Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Пустыльников, Закон возрастания энтропии и обобщенные билиарды,
УМН, 1999, том 54, выпуск 3, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm168>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:32:51

ЗАКОН ВОЗРАСТАНИЯ ЭНТРОПИИ И ОБОБЩЕННЫЕ БИЛЛИАРДЫ

Л. Д. ПУСТЫЛЬНИКОВ

В этой работе дано доказательство закона возрастания энтропии для газа, состоящего из конечного числа частиц $P_1, \dots, P_N$, двигающихся в сосуде произвольной фиксированной формы, на основе механики. В случае, когда сосуд – отрезок или трехмерный параллелепипед (модели Пуанкаре [1], [2]), а влияние границы сосуда на газ имеет периодический характер (функция $f(\gamma, t)$, введенная ниже, периодична по t), доказательства были даны в [3] и [4]. Не ограничивая общности, будем считать, что сосуд Π представляет собой замкнутую область в трехмерном евклидовом пространстве с прямоугольными координатами q_1, q_2, q_3 , ограниченную гладкой поверхностью Γ , а частицы $P_1, \dots, P_N$ – материальные точки, имеющие одинаковую массу, равную 1, и не взаимодействующие друг с другом (разряженный газ). Случай, когда граница сосуда состоит из нескольких кусков, а частицы имеют размер и взаимодействуют между собой, рассматривается аналогичным образом, и для него справедлив тот же самый результат.

Термодинамическая система задается полем касательных плоскостей Γ^* к поверхности Γ и гладкой вещественной функцией $f = f(\gamma, t)$ (тепловой фронт), определенной на прямом произведении $\Gamma \times \mathbb{R}^1$ ($\mathbb{R}^1$ – вещественная прямая), аргументами которой являются произвольная точка $\gamma \in \Gamma$ и переменная $t \in \mathbb{R}^1$, характеризующая время. Каждая частица внутри сосуда движется с постоянной скоростью, а на границе ее траектория преобразуется согласно следующему закону. Предположим, что в момент времени t^* частица достигла границы Γ в точке $\gamma \in \Gamma$. Тогда в момент времени t^* частица приобретает такую скорость $\vec{v}^*$, как если бы она совершила в этот момент упругий толчок от плоскости $\gamma^* \in \Gamma^*$, касательной к Γ в точке γ , имеющей бесконечную массу и двигающейся вдоль нормали к Γ в точке γ по закону $f^*(t) = f(\gamma, t)$ со временем t , оставаясь перпендикулярной этой нормали. При этом мы будем считать положительным направлением движения плоскости γ^* направление во вне от сосуда.

Если скорость $\vec{v}^*$, приобретенная частицей в результате описанного закона отражения, направлена внутрь сосуда Π , то далее частица движется равномерно с этой скоростью до следующего столкновения с границей Γ . Если же скорость $\vec{v}^*$ направлена во вне от сосуда Π , то частица остается неподвижной в точке γ до тех пор, пока в какой-то момент времени $\tilde{t} > t^*$ взаимодействие с плоскостью γ^* не заставит ее поменять направление скорости. В результате описанного механизма взаимодействия частиц с границей сосуда происходит изменение общей энергии всех частиц, т.е. нагревание или охлаждение газа за счет влияния стенок сосуда.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если для какой-нибудь точки $\gamma \in \Gamma$ функция $f^*(t) = f(\gamma, t) \equiv \text{const}$, то при попадании частицы в точку она отражается от плоскости γ^* по билиардному закону: угол падения равен углу отражения, и в результате этого отражения общая энергия частиц не меняется.

В силу замечания 1 изучаемую термодинамическую систему можно рассматривать как обобщенный билиард в трехмерной замкнутой области, который в частном случае, когда функция $f(\gamma, t) = g(\gamma)$ не зависит от t (система находится в равновесии), переходит в классическую билиардную систему [5].

В дальнейшем упругий удар от касательной плоскости γ^* в точке γ мы рассматриваем как в рамках ньютоновской механики, так и в рамках специальной теории относительности, причем в последнем случае, не ограничивая общности, считаем, что все скорости измеряются в долях от скорости света c , т.е. $c = 1$ и $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(\gamma, t) \right| < 1$.

Обозначая через $q_1^{(s)}, q_2^{(s)}, q_3^{(s)}$ пространственные координаты q_1, q_2, q_3 частицы P_s , через $p_1^{(s)}, p_2^{(s)}, p_3^{(s)}$ – ортогональные координаты вектора импульса $\vec{p}^{(s)} = (p_1^{(s)}, p_2^{(s)}, p_3^{(s)})$ частицы P_s , введем функцию статистического распределения (см. [6]) $\rho(t) = \rho(q_1^{(1)}, \dots, q_3^{(N)}, t)$, которая характеризует плотность вероятности нахождения системы частиц $P_1, \dots, P_N$ в элементе объема фазового пространства в момент времени t и получается из функции $\rho(t_0)$, заданной в

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01411).

начальный момент времени t_0 , в результате динамической эволюции системы. Введем фазовое пространство $K = \underbrace{\Pi \times \dots \times \Pi}_N \times \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3}_N$, где $\mathbb{R}^3$ – трехмерное пространство импульсов одной частицы. Функция $\rho(t_0)$ должна удовлетворять условию нормировки $\int_K \rho(t_0) d\vec{q} d\vec{p} = 1$, в котором

$$d\vec{q} = dq_1^{(1)} dq_2^{(1)} dq_3^{(1)} \dots dq_1^{(N)} dq_2^{(N)} dq_3^{(N)}, \quad d\vec{p} = dp_1^{(1)} dp_2^{(1)} dp_3^{(1)} \dots dp_1^{(N)} dp_2^{(N)} dp_3^{(N)},$$

и следующему условию, характеризующему закон сохранения массы:

$$\rho(t) d\vec{q}(t) d\vec{p}(t) = \rho(t_0) d\vec{q}(t_0) d\vec{p}(t_0), \quad t > t_0.$$

Термодинамическая энтропия $H(t)$ в момент времени t имеет вид

$$H(t) = - \int_K \rho(t) \ln \rho(t) d\vec{q}(t) d\vec{p}(t),$$

а полная энергия $E(t)$ в ньютоновском и релятивистском случаях задается соответственно с помощью равенств

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N |\vec{p}^{(s)}|^2, \quad E(t) = \sum_{s=1}^N \sqrt{|\vec{p}^{(s)}|^2 + 1}.$$

ТЕОРЕМА. *Предположим, что при всех $\gamma \in \Gamma$ и t выполнено неравенство $\frac{\partial f}{\partial t}(\gamma, t) < 0$. Тогда как в рамках ньютоновской механики, так и в рамках специальной теории относительности, энтропия и полная энергия всех частиц монотонно возрастают с ростом t .*

ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно теореме условие $\frac{\partial f}{\partial t}(\gamma, t) < 0$ означает, что газ в сосуде нагревается (его энергия – растет). Если при этом $\lim_{t \rightarrow \hat{t}} \frac{\partial f}{\partial t}(\gamma, t) = 0$, то система при $t \rightarrow \hat{t}$ стремится к равновесию и существует $\hat{H} = \lim_{t \rightarrow \hat{t}} H(t)$.

В заключение отметим, что рост энтропии в ньютоновском случае связан с тем, что фазовый объем не является инвариантной мерой относительно динамики обобщенного билиарда, а в релятивистском случае рост энтропии связан с природой самого явления: релятивистская энтропия, построенная по инвариантной мере, также возрастает [3], [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Poincaré H. // J. Phys. théoret. et appl. Ser. 4°. 1906. V. 5. P. 369–403. [2] Пуанкаре А. // Избранные труды. Т. 3. М.: Наука, 1974. С. 385–412. [3] Пустыльников Л. Д. // ТМФ. 1991. Т. 86. №1. С. 120–129. [4] Пустыльников Л. Д. // УМН. 1995. Т. 50. №1. С. 143–186. [5] Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.–Л.: Гостехиздат, 1941. [6] Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1964.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша

Принято редколлегией
23.04.1999