

главный член $L(t)$ которого определяется тем же равенством (21), что и в задаче 1, а добавочный член $\alpha(t)$ которого является на сегменте $[0, T] = [0, 4l(n+1)]$ периодической функцией периода $4l$ и для любого $k = 0, 1, \dots, n$ и любого x из сегмента $[0, 4l]$ равен

$$\alpha(4lk + x) = \begin{cases} \frac{1}{4(n+1)} \left[\tilde{\varphi}(0) - \tilde{\varphi}(x) - \int_0^x \tilde{\psi}(\xi) d\xi \right] & \text{при } 0 \leq x \leq 2l, \\ \frac{1}{4(n+1)} \left[\tilde{\varphi}(x - 2l) - \tilde{\varphi}(0) - \int_{x-2l}^{2l} \tilde{\psi}(\xi) d\xi \right] & \text{при } 2l \leq x \leq 4l. \end{cases} \quad (34)$$

6) Подчеркнем, что (как и в задачах 1 и 2) главный член $L(t)$ является единственной линейной функцией, обращающейся в $\varphi(0)$ при $t = 0$ и обращающейся в $\tilde{\varphi}(0)$ при $t = T$.

Подчеркнем, что добавочный член $\alpha(t)$, определяемый равенством (34), зависит только от разностей $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ финального и начального смещений и финальной и начальной скоростей, обращается в нуль на концах сегментов периодичности (т.е. в точках $0, 4l, 8l, \dots, 4l(n+1)$), равномерно на всем сегменте $[0, T]$ имеет порядок $O(\frac{1}{T})$, а в центрах сегментов периодичности (т.е. в точках $2l, 6l, 10l, \dots, 4ln + 2l$) принимает значение $-\frac{1}{2(n+1)} \int_0^l \tilde{\psi}(\xi) d\xi$, зависящее только от разности $\tilde{\psi}(x) = \hat{\psi}(x) - \psi(x)$ финальной и начальной скоростей и совсем не зависящее от начального и от финального смещений.

4°. Задача 4 (оптимизация граничного управления упругой силой на одном конце при закрепленном другом конце)

1) При любом $T > 0$ обобщенное из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ решение $u(x, t)$ волнового уравнения (1) с начальными условиями (2) из классов (4) и с граничными условиями $u_x(0, t) = \mu(t)$, $u(l, t) = 0$, в которых $\mu(t) \in L_2[0, T]$ и выполнено условие согласования $\varphi(l) = 0$, определяется как функция $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_0^T u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t)] dx dt + \int_0^l \varphi(x) \Phi_t(x, 0) dx \\ & - \int_0^l \psi(x) \Phi(x, 0) dx + \int_0^T \mu(t) \Phi(0, t) dt = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

для любой функции $\Phi(x, t)$ из класса $C^{(2)}(\overline{Q_T})$, удовлетворяющей условиям (15) и условиям $\Phi_x(0, t) \equiv 0$, $\Phi(l, t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T$.

2) При $T > 2l$ функция $\tilde{u}(x, t)$, определяемая равенством (17) с теми же Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 , что и в задаче 1, в предположении, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ продолжены нечетно² относительно точки $x = l$ с сегмента $[0, l]$ на сегмент $[l, 2l]$ и выполнено условие согласования $\varphi(l) = 0$, является единственным решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи для волнового уравнения $\tilde{u}_{tt}(x, t) - \tilde{u}_{xx}(x, t) = 0$ с начальными условиями $\tilde{u}(x, 0) = \varphi(x)$, $\tilde{u}_t(x, 0) = \psi(x)$ и с граничными условиями

$$\tilde{u}_x(0, t) = \tilde{\mu}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi'(t) + \psi(t)] & \text{при } 0 \leq t \leq 2l, \\ 0 & \text{при } 2l < t \leq T, \end{cases}$$

$$\tilde{u}(l, t) = 0 \text{ при } 0 \leq t \leq T.$$

3) При $T = 4l(n + 1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, функция $\hat{u}(x, t) = u(x, t) - \tilde{u}(x, t)$, являющаяся единственным решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи для волнового уравнения $\hat{u}_{tt}(x, t) - \hat{u}_{xx}(x, t) = 0$ с нулевыми начальными условиями $\hat{u}(x, 0) = 0$, $\hat{u}_t(x, 0) = 0$ и с граничными условиями $\hat{u}_x(0, t) = \hat{\mu}(t) = \mu(t) - \tilde{\mu}(t)$, $\hat{u}(l, t) = 0$, определяется равенством

$$\hat{u}(x, t) = - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \int_0^{t-x-2kl} \underline{\hat{\mu}}(\tau) d\tau - \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \int_0^{t+x-2kl} \underline{\hat{\mu}}(\tau) d\tau, \quad (36)$$

в котором символ $\underline{\hat{\mu}}(t)$ обозначает функцию, совпадающую с $\hat{\mu}(t)$ при $0 \leq t \leq T$ и равную нулю при $t < 0$.

4) Из равенства (36) и финальных условий (3) в предположении, что $\hat{\varphi}(l) = 0$ и функции $\hat{\varphi}(x)$ и $\hat{\psi}(x)$ также продолжены нечетно относительно точки $x = l$ с сегмента $[0, l]$ на сегмент $[l, 2l]$, мы получим следующее зависящее только от разностей (13) условие связи:

$$- \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \mu(2lk + x) = \frac{1}{2} [\hat{\varphi}'(x) + \hat{\psi}(x)], \quad (37)$$

являющееся равенством элементов $L_2[0, 2l]$.

5) Решая задачу об отыскании минимума интеграла граничной энергии (10) с условием связи (37), мы получим, что оптимальное граничное управление $u_x(0, t) = \mu(t)$ является на сегменте $[0, T] = [0, 4l(n + 1)]$ периодической функцией периода $4l$ и для любого $k = 0, 1, \dots, n$ и любого x из полусегмента $0 \leq x < 4l$ определяется равенством³

$$\mu(4lk + x) = \begin{cases} -\frac{1}{4(n+1)} [\hat{\varphi}'(x) + \hat{\psi}(x)] & \text{при } 0 \leq x \leq 2l, \\ \frac{1}{4(n+1)} [\hat{\varphi}'(x - 2l) + \hat{\psi}(x - 2l)] & \text{при } 2l < x < 4l. \end{cases}$$

²При таком продолжении постоянная C_0 в (17) равна нулю.

³Приводимое равенство не определяет $\mu(t)$ в точке $t = T$, но поскольку $\mu(t)$ является элементом $L_2[0, T]$, ее значение в одной точке $t = T$ может быть любым.

6) Подчеркнем, что оптимальная граничная сила $\mu(t)$ зависит только от разностей $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ финального и начального смещений и финальной и начальной скоростей и что для квадрата нормы $\mu(t)$ в $L_2[0, T]$ справедлива оценка

$$\int_0^T \mu^2(t) dt = O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Отметим еще одно важное свойство $\mu(t)$: интеграл от $\mu(t)$ по любому содержащемуся в $[0, T] = [0, 4l(n+1)]$ сегменту длины $4l$ равен нулю.

5°. Задача 5 (оптимизация граничного управления упругой силой на одном конце при свободном втором конце)

1) При любом $T > 0$ обобщенное из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ решение $u(x, t)$ смешанной задачи для волнового уравнения (1) с начальными условиями (2) из классов (4) и с граничными условиями $u_x(0, t) = \mu(t)$, $u_x(l, t) = 0$, в которых $\mu(t) \in L_2[0, T]$, определяется как функция $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, удовлетворяющая тому же интегральному тождеству (35), что и в задаче 4, для любой функции $\Phi(x, t)$ из класса $C^{(2)}(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющей условиям (15) и условиям $\Phi_x(0, t) \equiv 0$, $\Phi_x(l, t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T$.

2) При $T > 2l$ функция $\tilde{u}(x, t)$, определяемая тем же равенством (17) с теми же Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 , что и в задаче 1, при условии, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ продолжены чётно относительно точки $x = l$ с сегмента $[0, l]$ на сегмент $[l, 2l]$, является единственным решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи для волнового уравнения $\tilde{u}_{tt}(x, t) - \tilde{u}_{xx}(x, t) = 0$ с начальными условиями $\tilde{u}(x, 0) = \varphi(x)$, $\tilde{u}_t(x, 0) = \psi(x)$ и с граничными условиями

$$\tilde{u}_x(0, t) = \tilde{\mu}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi'(t) + \psi(t)] & \text{при } 0 \leq t \leq 2l, \\ 0 & \text{при } 2l < t \leq T, \end{cases}$$

$$\tilde{u}_x(l, t) = 0 \text{ как элемент пространства } L_2[0, T].$$

3) При $T = 2l(n+1)$, где $n = 1, 2, \dots$, функция $\hat{u}(x, t) = u(x, t) - \tilde{u}(x, t)$, являющаяся единственным решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи для волнового уравнения $\hat{u}_{tt}(x, t) - \hat{u}_{xx}(x, t) = 0$ с нулевыми начальными условиями $\hat{u}(x, 0) = 0$, $\hat{u}_t(x, 0) = 0$ и с граничными условиями $\hat{u}_x(0, t) = \hat{\mu}(t) = \mu(t) - \tilde{\mu}(t)$, $\hat{u}_x(l, t) = 0$, определяется равенством

$$\hat{u}(x, t) = - \sum_{k=0}^n \int_0^{t-x-2kl} \underline{\hat{\mu}}(\tau) d\tau - \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^{t+x-2kl} \underline{\hat{\mu}}(\tau) d\tau, \quad (38)$$

в котором символом $\underline{\hat{\mu}}(t)$ обозначена функция, совпадающая с $\hat{\mu}(t)$ при $0 \leq t \leq T$ и равная нулю при $t < 0$.

4) Из равенства (38) и финальных условий (3) в предположении, что функции $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ также продолжены чётно относительно точки $x = l$ с сегмента $[0, l]$ на сегмент $[l, 2l]$, мы получим следующие два условия связи:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \mu(2lk + x) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\psi}(x)], \\ - \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^{2lk} \mu(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_0^{2lk} \mu(t) dt = \tilde{\varphi}(0) - 2(n+1) \int_0^l \psi(x) dx, \end{cases} \quad (39)$$

первое из которых зависит только от разностей (13) и является равенством элементов $L_2[0, 2l]$, а второе зависит от разности смещений $\tilde{\varphi}(x)$ и от начальной скорости $\psi(x)$.

5) Решая задачу об отыскании минимума интеграла граничной энергии (10) с условиями связи (39), мы получим, что оптимальная упругая граничная сила $u_x(0, t) = \mu(t)$ является суммой двух слагаемых

$$\mu(t) = L(t) + \alpha(t),$$

первое из которых $L(t)$ при постоянном числе $\hat{\lambda}$ вида

$$\hat{\lambda} = \frac{\tilde{\varphi}(0) - (n+1) \int_0^l [\hat{\psi}(x) + \psi(x)] dx}{\frac{l}{3}n(n+1)(n+2)}$$

является линейной функцией вида $L(t) = \frac{\hat{\lambda}}{2l}t$, а второе из которых $\alpha(t)$ является на сегменте $[0, T] = [0, 2l(n+1)]$ периодической функцией периода $2l$ и для любого $k = 0, 1, \dots, n$ и любого x из полусегмента $0 \leq x < 2l$ имеет вид

$$\alpha(2lk + x) = -\frac{1}{2(n+1)}[\tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\psi}(x)] - \hat{\lambda}\left(\frac{x}{2l} + \frac{n}{2}\right).$$

6) Подчеркнем, что входящая в оптимальную граничную силу $\mu(t)$ линейная функция $L(t)$ равномерно на всем сегменте $[0, T] \equiv [0, 2l(n+1)]$ имеет порядок $O(\frac{1}{T})$, а в случае, когда финальная и начальная скорости удовлетворяют условию $\int_0^l [\hat{\psi}(x) + \psi(x)] dx = 0$, — более высокий порядок $O(\frac{1}{T^2})$.

Отметим, кроме того, что квадрат нормы оптимальной граничной силы $\mu(t)$ в пространстве $L_2[0, T]$ имеет порядок

$$\int_0^T \mu^2(t) dt = O\left(\frac{1}{T}\right),$$

в то время как для функции $\mu(t)$ справедливо равенство

$$\int_0^T \mu(t) dt = \int_0^l [\psi(x) - \hat{\psi}(x)] dx = - \int_0^l \tilde{\psi}(x) dx.$$

Все указанные в этом пункте результаты с подробными обоснованиями опубликованы в нашей работе [4].

6°. Задача 6 (оптимизация граничных управлений упругой силой на двух концах)

1) При любом $T > 0$ обобщенное из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ решение $u(x, t)$ смешанной задачи (1) с начальными условиями (2) из классов (4) и с граничными условиями $u_x(0, t) = \mu(t)$, $u_x(l, t) = \nu(t)$ из класса (7) определяется как функция $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_0^T u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t)] dx dt + \int_0^l \varphi(x) \Phi_t(x, 0) dx \\ & - \int_0^l \psi(x) \Phi(x, 0) dx + \int_0^T \mu(t) \Phi(0, t) dt - \int_0^T \nu(t) \Phi(l, t) dt = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

для любой функции $\Phi(x, t)$ из класса $C^{(2)}(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющей условиям (15) и условиям $\Phi_x(0, t) \equiv 0$, $\Phi_x(l, t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T$.

2) При $T > l$ функция $\tilde{u}(x, t)$, определяемая равенством (24) с теми же $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ и Δ_4 , что и в задаче 2, является единственным решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи для волнового уравнения $\tilde{u}_{tt}(x, t) - \tilde{u}_{xx}(x, t) = 0$ с начальными условиями $\tilde{u}(x, 0) = \varphi(x)$, $\tilde{u}_t(x, 0) = \psi(x)$ и с граничными условиями

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x(0, t) = \tilde{\mu}(t) &= \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi'(t) + \psi(t)] & \text{при } 0 \leq t \leq l, \\ 0 & \text{при } l < t \leq T, \end{cases} \\ \tilde{u}_x(l, t) = \tilde{\nu}(t) &= \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi'(l-t) - \psi(l-t)] & \text{при } 0 \leq t \leq l, \\ 0 & \text{при } l < t \leq T. \end{cases} \end{aligned}$$

3) При $T = 2l(n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, функция $\hat{u}(x, t) = u(x, t) - \tilde{u}(x, t)$, являющаяся единственным решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи для волнового уравнения $\hat{u}_{tt}(x, t) - \hat{u}_{xx}(x, t) = 0$ с нулевыми начальными условиями $\hat{u}(x, 0) = 0$, $\hat{u}_t(x, 0) = 0$ и с граничными условиями $\hat{u}_x(0, t) = \hat{\mu}(t) = \mu(t) - \tilde{\mu}(t)$, $\hat{u}_x(l, t) = \hat{\nu}(t) = \nu(t) - \tilde{\nu}(t)$, определяется равенством

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, t) &= - \sum_{k=0}^n \int_0^{t-x-2kl} \underline{\hat{\mu}}(\tau) d\tau - \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^{t+x-2kl} \underline{\hat{\mu}}(\tau) d\tau \\ &\quad + \sum_{k=0}^n \int_0^{t+x-l-2kl} \underline{\hat{\nu}}(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^{t-x+l-2kl} \underline{\hat{\nu}}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (41)$$

в котором символы $\underline{\hat{\mu}}(t)$ и $\underline{\hat{\nu}}(t)$ обозначают функции, совпадающие с $\hat{\mu}(t)$ и $\hat{\nu}(t)$ соответственно при $0 \leq t \leq T$ и равные нулю при $t < 0$.

4) Из равенства (41) и финальных условий (3) мы получим следующие три условия связи:

$$\left\{ \begin{aligned} & - \sum_{k=0}^n \mu(2lk+x) + \sum_{k=1}^{n+1} \nu(2lk-l+x) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\psi}(x)], \\ & \sum_{k=1}^{n+1} \mu(2lk-x) - \sum_{k=0}^n \nu(2lk+l-x) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}'(x) - \tilde{\psi}(x)], \\ & \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^{2lk} [\nu(\tau) - \mu(\tau)] d\tau + \sum_{k=1}^n \int_0^{2lk} [\nu(\tau) - \mu(\tau)] d\tau \\ & \quad + \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^{2lk-l} [\nu(\tau) - \mu(\tau)] d\tau + \sum_{k=0}^n \int_0^{2lk+l} [\nu(\tau) - \mu(\tau)] d\tau \\ & \quad = \tilde{\varphi}(0) + \tilde{\varphi}(l) - 4(n+1) \int_0^l \psi(x) dx, \end{aligned} \right. \quad (42)$$

первые два из которых являются равенствами элементов $L_2[0, l]$ и зависят только от разностей (13), а третье зависит от разности смещений $\tilde{\varphi}(x)$ и от начальной скорости $\psi(x)$.

5) Решая задачу об отыскании минимума интеграла граничной энергии (11) с тремя условиями связи (42), мы получим, что оптимальные граничные управления $u_x(0, t) = \mu(t)$ и $u_x(l, t) = \nu(t)$ являются суммами двух слагаемых $\mu(t) = L_1(t) + \alpha_1(t)$, $\nu(t) = L_2(t) + \alpha_2(t)$, первые из которых $L_1(t)$ и $L_2(t)$ при постоянном числе

$$\hat{\lambda} = \frac{\frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(0) + \tilde{\varphi}(l)] - (n+1) \int_0^l [\hat{\psi}(x) + \psi(x)] dx}{\frac{1}{3}l(n+1)(2n+1)(2n+3)}$$

являются линейными функциями вида

$$L_1(t) = \frac{\hat{\lambda}}{l}t, \quad L_2(t) = -\frac{\hat{\lambda}}{l}t,$$

а вторые из которых $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ являются на сегменте $[0, T] = [0, 2l(n+1)]$ периодическими функциями периода $2l$ и для любого $k = 0, 1, \dots, n$ и любого x из $[0, 2l]$ имеют вид

$$\alpha_1(2lk+x) = \begin{cases} -\frac{1}{4(n+1)}[\tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\psi}(x)] - \hat{\lambda}\left(\frac{x}{l} + n + \frac{1}{2}\right) & \text{при } 0 \leq x < l, \\ \frac{1}{4(n+1)}[\tilde{\varphi}'(2l-x) - \tilde{\psi}(2l-x)] - \hat{\lambda}\left(\frac{x}{l} + n - \frac{1}{2}\right) & \text{при } l \leq x < 2l, \end{cases}$$

$$\alpha_2(2lk+x) = \begin{cases} -\frac{1}{4(n+1)}[\tilde{\varphi}'(l-x) - \tilde{\psi}(l-x)] + \hat{\lambda}\left(\frac{x}{l} + n + \frac{1}{2}\right) & \text{при } 0 \leq x < l, \\ \frac{1}{4(n+1)}[\tilde{\varphi}'(x-l) + \tilde{\psi}(x-l)] + \hat{\lambda}\left(\frac{x}{l} + n - \frac{1}{2}\right) & \text{при } l \leq x < 2l. \end{cases}$$

6) Отметим, что каждая из линейных функций $L_1(t)$ и $L_2(t)$ равномерно на сегменте $[0, T] = [0, 2l(n+1)]$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{T}\right)$, а в случае, когда финальная скорость $\hat{\psi}(x)$ и начальная скорость $\psi(x)$ связаны соотношением $\int_0^l [\hat{\psi}(x) + \psi(x)] dx = 0$, — более высокий порядок $O\left(\frac{1}{T^2}\right)$.

Для квадратов норм в $L_2[0, T]$ оптимальных граничных управлений $\mu(t)$ и $\nu(t)$ справедливы оценки

$$\int_0^T \mu^2(t) dt = O\left(\frac{1}{T}\right), \quad \int_0^T \nu^2(t) dt = O\left(\frac{1}{T}\right),$$

а для самих $\mu(t)$ и $\nu(t)$ справедливы равенства

$$\int_0^T \mu(t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^l \tilde{\psi}(x) dx, \quad \int_0^T \nu(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^l \tilde{\psi}(x) dx.$$

Сумма оптимальных граничных управлений $\mu(t) + \nu(t)$ обладает следующим удивительным свойством: эта сумма является на сегменте $[0, T] = [0, 2l(n+1)]$ периодической функцией периода $2l$, причем *интеграл от этой суммы по любому содержащемуся в $[0, T]$ сегменту длины $2l$ равен нулю.*

7°. Задача 7 (оптимизация комбинированного граничного управления упругой силой на одном конце и смещением на другом конце)

1) При любом $T > 0$ обобщенное решение $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи для волнового уравнения (1) с начальными условиями (2) из классов (4) и с граничными условиями $u_x(0, t) = \mu(t)$, $u(l, t) = \nu(t)$, в которых $\mu(t) \in L_2[0, T]$, $\nu(t) \in W_2^1[0, T]$ и выполнено условие согласования $\varphi(0) = \nu(0)$, определяется как функция $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_0^T u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t)] dx dt + \int_0^l \varphi(x) \Phi_t(x, 0) dx \\ & - \int_0^l \psi(x) \Phi(x, 0) dx + \int_0^T \mu(t) \Phi(0, t) dt + \int_0^T \nu(t) \Phi_x(l, t) dt = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

для любой функции $\Phi(x, t)$ из класса $C^{(2)}(\overline{Q_T})$, удовлетворяющей условиям (15) и условиям $\Phi_x(0, t) \equiv 0$, $\Phi(l, t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T$.

2) При $T > l$ функция $\tilde{u}(x, t)$, определяемая равенством (24) с теми же $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ и Δ_4 , что и в задаче 2, является решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи для волнового уравнения $\tilde{u}_{tt}(x, t) - \tilde{u}_{xx}(x, t) = 0$ с начальными условиями $\tilde{u}(x, 0) = \varphi(x)$, $\tilde{u}_t(x, 0) = \psi(x)$ и с граничными условиями

$$\tilde{u}_x(0, t) = \tilde{\mu}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\varphi'(t) + \psi(t)] & \text{при } 0 \leq t \leq l, \\ 0 & \text{при } l < t \leq T, \end{cases} \quad (44)$$

$$\tilde{u}(l, t) = \tilde{\nu}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\varphi(l-t) + \varphi(l) + \int_{l-t}^l \psi(\xi) d\xi \right] & \text{при } 0 \leq t \leq l, \\ C_0 = \frac{1}{2} \left[\varphi(0) + \varphi(l) + \int_0^l \psi(\xi) d\xi \right] & \text{при } l \leq t \leq T. \end{cases} \quad (45)$$

3) При $T = 4l(n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, функция $\hat{u}(x, t) = u(x, t) - \tilde{u}(x, t)$, являющаяся единственным решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи для волнового уравнения $\hat{u}_{tt}(x, t) - \hat{u}_{xx}(x, t) = 0$ с нулевыми начальными условиями $\hat{u}(x, 0) = 0$, $\hat{u}_t(x, 0) = 0$ и с граничными условиями $\hat{u}_x(0, t) = \hat{\mu}(t) = \mu(t) - \tilde{\mu}(t)$, $\hat{u}(l, t) = \hat{\nu}(t) = \nu(t) - \tilde{\nu}(t)$, удовлетворяющими условию согласования $\hat{\nu}(0) = 0$, определяется равенством

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, t) = & - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \int_0^{t-x-2kl} \underline{\hat{\mu}}(\tau) d\tau - \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \int_0^{t+x-2kl} \underline{\hat{\mu}}(\tau) d\tau \\ & + \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \underline{\hat{\nu}}(t-2kl-l+x) - \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \underline{\hat{\nu}}(t-2kl+l-x), \end{aligned} \quad (46)$$

в котором символы $\underline{\hat{\mu}}(t)$ и $\underline{\hat{\nu}}(t)$ обозначают функции, совпадающие с $\hat{\mu}(t)$ и $\hat{\nu}(t)$ соответственно при $0 \leq t \leq T$ и равные нулю при $t < 0$.

4) Из равенства (46), финальных условий (3) и из условий согласования получим следующие три зависящие только от разностей (13) условия связи:

$$\begin{cases} -\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \mu(2lk+x) + \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \nu'(2lk-l+x) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\psi}(x)], \\ \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \mu(2lk-x) + \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \nu'(2lk+l-x) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}'(x) - \tilde{\psi}(x)], \\ \int_0^T \nu'(t) dt = \tilde{\varphi}(l), \end{cases} \quad (47)$$

первые два из которых являются равенствами элементов $L_2[0, l]$.

5) Решая задачу об отыскании минимума интеграла граничной энергии (12) с тремя условиями связи (47), мы придем к следующим выражениям для оптимальной граничной силы $u_x(0, t) = \mu(t)$ и оптимального граничного смещения $u(l, t) = \nu(t)$: оптимальная граничная сила $\mu(t)$ является на сегменте $[0, T] = [0, 4l(n+1)]$ периодической функцией периода $4l$ и для любого $k = 0, 1, \dots, n$ и любого x из полусегмента $0 \leq x < 4l$ имеет вид

$$\mu(4lk+x) = \begin{cases} -\frac{1}{8(n+1)}[\tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\psi}(x)] & \text{при } 0 \leq x < l, \\ -\frac{1}{8(n+1)}[\tilde{\varphi}'(2l-x) - \tilde{\psi}(2l-x)] & \text{при } l \leq x < 2l, \\ \frac{1}{8(n+1)}[\tilde{\varphi}'(x-2l) + \tilde{\psi}(x-2l)] & \text{при } 2l \leq x < 3l, \\ \frac{1}{8(n+1)}[\tilde{\varphi}'(4l-x) - \tilde{\psi}(4l-x)] & \text{при } 3l \leq x < 4l; \end{cases} \quad (48)$$

оптимальное граничное смещение $\nu(t)$ равняется сумме двух слагаемых $\nu(t) = L(t) + \alpha(t)$, первое из которых $L(t)$ является на сегменте $[0, T]$ линейной функцией вида

$$L(t) = \tilde{\varphi}(l) \frac{t}{T} + \varphi(l) \left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad (49)$$

а второе из которых $\alpha(t)$ является на сегменте $[0, T] = [0, 4l(n+1)]$ периодической функцией периода $4l$ и для любого $k = 0, 1, \dots, n$ и любого x из сегмента $[0, 4l]$ имеет вид

$$\alpha(4lk+x) = \begin{cases} \frac{1}{8(n+1)} \left[\tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(l-x) - \int_{l-x}^l \tilde{\psi}(\xi) d\xi \right] & \text{при } 0 \leq x \leq l, \\ \frac{1}{8(n+1)} \left[\tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(x-l) - \int_0^l \tilde{\psi}(\xi) d\xi - \int_0^{x-l} \tilde{\psi}(\xi) d\xi \right] & \text{при } l \leq x \leq 2l, \\ \frac{1}{8(n+1)} \left[-\tilde{\varphi}(l) + \tilde{\varphi}(3l-x) + \int_{3l-x}^l \tilde{\psi}(\xi) d\xi - 2 \int_0^l \tilde{\psi}(\xi) d\xi \right] & \text{при } 2l \leq x \leq 3l, \\ \frac{1}{8(n+1)} \left[-\tilde{\varphi}(l) + \tilde{\varphi}(x-3l) - \int_{x-3l}^l \tilde{\psi}(\xi) d\xi \right] & \text{при } 3l \leq x \leq 4l. \end{cases} \quad (50)$$

6) Подчеркнем, что оптимальная граничная сила (48) зависит только от разностей $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ финального и начального смещений и финальной и начальной скоростей, что интеграл от оптимальной граничной силы $\mu(t)$ по любому содержащемуся в $[0, T]$ сегменту длины $4l$ равен нулю и что для квадрата нормы $\mu(t)$ в $L_2[0, T]$ справедлива оценка

$$\int_0^T \mu^2(t) dt = O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Далее, заметим, что первый член (49) в выражении для оптимального граничного смещения $\nu(t)$ является единственной линейной функцией, обращающейся в $\varphi(l)$ при $t = 0$ и в $\tilde{\varphi}(l)$ при $t = T$.

Второй член $\alpha(t)$ в выражении для $\nu(t)$ обращается в нуль на концах сегментов периодичности (т.е. в точках $0, 4l, 8l, \dots, 4l(n+1)$), равномерно на всем сегменте $[0, T]$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{T}\right)$, а в центрах сегментов периодичности (т.е. в точках $2l, 6l, 10l, \dots, 4ln + 2l$) принимает значение $-\frac{1}{4(n+1)} \int_0^l \tilde{\psi}(\xi) d\xi$, зависящее только от разности $\tilde{\psi}(x) = \hat{\psi}(x) - \psi(x)$ финальной и начальной скоростей и совсем не зависящее от начального и от финального смещений.

8°. Обоснование основных утверждений, используемых при проведении оптимизации в задаче 7

Все рассмотренные выше семь задач оптимизируются по стереотипной схеме. В этом пункте мы дадим краткое обоснование всех утверждений, используемых при проведении оптимизации в задаче 7.

Сначала докажем используемое в 2° утверждение о том, что при $T > l$ функция $\tilde{u}(x, t)$, определяемая равенством (24) с $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ и Δ_4 , указанными в п. 2°, является решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи для волнового уравнения $\tilde{u}_{tt}(x, t) - \tilde{u}_{xx}(x, t) = 0$ с начальными условиями $\tilde{u}(x, 0) = \varphi(x)$, $\tilde{u}_t(x, 0) = \psi(x)$ и с граничными условиями (44) и (45).

Принадлежность этой функции классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ очевидна, ибо эта функция в каждой из областей $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ и Δ_4 представляет собой сумму функций от аргумента $(x+t)$ или $(x-t)$, имеющих суммируемую с квадратом производную, и сохраняет непрерывность при переходе через границу любых двух из указанных четырех областей.

Достаточно доказать, что функция $\tilde{u}(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству (43), в котором $u(x, t) = \tilde{u}(x, t)$, $\mu(t) = \tilde{\mu}(t)$, $\nu(t) = \tilde{\nu}(t)$, а $\Phi(x, t)$ — любая функция из класса $C^{(2)}(\overline{Q}_T)$, удовлетворяющая условиям (15) и условиям $\Phi_x(0, t) \equiv 0$, $\Phi(l, t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T$.

Из тождества

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) \{ \Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t) \} &\equiv \{ [\tilde{u}(x, t) \Phi_t(x, t)]_t - [\tilde{u}(x, t) \Phi_x(x, t)]_x \} \\ &\quad + [\tilde{u}_x(x, t) \Phi_x(x, t) - \tilde{u}_t(x, t) \Phi_t(x, t)] \end{aligned}$$

получим, что

$$\int_0^l \int_0^T \tilde{u}(x, t) \{ \Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t) \} dx dt = I_1 + I_2, \quad (51)$$

где

$$I_1 = \iint_{Q_T} \{ [\tilde{u}(x, t) \Phi_t(x, t)]_t - [\tilde{u}(x, t) \Phi_x(x, t)]_x \} dx dt, \quad (52)$$

$$I_2 = \int_0^l \int_0^T [\tilde{u}_x(x, t) \Phi_x(x, t) - \tilde{u}_t(x, t) \Phi_t(x, t)] dx dt. \quad (53)$$

К интегралу (52) применим формулу Грина

$$\iint_{Q_T} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} \right) dx dt = \oint_{\Gamma} P dx + Q dt,$$

где Γ — граница прямоугольника Q_T . При этом получим, что

$$I_1 = - \int_{\Gamma} \tilde{u}(x, t) \Phi_t(x, t) dx - \int_{\Gamma} \tilde{u}(x, t) \Phi_x(x, t) dt. \quad (54)$$

Учитывая, что $\Phi(x, T) \equiv \Phi_t(x, T) \equiv 0$ при $0 \leq x \leq l$, $\Phi_x(0, t) \equiv 0$, $\Phi(l, t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T$, $\tilde{u}(x, 0) = \varphi(x)$, $\tilde{u}(l, t) = \tilde{\nu}(t)$, получим из (54), что

$$I_1 = - \int_0^l \varphi(x) \Phi_t(x, 0) dx - \int_0^T \tilde{\nu}(t) \Phi_x(l, t) dt. \quad (55)$$

Для подсчета I_2 обозначим через $U(x, t)$ следующую функцию:

$$U(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\varphi(x+t) - \varphi(x-t) + \int_0^{x+t} \psi(\tau) d\tau + \int_0^{x-t} \psi(\tau) d\tau \right] & \text{в } \Delta_1, \\ \frac{1}{2} \left[\varphi(x+t) - \varphi(0) + \int_0^{x+t} \psi(\tau) d\tau \right] & \text{в } \Delta_2, \\ \frac{1}{2} \left[\varphi(l) - \varphi(x-t) + \int_0^l \psi(\tau) d\tau + \int_0^{x-t} \psi(\tau) d\tau \right] & \text{в } \Delta_3, \\ \frac{1}{2} \left[\varphi(l) - \varphi(0) + \int_0^l \psi(\tau) d\tau \right] = \text{const} & \text{в } \Delta_4, \end{cases}$$

и заметим, что функция $U(x, t)$ принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ и что почти всюду в Q_T справедливы равенства

$$U_t(x, t) = \tilde{u}_x(x, t), \quad U_x(x, t) = \tilde{u}_t(x, t). \quad (56)$$

Равенства (56) позволяют переписать (53) в виде

$$I_2 = \int_0^l \left[\int_0^T U_t(x, t) \Phi_x(x, t) dt \right] dx - \int_0^T \left[\int_0^l U_x(x, t) \Phi_t(x, t) dx \right] dt. \quad (57)$$

Беря внутренние интегралы в (57) по частям, получим, что

$$\begin{aligned} I_2 = & \int_0^l [U(x, T) \Phi_x(x, T) - U(x, 0) \Phi_x(x, 0)] dx - \int_0^l \int_0^T U(x, t) \Phi_{xt}(x, t) dx dt \\ & - \int_0^T [U(l, t) \Phi_t(l, t) - U(0, t) \Phi_t(0, t)] dt + \int_0^l \int_0^T U(x, t) \Phi_{tx}(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (58)$$

Учитывая взаимное уничтожение в (58) двойных интегралов, принимая во внимание равенства $\Phi_x(x, T) \equiv 0$, $U_x(x, 0) = \tilde{u}_t(x, 0) = \psi(x)$, $U_t(0, t) = \tilde{u}_x(0, t) = \tilde{\mu}(t)$, $\Phi(l, t) \equiv 0$ и используя получаемые интегрированием по частям соотношения

$$\begin{aligned} - \int_0^l U(x, 0) \Phi_x(x, 0) dx &= -U(l, 0) \Phi(l, 0) + U(0, 0) \Phi(0, 0) + \int_0^l U_x(x, 0) \Phi(x, 0) dx \\ &= U(0, 0) \Phi(0, 0) + \int_0^l \psi(x) \Phi(x, 0) dx, \\ - \int_0^T U(l, t) \Phi_t(l, t) dt &= -U(l, T) \Phi(l, T) + U(l, 0) \Phi(l, 0) + \int_0^T U_t(l, t) \Phi(l, t) dt = 0, \\ \int_0^T U(0, t) \Phi_t(0, t) dt &= U(0, T) \Phi(0, T) - U(0, 0) \Phi(0, 0) - \int_0^T U_t(0, t) \Phi(0, t) dt \\ &= -U(0, 0) \Phi(0, 0) - \int_0^T \tilde{\mu}(t) \Phi(0, t) dt, \end{aligned}$$

мы получим, что

$$I_2 = \int_0^l \psi(x) \Phi(x, 0) dx - \int_0^T \tilde{\mu}(t) \Phi(0, t) dt. \quad (59)$$

Из равенств (51), (55) и (59) вытекает справедливость доказываемого нами тождества.

Докажем теперь сформулированное в 3) утверждение о том, что при $T = 4l(n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, функция $\hat{u}(x, t)$, являющаяся решением из класса $\widehat{W}_{\frac{1}{2}}^1(Q_T)$ смешанной задачи для волнового уравнения $\hat{u}_{tt}(x, t) - \hat{u}_{xx}(x, t) = 0$ с нулевыми начальными условиями $\hat{u}(x, 0) = 0$, $\hat{u}_t(x, 0) = 0$ и с граничными условиями $\hat{u}_x(0, t) = \hat{\mu}(t)$, $\hat{u}(l, t) = \hat{\nu}(t)$, в которых $\hat{\nu}(0) = 0$, определяется равенством (46).

Обозначим символом I следующий интеграл:

$$I = \int_0^l \int_0^T \hat{u}(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t)] dx dt. \quad (60)$$

Переписывая I в виде

$$I = \int_0^l \left[\int_0^T \hat{u}(x, t) \Phi_{tt}(x, t) dt \right] dx - \int_0^T \left[\int_0^l \hat{u}(x, t) \Phi_{xx}(x, t) dx \right] dt$$

и производя интегрирование по частям внутренних (заключенных в квадратные скобки) интегралов, получим, что

$$\begin{aligned} I &= \int_0^l [\hat{u}(x, T) \Phi_t(x, T) - \hat{u}(x, 0) \Phi_t(x, 0)] dx - \int_0^l \int_0^T \hat{u}_t(x, t) \Phi_t(x, t) dx dt \\ &\quad - \int_0^T [\hat{u}(l, t) \Phi_x(l, t) - \hat{u}(0, t) \Phi_x(0, t)] dt + \int_0^l \int_0^T \hat{u}_x(x, t) \Phi_x(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (61)$$

Учитывая, что $\Phi_t(x, T) \equiv 0$, $\hat{u}(x, 0) = 0$ при $0 \leq x \leq l$, $\hat{u}(l, t) = \hat{\nu}(t)$, $\Phi_x(0, t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T$, мы получим из (61), что

$$\begin{aligned} I &= \int_0^l \int_0^T \hat{u}_x(x, t) \Phi_x(x, t) dx dt \\ &\quad - \int_0^l \int_0^T \hat{u}_t(x, t) \Phi_t(x, t) dx dt - \int_0^T \hat{\nu}(t) \Phi_x(l, t) dt. \end{aligned} \quad (62)$$

Введем теперь в рассмотрение функцию $U(x, t)$, положив ее на этот раз равной

$$\begin{aligned} U(x, t) = & \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \int_0^{t-x-2kl} \underline{\hat{\mu}}(\tau) d\tau - \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \int_0^{t+x-2kl} \underline{\hat{\mu}}(\tau) d\tau \\ & + \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \underline{\hat{\nu}}(t-2kl-l+x) + \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \underline{\hat{\nu}}(t-2kl+l-x). \end{aligned} \quad (63)$$

Тривиально проверяется, что производные функции (63) и функции $\hat{u}(x, t)$, определяемой равенством (46), почти всюду в Q_T связаны соотношениями

$$\hat{u}_x(x, t) = U_t(x, t), \quad \hat{u}_t(x, t) = U_x(x, t). \quad (64)$$

Соотношения (64) позволяют нам переписать равенство (62) в виде

$$\begin{aligned} I = & \int_0^l \left[\int_0^T U_t(x, t) \Phi_x(x, t) dt \right] dx \\ & - \int_0^T \left[\int_0^l U_x(x, t) \Phi_t(x, t) dx \right] dt - \int_0^T \hat{\nu}(t) \Phi_x(l, t) dt. \end{aligned} \quad (65)$$

Подвергая стоящие в квадратных скобках внутренние интегралы в (65) интегрированию по частям, получим, что

$$\begin{aligned} I = & \int_0^l [U(x, T) \Phi_x(x, T) - U(x, 0) \Phi_x(x, 0)] dx - \int_0^l \int_0^T U(x, t) \Phi_{xt}(x, t) dx dt \\ & - \int_0^T [U(l, t) \Phi_t(l, t) - U(0, t) \Phi_t(0, t)] dt + \int_0^l \int_0^T U(x, t) \Phi_{tx}(x, t) dx dt \\ & - \int_0^T \hat{\nu}(t) \Phi_x(l, t) dt. \end{aligned} \quad (66)$$

Учитывая взаимное уничтожение двойных интегралов в (66) и равенства $\Phi_x(x, T) \equiv 0$, $U(x, 0) \equiv 0$ при $0 \leq x \leq l$, $\Phi_t(l, t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T$, мы придадим (66) следующий вид:

$$I = \int_0^T U(0, t) \Phi_t(0, t) dt - \int_0^T \hat{\nu}(t) \Phi_x(l, t) dt. \quad (67)$$

Интегрируя первый интеграл в (67) по частям, получим

$$\int_0^T U(0, t) \Phi_t(0, t) dt = U(0, T) \Phi(0, T) - U(0, 0) \Phi(0, 0) - \int_0^T U_t(0, t) \Phi(0, t) dt. \quad (68)$$

Учитывая далее, что $\Phi(0, T) = 0$, $U(0, 0) = 0$ и что $U_t(0, t) = \hat{u}_x(0, t) = \hat{\mu}(t)$, получим из (68), что

$$\int_0^T U(0, t) \Phi_t(0, t) dt = - \int_0^T \hat{\mu}(t) \Phi(0, t) dt.$$

С помощью последнего равенства и (67) получим, что

$$I = - \int_0^T \hat{\mu}(t) \Phi(0, t) dt - \int_0^T \hat{\nu}(t) \Phi_x(l, t) dt.$$

Из последнего равенства и из (60) вытекает справедливость тождества (43), взятого при $u(x, t) = \hat{u}(x, t)$, $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$, $\mu(t) = \hat{\mu}(t)$ и $\nu(t) = \hat{\nu}(t)$, что и завершает доказательство утверждения, сформулированного в 3).

Перейдем теперь к установлению приведенных в 4) условий связи. В силу финальных условий (3) и в силу того, что

$$\tilde{u}(x, T) = C_0 = \frac{1}{2} \left[\varphi(0) + \varphi(l) + \int_0^l \psi(\xi) d\xi \right], \quad \tilde{u}_t(x, T) = 0,$$

мы получим, что

$$\hat{u}(x, T) = \hat{\varphi}(x) - C_0, \quad \hat{u}_t(x, T) = \hat{\psi}(x). \quad (69)$$

Дифференцируя равенство (46) по x и по t , получим

$$\begin{aligned} \hat{u}_x(x, t) = & \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \hat{\mu}(t - x - 2kl) - \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \hat{\mu}(t + x - 2kl) \\ & + \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \hat{\nu}'(t - 2kl - l + x) + \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \hat{\nu}'(t - 2kl + l - x), \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(x, t) = & - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \hat{\mu}(t - x - 2kl) - \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \hat{\mu}(t + x - 2kl) \\ & + \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \hat{\nu}'(t - 2kl - l + x) - \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \hat{\nu}'(t - 2kl + l - x). \end{aligned} \quad (71)$$

Полагая в (70) и (71) $t = T = 4l(n+1)$, беря полусумму и полуразность получающихся при этом равенств и используя соотношения (69), получим два условия связи⁴

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \hat{\mu}[2l(2n+2-k) + x] \\ & + \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \hat{\nu}'[2l(2n+2-k) - l + x] = \frac{1}{2} [\hat{\varphi}'(x) + \hat{\psi}(x)], \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \hat{\mu}[2l(2n+2-k) - x] \\ & + \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \hat{\nu}'[2l(2n+2-k) + l - x] = \frac{1}{2} [\hat{\varphi}'(x) - \hat{\psi}(x)], \end{aligned} \quad (73)$$

являющиеся равенствами элементов $L_2[0, l]$.

⁴В (72) и (73) мы опустили черту под $\hat{\mu}$ и $\hat{\nu}'$, ибо все стоящие в квадратных скобках аргументы этих функций неотрицательны.

Учитывая теперь, что $\hat{\mu}(t) = \mu(t) - \tilde{\mu}(t)$, $\hat{\nu}(t) = \nu(t) - \tilde{\nu}(t)$ и что для $\tilde{\mu}(t)$ и $\tilde{\nu}(t)$ мы располагаем явными выражениями (44) и (45), мы можем переписать условия связи (72) и (73) в терминах $\mu(t)$ и $\nu(t)$:

$$- \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \mu[2l(2n+2-k) + x] + \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \nu'[2l(2n+2-k) - l + x] = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\psi}(x)], \quad (74)$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \mu[2l(2n+2-k) - x] + \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \nu'[2l(2n+2-k) + l - x] = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}'(x) - \tilde{\psi}(x)]. \quad (75)$$

Подчеркнем, что в правых частях (74) и (75) стоят разности (13) финальных и начальных условий.

Для получения из условий связи (74) и (75) первых двух условий связи (47) достаточно во всех суммах, стоящих в (74) и (75), заменить индекс суммирования k новым индексом суммирования $k' = 2n+2-k$.

Итак, первые два условия связи (47) установлены. Первых двух условий связи (47) еще недостаточно, ибо эти условия не изменятся при добавлении к $\tilde{\varphi}(x)$ произвольной постоянной.

Третье условие связи (47) сразу вытекает из условий согласования $\nu(0) = \varphi(l)$, $\nu(l) = \hat{\varphi}(l)$ и из равенства $\tilde{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(x) - \varphi(x)$.

Переходим, наконец, к приведенному в 5) отысканию минимума интеграла граничной энергии (12) с тремя условиями связи (47).

Для любого $m = 0, 1, 2, \dots, 4n+3$ и любого x из сегмента $[0, l]$ положим $\mu_m(x) = \mu(lm+x)$, $\nu_m(x) = \nu(lm+x)$. При этом рассматриваемая задача оптимизации сведется к отысканию минимума суммы

$$\sum_{m=0}^{4n+3} \left\{ \int_0^l \mu_m^2(x) dx + \int_0^l [\nu'_m(x)]^2 dx \right\} \quad (76)$$

с тремя условиями связи

$$- \sum_{m=0}^{2n+1} (-1)^m \mu_{2m}(x) - \sum_{m=0}^{2n+1} (-1)^m \nu'_{2m+1}(x) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\psi}(x)], \quad (77)$$

$$- \sum_{m=0}^{2n+1} (-1)^m \mu_{2m+1}(x) + \sum_{m=0}^{2n+1} (-1)^m \nu'_{2m}(x) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}'(l-x) - \tilde{\psi}(l-x)], \quad (78)$$

$$\sum_{m=0}^{2n+1} \int_0^l \nu'_{2m}(x) dx + \sum_{m=0}^{2n+1} \int_0^l \nu'_{2m+1}(x) dx = \tilde{\varphi}(l). \quad (79)$$

Для решения этой задачи разложим каждую из шести функций $\mu_m(x)$, $\nu'_m(x)$, $\tilde{\varphi}'(x)$, $\tilde{\psi}(x)$, $\tilde{\varphi}'(l-x)$ и $\tilde{\psi}(l-x)$ в ряд Фурье по произвольной полной и ортонормированной

в $L_2[0, l]$ системе функций $\{v_j(x)\}$, содержащей в качестве нулевого элемента постоянную $v_0(x) = \frac{1}{\sqrt{l}}$. Обозначим j -е коэффициенты Фурье указанных шести функций соответственно через μ_{mj} , ν'_{mj} , $\tilde{\varphi}'_j$, $\tilde{\psi}_j$, $\tilde{\varphi}'_j\langle l-x \rangle$ и $\tilde{\psi}_j\langle l-x \rangle$.

В силу равенства Парсеваля рассматриваемая задача сведется к отысканию минимума суммы

$$\sum_j \left\{ \sum_{m=0}^{4n+3} [\mu_{mj}^2 + (\nu'_{mj})^2] \right\} \quad (76')$$

со взятыми для любого номера j условиями связи

$$-\sum_{m=0}^{2n+1} (-1)^m \mu_{(2m)j} - \sum_{m=0}^{2n+1} (-1)^m \nu'_{(2m+1)j} = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}'_j + \tilde{\psi}_j], \quad (77')$$

$$-\sum_{m=0}^{2n+1} (-1)^m \mu_{(2m+1)j} + \sum_{m=0}^{2n+1} (-1)^m \nu'_{(2m)j} = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}'_j\langle l-x \rangle + \tilde{\psi}_j\langle l-x \rangle] \quad (78')$$

и с еще одним условием связи

$$\sum_{m=0}^{4n+3} \nu'_{m0} = \frac{\tilde{\varphi}(l)}{\sqrt{l}}. \quad (79')$$

Учитывая, что инфимум суммы (конечной или бесконечной) не меньше суммы инфимумов ее слагаемых, будем для каждого фиксированного номера j искать минимум суммы

$$\sum_{m=0}^{4n+3} [\mu_{mj}^2 + (\nu'_{mj})^2] \quad (76'')$$

с двумя взятыми для этого номера j условиями связи (77') и (78') в случае $j \neq 0$ и с тремя условиями связи ((77') и (78'), взятыми при $j = 0$, и с условием (79')) в случае $j = 0$.

Эта последняя задача элементарно решается обычным методом Лагранжа. Если мы обозначим через A постоянную $A = \frac{\tilde{\varphi}(l)}{4l(n+1)}$, а через θ_j число, равное нулю при $j \neq 0$ и равное единице при $j = 0$, то решение указанной задачи записывается в виде

$$\begin{aligned} \mu_{(2m)j} &= -\frac{\tilde{\varphi}'_j + \tilde{\psi}_j}{8(n+1)} (-1)^m, \\ \mu_{(2m+1)j} &= -\frac{\tilde{\varphi}'_j\langle l-x \rangle - \tilde{\psi}_j\langle l-x \rangle}{8(n+1)} (-1)^m, \\ \nu'_{(2m)j} &= \frac{\tilde{\varphi}_j\langle l-x \rangle - \tilde{\psi}_j\langle l-x \rangle}{8(n+1)} (-1)^m + \frac{A}{\sqrt{l}} \theta_j, \\ \nu'_{(2m+1)j} &= \frac{\tilde{\varphi}'_j + \tilde{\psi}_j}{8(n+1)} (-1)^m + \frac{A}{\sqrt{l}} \theta_j. \end{aligned}$$

Из этих соотношений заключаем, что

$$\begin{cases} \mu_{2m}(x) = -\frac{\tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\psi}(x)}{8(n+1)}(-1)^m, \\ \mu_{2m+1}(x) = -\frac{\tilde{\varphi}'(l-x) - \tilde{\psi}(l-x)}{8(n+1)}(-1)^m, \end{cases} \quad (80)$$

$$\begin{cases} \nu'_{2m}(x) = \frac{\tilde{\varphi}'(l-x) - \tilde{\psi}(l-x)}{8(n+1)}(-1)^m + A, \\ \nu'_{2m+1}(x) = \frac{\tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\psi}(x)}{8(n+1)}(-1)^m + A. \end{cases} \quad (81)$$

Из (80) сразу вытекает выражение (48) для оптимальной граничной силы $\mu(t)$. Для получения представления для оптимального граничного смещения $\nu(t)$ в виде суммы линейной функции (49) и добавочного члена (50) достаточно воспользоваться равенствами (81), условиями согласования $\nu(0) = \varphi(l)$, $\nu(T) = \hat{\varphi}(l)$ и учесть, что функция $\nu(t)$ является непрерывной на всем сегменте $0 \leq t \leq T$.

Чтобы убедиться в том, что мы нашли решение поставленной задачи оптимизации, достаточно проверить, что решение $u(x, t)$ смешанной задачи для волнового уравнения (1) с начальными условиями (2) и с граничными условиями $u_x(0, t) = \mu(t)$, $u(l, t) = \nu(t)$, в качестве которых взяты найденные нами функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$, удовлетворяет условию $u(x, T) = \hat{\varphi}(x)$ в классическом смысле и условию $u_t(x, T) = \hat{\psi}(x)$ в смысле равенства элементов $L_2[0, l]$. Для этого проще всего убедиться в справедливости равенств (69), для чего достаточно во взятые при $t = T = 4l(n+1)$ соотношения (46) и (71) подставить $\hat{\mu}(t) = \mu(t) - \tilde{\mu}(t)$, $\hat{\nu}(t) = \nu(t) - \tilde{\nu}(t)$, где $\mu(t)$ и $\nu(t)$ – найденные нами оптимальные граничные управления, а $\tilde{\mu}(t)$ и $\tilde{\nu}(t)$ – функции, определяемые равенствами (44) и (45).

Заключительное замечание

В заключение отметим, что проблемам граничного управления колебательными процессами, описываемыми волновым уравнением, кроме указанных выше работ [1] и [2], были посвящены работы Ж.-Л. Лионса [5], Ф.П. Васильева [6], А.Г. Бутковского [7], А.И. Егорова [8], а проблемы оптимизации граничных управлений на физическом уровне строгости рассматривались в работе Л.Д. Акуленко [9] и в кратком изложении на строго математическом уровне – в нашем цикле работ [10]–[16] в Докладах Академии наук.

По поводу определения класса $W_2^1(Q_T)$ и теорем вложения в нем см. монографию С.М. Никольского [17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Ильин. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 11. С. 1513–1528.
- [2] В. А. Ильин. Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 12. С. 1670–1686.
- [3] В. А. Ильин. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // УМН. 1960. Т. 15. № 2. С. 97–154.

- [4] В. А. Ильин, Е. И. Моисеев. Оптимальное граничное управление упругой силой на одном конце струны при свободном втором ее конце // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 1. С. 105–115.
- [5] J.-L. Lions. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. V. 30. № 1. P. 1–68.
- [6] Ф. П. Васильев. О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 11. С. 1893–1900.
- [7] А. Г. Бутковский. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1985.
- [8] А. И. Егоров. Управление упругими колебаниями // Докл. АН УССР. Сер. А. 1986. № 5. С. 60–63.
- [9] Л. Д. Акуленко. Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия // ПММ. 1981. Т. 45. № 6. С. 1095–1103.
- [10] В. А. Ильин, Е. И. Моисеев. Оптимальное граничное управление смещением на одном конце при закрепленном втором конце и отвечающее ему распределение полной энергии струны // Докл. РАН. 2004. Т. 399. № 6. С. 727–731.
- [11] В. А. Ильин, Е. И. Моисеев. Оптимальное граничное управление смещением на двух концах и отвечающее ему распределение полной энергии струны // Докл. РАН. 2005. Т. 400. № 1. С. 16–20.
- [12] В. А. Ильин, Е. И. Моисеев. Оптимальное граничное управление смещением на одном конце при свободном втором конце и отвечающее ему распределение полной энергии струны // Докл. РАН. 2005. Т. 400. № 5. С. 587–591.
- [13] В. А. Ильин. Оптимальное граничное управление упругой силой на одном конце при закрепленном втором конце и отвечающее ему распределение полной энергии струны // Докл. РАН. 2005. Т. 400. № 6. С. 731–735.
- [14] В. А. Ильин, Е. И. Моисеев. Оптимизация граничного управления упругой силой на одном конце струны при свободном втором ее конце // Докл. РАН. 2005. Т. 402. № 1. С. 20–24.
- [15] В. А. Ильин, Е. И. Моисеев. Оптимизация граничного управления упругой силой на двух концах струны // Докл. РАН. 2005. Т. 402. № 2. С. 163–169.
- [16] В. А. Ильин, Е. И. Моисеев. Оптимизация комбинированного граничного управления колебаниями струны – упругой силой на одном конце и смещением на другом конце // Докл. РАН. 2005. Т. 402. № 5. С. 590–596.
- [17] С. М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.