Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Коляда, Неравенства типа Гальярдо–Ниренберга и оценки модулей непрерывности, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 6, 139–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1680>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:35:20

УДК 517.51

Посвящается С. М. Никольскому к столетию со дня его рождения

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ГАЛЬЯРДО–НИРЕНБЕРГА И ОЦЕНКИ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

В. И. Коляда

В статье изучаются мультипликативные неравенства типа Гальярдо–Ниренберга, связывающие частные модули непрерывности и частные производные функций по фиксированной переменной в разных нормах Лоренца. Основные результаты выражаются оценками вида

$$\left(\int_{\delta}^{\infty} [h^{-\theta r} \omega_j^r(f; h)_{p,s}]^s \frac{dh}{h} \right)^{1/s} \leq c \|f\|_{p_0, s_0}^{1-\theta} [\delta^{-r} \omega_j^r(f; \delta)_{p_1, s_1}]^{\theta},$$

где $0 < \theta < 1$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{s} = \frac{1-\theta}{s_0} + \frac{\theta}{s_1},$$

и показатели p_i, s_i удовлетворяют определенным условиям. В частности, из этих оценок выводятся оптимальные неравенства, включающие нормы Бесова и нормы Лоренца. Изучается также предельный случай $p_1 = s_1 = 1$ и оценки в терминах полной вариации.

Библиография: 21 название.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	139
§ 2. Вспомогательные предложения	143
§ 3. Мультипликативные неравенства	147
§ 4. Случай $p_1 = s_1 = 1$	150
Список литературы	155

§ 1. Введение

В данной статье изучаются мультипликативные неравенства типа Гальярдо–Ниренберга, связывающие частные модули непрерывности функций в разных нормах.

Задача об оценке модулей непрерывности функции в L^q через ее модули непрерывности в L^p ($1 \leq p < q \leq \infty$) имеет длительную историю. Изучение этой задачи

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и технологии Испании (грант BFM2003-06335-C03-02 DGI).

началось с вложений липшицевых классов (Э. Титчмарш, Г. Г. Харди и Дж. Э. Литлвуд, С. М. Никольский). Дальнейшим исследованиям были посвящены работы многих авторов (см. [1; § 16], [2], [3]).

Обозначим для функции $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < \infty$)

$$\omega(f; \delta)_p \equiv \sup_{|h| \leq \delta} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x+h)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (1.1)$$

В работе [3] был получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $1 < p < \infty$, $n \geq 1$ или $p = 1$, $n \geq 2$. Предположим, что $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p < q < \infty$ и $\gamma \equiv n(1/p - 1/q) < 1$. Тогда для любого $\delta > 0$

$$\left(\int_{\delta}^{\infty} (t^{\gamma-1} \omega(f; t)_q)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \leq c \delta^{\gamma-1} \left(\int_0^{\delta} (t^{-\gamma} \omega(f; t)_p)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}. \quad (1.2)$$

Если функция f имеет все обобщенные производные первого порядка $D_j f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($j = 1, \dots, n$), то, в силу (1.2),

$$\left(\int_0^{\infty} (t^{\gamma-1} \omega(f; t)_q)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \leq c \sum_{k=1}^n \|D_k f\|_1. \quad (1.3)$$

Для $p > 1$, $n \geq 1$ это неравенство доказал В. П. Ильин [1; § 18.12]. Если $p = n = 1$, то (1.3) теряет силу. В случае $p = 1$, $n \geq 2$ неравенство (1.3) было доказано в [3] (см. также [4], [5]).

Предположим теперь, что функция f имеет частную производную $D_j f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ лишь по одной переменной x_j . Задача состоит в том, чтобы оценить частный модуль непрерывности

$$\omega_j(f; \delta)_q \equiv \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(x + h e_j)|^q dx \right)^{1/q} \quad (1.4)$$

функции f по этой же переменной в L^q , $q > p$. Ясно, что при $n \geq 2$ эта задача не может быть решена без дополнительных условий на f . Однако совсем не обязательно предполагать гладкость по остальным переменным. Во многих случаях достаточно дополнительно предположить, что f принадлежит некоторому пространству L^r . Эти условия естественным образом приводят к мультипликативным неравенствам типа Гальярдо–Ниренберга. К подобным же неравенствам приводит и более общая задача: оценить частный модуль непрерывности функции f по переменной x_j в L^q через ее частный модуль непрерывности по той же переменной в L^p и норму f в L^r .

Мультипликативные неравенства Гальярдо–Ниренберга [1; § 15] тесно связаны с неравенством Соболева. Хорошо известно, что точные показатели интегрируемости функций из пространств Соболева выражаются в терминах пространств Лоренца $L^{q,p}$. Поэтому мы изучаем мультипликативные неравенства для модулей непрерывности в шкале этих пространств. Однако во введении часть результатов мы сформулируем только для пространств L^p .

Через $\omega_j^r(f; \delta)_p$ обозначается модуль непрерывности порядка r по переменной x_j в L^p .

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $1 \leq p_0 \leq \infty$ и $1 < p_1 \leq \infty$. Пусть $0 < \theta < 1$ и $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$. Предположим, что функция $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$ имеет обобщенную производную $D_j^r f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ ($n, r \in \mathbb{N}$) по переменной x_j . Тогда

$$\left(\int_0^\infty [h^{-\theta r} \omega_j^r(f; h)_p]^p \frac{dh}{h} \right)^{1/p} \leq c \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|D_j^r f\|_{p_1}^\theta, \quad (1.5)$$

где $c = c_r(p_1')^\theta [\theta(1 - \theta)]^{-1/p}$.

Доказательство теоремы 1.2 основано на оценках невозрастающих перестановок и является довольно простым. В §3 мы рассматриваем некоторые известные случаи и следствия этой теоремы. В частности, из нее легко выводится следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $1 \leq p_0 \leq \infty$ и $1 < p_1 \leq \infty$. Пусть $0 < \theta < 1$ и $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$. Предположим, что $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^n)$ ($n \in \mathbb{N}$). Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $1 \leq j \leq n$. Тогда для любого $\delta > 0$

$$\left(\int_\delta^\infty [t^{-\theta r} \omega_j^r(f; t)_p]^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \leq K \|f\|_{p_0}^{1-\theta} [\delta^{-r} \omega_j^r(f; \delta)_{p_1}]^\theta \quad (1.6)$$

и для любого $0 < \alpha < r$

$$\left(\int_0^\infty [t^{-\theta \alpha} \omega_j^r(f; t)_p]^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \leq K_1 (r - \alpha)^{1/p} \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \left(\int_0^\infty [t^{-\alpha} \omega_j^r(f; t)_{p_1}]^{p\theta} \frac{dt}{t} \right)^{1/p}, \quad (1.7)$$

где $K = c_r(p_1')^\theta [(1 - \theta)\theta]^{-1/p}$ и $K_1 = 2K\theta^{1/p}$.

Здесь и в дальнейшем для любого $q > 1$ обозначаем $q' = q/(q - 1)$.

При $\alpha \rightarrow r -$ интеграл в правой части (1.7), вообще говоря, стремится к $+\infty$. Однако это компенсируется стремлением к нулю множителя $(r - \alpha)^{1/p}$, и в пределе (1.7) переходит в неравенство (1.5). Явления такого типа были впервые обнаружены в работах Ж. Бургейна, Х. Брезиса и П. Миронеску [6], [7]; их дальнейшее изучение в первую очередь связано с работами В. Мазьи и Т. Шапошниковой [8], [9].

Неравенство (1.7) непосредственно следует из (1.6). Заметим, что ранее в работе [10] было показано, что оптимальные постоянные в соотношениях между определенными нормами могут быть легко выведены из точных оценок невозрастающих перестановок функций и модулей непрерывности. В частности, с помощью неравенства (1.2) в [10] была получена асимптотическая оценка постоянной в неравенстве между различными нормами Бесова.

Вернемся к неравенству (1.7). Полагая $r = 1$ и $p_0 = \infty$, получаем для любого $0 < \alpha < 1$

$$\|f\|_{b_{\nu/\theta}^\alpha} \leq K(1 - \alpha)^{\theta/\nu} \|f\|_\infty^{1-\theta} \|f\|_{b_\nu^\alpha}^\theta, \quad 1 < \nu < \infty, \quad (1.8)$$

где $K = cn(\nu')^\theta (1 - \theta)^{-\theta/\nu}$, c — абсолютная постоянная и

$$\|f\|_{b_p^\alpha} \equiv \left(\int_0^\infty [t^{-\alpha} \omega(f; t)_p]^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}. \quad (1.9)$$

Неравенство (1.8) доказали В. Мазья и Т. Шапошникова [9]. Они показали также, что зависимость постоянной K в правой части от входящих в нее параметров является точной. Заметим, что соотношение между нормами в (1.8) (без точного порядка постоянной) было установлено ранее в работе Т. Рунста [11] (см. также [12]). Задача о точной постоянной была поставлена в работе Х. Брезиса и П. Миронеску [12].

Теоремы 1.2 и 1.3 теряют силу при $p_1 = 1, p_0 = \infty$. Вообще, в случае $p_1 = 1$ задача значительно усложняется. В данной статье этот случай рассмотрен только для $r = 1$ (хотя аналогичные результаты справедливы для произвольного порядка производных и модулей непрерывности). Именно, доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть заданы числа $1 \leq p_0, s_0 < \infty$, причем если $p_0 = 1$, то и $s_0 = 1$. Пусть $0 < \theta < 1$ и

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \theta, \quad \frac{1}{s} = \frac{1-\theta}{s_0} + \theta.$$

Предположим, что функция $f \in L^{p_0, s_0}(\mathbb{R}^n)$ имеет обобщенную производную $D_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ($n \in \mathbb{N}$) по переменной x_j . Тогда

$$\left(\int_0^\infty [h^{-\theta} \omega_j(f; h)_{p,s}]^s \frac{dh}{h} \right)^{1/s} \leq c \|f\|_{p_0, s_0}^{1-\theta} \|D_j f\|_1^\theta, \quad (1.10)$$

где $c = c(p_0, s_0)[(1-\theta)\theta]^{-1/s}$.

В доказательстве этой теоремы, в частности, используется метод молекулярных разложений (А. Пелчинский и М. Войцеховский [5]).

Применяя теорему 1.4, получим, что для $n \geq 2, 1 < q < n/(n-1)$ и $1 \leq j \leq n$

$$\int_0^\infty h^{-\alpha} \omega_j(f; h)_{q,1} \frac{dh}{h} \leq c \|f\|_{n/(n-1),1}^{1-\alpha} \|D_j f\|_1^\alpha, \quad (1.11)$$

где $\alpha = 1 - n/q'$. Сравним неравенства (1.11) и (1.3) (при $p = 1$). В силу (1.3), имеем

$$\int_0^\infty h^{-\alpha} \omega_j(f; h)_q \frac{dh}{h} \leq c \sum_{k=1}^n \|D_k f\|_1. \quad (1.12)$$

В этом соотношении частный модуль непрерывности по переменной x_j оценивается через нормы производных по *всем* переменным. Неравенство (1.11) дает более точный результат. Действительно, предположим, что функция $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ ($n \geq 2$) имеет все обобщенные производные первого порядка $D_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ($j = 1, \dots, n$). Тогда [13], [14]

$$\|f\|_{n/(n-1),1} \leq c \sum_{k=1}^n \|D_k f\|_1. \quad (1.13)$$

Стало быть, неравенство (1.12) получается последовательным применением неравенств (1.11) и (1.13).

Аналогично обстоит дело с неравенством (1.3) при $1 < p < n$, однако здесь необходимо применить более общий вариант теоремы 1.2, относящийся к пространствам Лоренца (см. теорему 3.1).

Из теоремы 1.4 выводятся и другие оценки частных модулей непрерывности и норм Бесова. В частности, мы получаем некоторые мультипликативные неравенства, содержащие нормы в пространстве $BV(\mathbb{R}^n)$ функций ограниченной вариации (см. § 4).

§ 2. Вспомогательные предложения

Обозначим через $S_0(\mathbb{R}^n)$ класс всех измеримых и почти всюду конечных функций f на $\mathbb{R}^n$ таких, что для любого $y > 0$

$$\lambda_f(y) \equiv |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > y\}| < \infty.$$

Невозрастающей перестановкой функции $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ называется невозрастающая на $(0, +\infty)$ функция f^* , равноизмеримая с $|f|$. Имеет место равенство [15; гл. 5]

$$\sup_{|E|=t} \int_E |f(x)| dx = \int_0^t f^*(u) du. \quad (2.1)$$

В дальнейшем обозначаем

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(u) du.$$

Пусть $1 \leq p, s < \infty$. Функция $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству Лоренца $L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$, если

$$\|f\|_{p,s} \equiv \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^s \frac{dt}{t} \right)^{1/s} < \infty.$$

Для $1 \leq p < \infty$ пространство $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ определяется как класс всех $f \in S_0(\mathbb{R}^n)$ таких, что

$$\|f\|_{p,\infty} \equiv \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) < \infty.$$

Полагаем также $L^{\infty,\infty} \equiv L^\infty$.

При $1 \leq s \leq p < \infty$ функция $f \mapsto \|f\|_{p,s}$ является нормой [16; с. 218]. Легко видеть, что в общем случае

$$\left\| \sum_{k=1}^N f_k \right\|_{p,s} \leq N^{1/p} \sum_{k=1}^N \|f_k\|_{p,s}. \quad (2.2)$$

Далее, обозначим

$$\|f\|'_{p,s} \equiv \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^{**}(t))^s \frac{dt}{t} \right)^{1/s} < \infty.$$

Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq s < \infty$ и $f \in L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\|f\|_{p,s} \leq (p')^{-1/s} \|f\|'_{p,s}. \quad (2.3)$$

Действительно,

$$f^{**}(t) = o(t^{-1/p}) \text{ при } t \rightarrow +0 \text{ и при } t \rightarrow +\infty.$$

Поэтому, интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{s/p-s-1} \left(\int_0^t f^*(u) du \right)^s dt &= p' \int_0^\infty t^{s/p-s} \left(\int_0^t f^*(u) du \right)^{s-1} f^*(t) dt \\ &\geq p' \int_0^\infty t^{s/p-1} f^*(t)^s dt. \end{aligned}$$

Отсюда следует (2.3).

ЛЕММА 2.1. Пусть $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $1 < r < \infty$. Тогда

$$\|\varphi\|_{r,1} \leq 2r \|\varphi\|_\infty^{1-1/r} \|\varphi\|_1^{1/r}. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\|\varphi\|_{r,1} < \infty$. Имеем

$$\int_0^\infty t^{1/r} \varphi^*(et) \frac{dt}{t} = e^{-1/r} \|\varphi\|_{r,1}.$$

Следовательно, в силу неравенства Гёльдера,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{r,1} &= (1 - e^{-1/r})^{-1} \int_0^\infty t^{1/r} [\varphi^*(t) - \varphi^*(et)] \frac{dt}{t} \\ &\leq 2r \left(\int_0^\infty [\varphi^*(t) - \varphi^*(et)] \frac{dt}{t} \right)^{1-1/r} \left(\int_0^\infty \varphi^*(t) dt \right)^{1/r}. \end{aligned}$$

Далее, для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^\infty [\varphi^*(t) - \varphi^*(et)] \frac{dt}{t} = \int_\varepsilon^{e\varepsilon} \varphi^*(t) \frac{dt}{t} \leq \|\varphi\|_\infty.$$

Из этих оценок следует (2.4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $1 \leq p, s \leq \infty$. Упорядоченную пару (p, s) будем называть *допустимой*, если выполняется одно из следующих условий: (i) $1 < p < \infty$, $1 \leq s \leq \infty$; (ii) $p = s = 1$; (iii) $p = s = \infty$.

ЛЕММА 2.3. Пусть (p, s) – допустимая пара. Предположим, что $g(x, u)$ – неотрицательная измеримая функция на $\mathbb{R}^n \times [0, h]$ ($h > 0$) такая, что при каждом фиксированном $u \in [0, h]$ функция

$$g_u(x) = g(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

принадлежит $L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$. Пусть

$$G(x) = \int_0^h g(x, u) du.$$

Тогда

$$\|G\|_{p,s} \leq c_{p,s} \int_0^h \|g_u\|_{p,s} du, \quad (2.5)$$

где

$$c_{p,s} = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leq s \leq p \leq \infty, \\ (p')^{1/s'}, & \text{если } 1 < p < s \leq \infty. \end{cases} \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя (2.1), получим, что для любого $t > 0$

$$\int_0^t G^*(\tau) d\tau \leq \int_0^h \left(\int_0^t g_u^*(\tau) d\tau \right) du = \int_0^t \left(\int_0^h g_u^*(\tau) du \right) d\tau. \quad (2.7)$$

Пусть сначала $1 \leq s \leq p < \infty$. В силу (2.7), леммы Харди [16; с. 56] и неравенства Минковского, имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty t^{s/p-1} G^*(t)^s dt \right)^{1/s} &\leq \left(\int_0^\infty t^{s/p-1} \left(\int_0^h g_u^*(t) du \right)^s dt \right)^{1/s} \\ &\leq \int_0^h \left(\int_0^\infty t^{s/p-1} g_u^*(t)^s dt \right)^{1/s} du. \end{aligned}$$

Отсюда следует (2.5) с постоянной $c_{p,s} = 1$. Пусть теперь $1 < p < s < \infty$. Используя (2.3), (2.7) и неравенство Минковского, получаем

$$\begin{aligned} \|G\|_{p,s} &\leq (p')^{-1/s} \left(\int_0^\infty t^{s/p-1} \left(\int_0^h g_u^{**}(t) du \right)^s dt \right)^{1/s} \\ &\leq (p')^{-1/s} \int_0^h \left(\int_0^\infty t^{s/p-1} g_u^{**}(t)^s dt \right)^{1/s} du. \end{aligned}$$

В силу неравенства Харди [15; гл. 5], отсюда следует (2.5). Наконец, в случае $1 < p \leq s = \infty$ (2.5) непосредственно следует из (2.7).

Пусть функция f задана на $\mathbb{R}^n$. Для $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$ и $h \in \mathbb{R}$ полагаем

$$\Delta_j^r(h)f(x) = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f(x + ihe_j),$$

где e_j — единичный координатный вектор в $\mathbb{R}^n$. Если $f \in L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$, то функция

$$\omega_j^r(f; \delta)_{p,s} = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|\Delta_j^r(h)f\|_{p,s}$$

называется частным модулем непрерывности порядка r функции f по переменной x_j в $L^{p,s}$. В случае $r = 1$ верхний индекс в этих обозначениях не пишется.

Если существует обобщенная производная $D_j^r f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$, то для почти всех x [1; § 16, (8)]

$$\Delta_j^r(h)f(x) = \int_0^h \cdots \int_0^h D_j^r f(x + (u_1 + \cdots + u_r)e_j) du_1 \cdots du_r. \quad (2.8)$$

Пусть $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$ и $h > 0$. Обозначим через $f_{h,j}^{(r)}$ обобщенные средние Стеклова

$$h^{-r} \int_0^h \cdots \int_0^h \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \binom{r}{i} f(x + i(u_1 + \cdots + u_r)e_j) du_1 \cdots du_r.$$

Имеем

$$(-1)^r [f(x) - f_{h,j}^{(r)}(x)] = h^{-r} \int_0^h \cdots \int_0^h \Delta_j^r(u_1 + \cdots + u_r) f(x) du_1 \cdots du_r.$$

Отсюда следует, что

$$|f(x) - f_{h,j}^{(r)}(x)| \leq \frac{1}{h} \int_0^{rh} |\Delta_j^r(u) f(x)| du. \quad (2.9)$$

Предположим, что $f \in L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$ (где (p, s) – допустимая пара). Из (2.9) и леммы 2.3 следует, что

$$\|f - f_{h,j}^{(r)}\|_{p,s} \leq \frac{c_{p,s}}{h} \int_0^{rh} \|\Delta_j^r(u) f\|_{p,s} du, \quad (2.10)$$

где $c_{p,s}$ – постоянная (2.6). Далее, пусть

$$\varphi_i(x) = \int_0^h \cdots \int_0^h f(x + i(u_1 + \cdots + u_r)e_j) du_1 \cdots du_r.$$

Тогда $D_j^r \varphi_i(x) = i^{-r} \Delta_j^r(ih) f(x)$. Используя свойства конечных разностей (см. [1; § 16]), легко получим, что

$$\|D_j^{(r)} f_{h,j}^{(r)}\|_{p,s} \leq \frac{A_r}{h^r} \|\Delta_j^r(h) f\|_{p,s}, \quad (2.11)$$

где постоянная A_r зависит только от r .

Следующая лемма в случае пространств L^p хорошо известна (см., например, [17; с. 191]).

ЛЕММА 2.4. *Предположим, что $f \in L^{p,s}(\mathbb{R}^n)$, где (p, s) – допустимая пара. Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $1 \leq j \leq n$. Тогда для любого $\delta > 0$*

$$\omega_j^r(f; \delta)_{p,s} \leq \frac{c}{\delta} \int_0^\delta \|\Delta_j^r(h) f\|_{p,s} dh, \quad (2.12)$$

где $c = c_r(p')^{1/s'}$ и постоянная c_r зависит только от r .¹

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $I(h) = \|\Delta_j^r(h) f\|_{p,s}$. Существует $h_0 \in (0, \delta]$ такое, что $\omega_j^r(f; \delta)_{p,s} = I(h_0)$. Пусть $\delta/(2r) \leq h \leq \delta/r$. Имеем

$$|\Delta_j^r(h_0) f(x)| \leq |\Delta_j^r(h_0)(f - f_{h,j}^{(r)})(x)| + |\Delta_j^r(h_0) f_{h,j}^{(r)}(x)|.$$

В силу (2.2) и (2.10)

$$\|\Delta_j^r(h_0)(f - f_{h,j}^{(r)})\|_{p,s} \leq A_r \|f - f_{h,j}^{(r)}\|_{p,s} \leq \frac{2r A_r (p')^{1/s'}}{\delta} \int_0^\delta I(u) du.$$

Далее, в силу (2.8),

$$|\Delta_j^r(h_0) f_{h,j}^{(r)}(x)| \leq h_0^{r-1} \int_0^{rh_0} |D_j^{(r)} f_{h,j}^{(r)}(x + ye_j)| dy.$$

Применяя лемму 2.3 и неравенство (2.11), имеем

$$\|\Delta_j^r(h_0) f_{h,j}^{(r)}\|_{p,s} \leq r(p')^{1/s'} h_0^r \|D_j^{(r)} f_{h,j}^{(r)}\|_{p,s} \leq A'_r (p')^{1/s'} I(h).$$

Из полученных оценок следует (2.12).

¹В случае $p = s = 1$ полагаем $(p')^{1/s'} = 1$.

§ 3. Мультипликативные неравенства

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть (p_0, s_0) и (p_1, s_1) – допустимые пары, причем $p_1 > 1$. Пусть $0 < \theta < 1$ и числа p и s определяются равенствами

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{s} = \frac{1-\theta}{s_0} + \frac{\theta}{s_1}. \quad (3.1)$$

Предположим, что функция $f \in L^{p_0, s_0}(\mathbb{R}^n) \cap S_0(\mathbb{R}^n)$ имеет обобщенную производную $D_j^r f \in L^{p_1, s_1}(\mathbb{R}^n)$ по переменной x_j , $1 \leq j \leq n$ ($n, r \in \mathbb{N}$). Тогда

$$\left(\int_0^\infty [h^{-\theta r} \omega_j^r(f; h)_{p, s}]^s \frac{dh}{h} \right)^{1/s} \leq c \|f\|_{p_0, s_0}^{1-\theta} \|D_j^r f\|_{p_1, s_1}^\theta, \quad (3.2)$$

где $c = c_r (p')^{1/s'} (p_1')^\theta [\theta(1-\theta)]^{-1/s}$ и постоянная c_r зависит только от r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $f_h(x) = \Delta_j^r(h)f(x)$ ($h > 0$). Имеем

$$f_h^*(t) \leq 2^r f^*(2^{-r}t) \equiv \varphi(t).$$

Кроме того, в силу (2.1) и (2.8),

$$f_h^*(t) \leq f_h^{**}(t) = \frac{1}{t} \sup_{|E|=t} \int_E |f_h(x)| dx \leq h^r (D_j^r f)^{**}(t) \equiv h^r \psi(t).$$

Таким образом,

$$f_h^*(t) \leq \min(\varphi(t), h^r \psi(t)). \quad (3.3)$$

Обозначим

$$h(t) = [\varphi(t)/\psi(t)]^{1/r}.$$

Предположим, что $s < \infty$. В силу (3.3),

$$\begin{aligned} J &\equiv \int_0^\infty h^{-\theta r s - 1} \|f_h\|_{p, s}^s dh \\ &= \int_0^\infty t^{s/p-1} \int_0^\infty h^{-\theta r s - 1} f_h^*(t)^s dh dt \\ &\leq \int_0^\infty t^{s/p-1} \psi(t)^s \int_0^{h(t)} h^{r(1-\theta)s-1} dh dt + \int_0^\infty t^{s/p-1} \varphi(t)^s \int_{h(t)}^\infty h^{-r\theta s-1} dh dt \\ &= \frac{1}{rs\theta(1-\theta)} \int_0^\infty t^{s/p-1} \varphi(t)^{(1-\theta)s} \psi(t)^{\theta s} dt. \end{aligned}$$

Применим теперь неравенство Гёльдера с показателями

$$\nu = s_0/[(1-\theta)s] \quad \text{и} \quad \nu' = s_1/(\theta s).$$

Заметим, что

$$\left(\int_0^\infty t^{s_0/p_0} \varphi(t)^{s_0} \frac{dt}{t} \right)^{1/s_0} \leq 2^{2r} \|f\|_{p_0, s_0}.$$

Кроме того, в силу неравенства Харди [15; гл. 5],

$$\left(\int_0^\infty t^{s_1/p_1} \psi(t)^{s_1} \frac{dt}{t} \right)^{1/s_1} \leq p'_1 \|D_j^r f\|_{p_1, s_1}.$$

Таким образом, мы получаем

$$J^{1/s} \leq 2^{2r} (p'_1)^\theta [(1-\theta)\theta]^{-1/s} \|f\|_{p_0, s_0}^{1-\theta} \|D_j^r f\|_{p_1, s_1}^\theta.$$

В силу леммы 2.4 и неравенства Харди, отсюда следует (3.2) (при $s < \infty$). В случае $s = \infty$ оценка

$$\sup_{h>0} h^{-\theta r} \omega_j^r(f; h)_{p, \infty} \leq (p'_1)^\theta \|f\|_{p_0, \infty}^{1-\theta} \|D_j^r f\|_{p_1, \infty}^\theta$$

мгновенно следует из (3.3) и леммы 2.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Случай $p_1 = 1$ будет рассмотрен в следующем параграфе. Заметим, что при $p_0 = \infty$, $p_1 = 1$ теорема 3.1 теряет силу (см. §4, замечание 4.4).

Пусть $1 \leq p \leq \infty$. Легко видеть, что

$$\max_{1 \leq j \leq n} \omega_j(f; t)_p \leq \omega(f; t)_p \leq \sum_{j=1}^n \omega_j(f; t)_p \quad (3.4)$$

(см. (1.1) и (1.4)). В дальнейшем используем обозначение (1.9).

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Предположим, что функция $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ имеет все обобщенные производные первого порядка, причем $\nabla f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Пусть $0 < \theta < 1$ и $p = 1/(1-\theta)$. Тогда*

$$\|f\|_{b_p^\theta} \leq cn[(1-\theta)\theta]^{-1/p} \|f\|_1^{1-\theta} \|\nabla f\|_\infty^\theta, \quad (3.5)$$

где c — абсолютная постоянная.

В частности, для $\theta = 1/2$, $n = 1$ имеем

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} [f(x+h) - f(x)]^2 dx \right) \frac{dh}{h^2} \leq c \|f\|_1 \|f'\|_\infty. \quad (3.6)$$

Это неравенство было получено Б.С. Кашиным [18] (доказательство, приведенное в [18], принадлежит О.В. Бесову). Специальный дискретный аналог неравенства (3.6) был установлен ранее С.В. Бочкаревым [19].

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Пусть $0 < \theta < 1$, $1 < \nu < \infty$ и $p = \nu/\theta$. Предположим, что функция $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет обобщенную производную $D_j^r f \in L^\nu(\mathbb{R}^n)$ ($r \in \mathbb{N}$). Тогда*

$$\left(\int_0^\infty [t^{-\theta r} \omega_j^r(f; t)_p]^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \leq c_r (\nu')^\theta (1-\theta)^{-1/p} \|f\|_\infty^{1-\theta} \|D_j^r f\|_\nu^\theta. \quad (3.7)$$

Рассмотрим случай $r = 1$. В силу (3.7) и (3.4), получаем

$$\|f\|_{b_{\nu/\theta}^\theta} \leq K \|f\|_\infty^{1-\theta} \|\nabla f\|_\nu^\theta, \quad 1 < \nu < \infty, \quad (3.8)$$

где $K = cn(\nu')^\theta(1-\theta)^{-\theta/\nu}$ и c – абсолютная постоянная. Заметим, что неравенство (3.8) следует из более общего результата Т. Рунста [11] (см. также работу Х. Брезиса и П. Миронеску [12]). В работе [12] авторы отметили, что им неизвестно прямое (не использующее теории Литлвуда–Пэли) доказательство неравенства (3.8). Такое доказательство было впоследствии получено в работе В. Мазьи и Т. Шапошниковой [9]. Мы видим, что неравенства (3.5) и (3.8) являются предельными случаями теоремы 3.1 (при $r = 1$). Заметим также, что метод доказательства теоремы 3.1 отличен от методов, применявшихся в [9].

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть (p_0, s_0) и (p_1, s_1) – допустимые пары, причем $p_1 > 1$. Пусть $0 < \theta < 1$ и числа p и s определяются равенствами (3.1). Предположим, что $f \in L^{p_0, s_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_1, s_1}(\mathbb{R}^n)$ ($n \in \mathbb{N}$). Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $1 \leq j \leq n$. Тогда для любого $\delta > 0$

$$\left(\int_\delta^\infty [t^{-\theta r} \omega_j^r(f; t)_{p,s}]^s \frac{dt}{t} \right)^{1/s} \leq K \|f\|_{p_0, s_0}^{1-\theta} [\delta^{-r} \omega_j^r(f; \delta)_{p_1, s_1}]^\theta \quad (3.9)$$

и для любого $0 < \alpha < r$

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\infty [t^{-\theta \alpha} \omega_j^r(f; t)_{p,s}]^s \frac{dt}{t} \right)^{1/s} \\ & \leq K'(r - \alpha)^{1/s} \|f\|_{p_0, s_0}^{1-\theta} \left(\int_0^\infty [t^{-\alpha} \omega_j^r(f; t)_{p_1, s_1}]^{s\theta} \frac{dt}{t} \right)^{1/s}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $K = c_r(p')^{1/s'}(p'_0)^{(1-\theta)/s'_0}(p'_1)^\theta[(1-\theta)\theta]^{-1/s}$ и $K' = 2K\theta^{1/s}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\delta > 0$ и обозначим $g = f_{\delta, j}^r$. Имеем (см. (2.2))

$$\omega_j^r(f; t)_{p,s} \leq 2[2^{2r}\|f - g\|_{p,s} + \omega_j^r(g; t)_{p,s}].$$

Обозначая левую часть (3.9) через $J(\delta)$, получаем

$$J(\delta) \leq 2 \left[2^{2r}\theta^{-1/s}\delta^{-\theta r}\|f - g\|_{p,s} + \left(\int_\delta^\infty [t^{-\theta r} \omega_j^r(g; t)_{p,s}]^s \frac{dt}{t} \right)^{1/s} \right].$$

Заметим, что, в силу неравенства Гёльдера, для любой функции $\varphi \in S_0(\mathbb{R}^n)$

$$\|\varphi\|_{p,s} \leq \|\varphi\|_{p_0, s_0}^{1-\theta} \|\varphi\|_{p_1, s_1}^\theta.$$

Поэтому, применяя (2.10), получим

$$\|f - g\|_{p,s} \leq c_r(p')^{1/s'} \|f\|_{p_0, s_0}^{1-\theta} [\omega_j^r(f; \delta)_{p_1, s_1}]^\theta.$$

Кроме того, в силу теоремы 3.1, леммы 2.3 и неравенства (2.11),

$$\left(\int_0^\infty [t^{-\theta r} \omega_j^r(g; t)_{p,s}]^s \frac{dt}{t} \right)^{1/s} \leq c \|f\|_{p_0, s_0}^{1-\theta} [\delta^{-r} \omega_j^r(f; \delta)_{p_1, s_1}]^\theta,$$

где $c = c_r(p')^{1/s'}(p'_1)^\theta[\theta(1-\theta)]^{-1/s}$. Из полученных оценок следует неравенство (3.9).

Далее, по теореме Фубини имеем

$$\int_0^\infty [t^{-\theta \alpha} \omega_j^r(f; t)_{p,s}]^s \frac{dt}{t} = (r - \alpha)\theta s \int_0^\infty u^{(r-\alpha)\theta s - 1} \left(\int_u^\infty [t^{-\theta r} \omega_j^r(f; t)_{p,s}]^s \frac{dt}{t} \right) du.$$

Оценивая внутренний интеграл с помощью неравенства (3.9), получаем (3.10).

СЛЕДСТВИЕ 3.6. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < r$, $1 < \nu < \infty$, $0 < \theta < 1$ и $p = \nu/\theta$. Предположим, что $f \in L^\nu(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($n \in \mathbb{N}$). Тогда для любого $1 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\infty [t^{-\theta\alpha} \omega_j^r(f; t)_p]^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \\ & \leq K(r - \alpha)^{1/p} \|f\|_\infty^{1-\theta} \left(\int_0^\infty [t^{-\alpha} \omega_j^r(f; t)_\nu]^\nu \frac{dt}{t} \right)^{\theta/\nu}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $K = c_r(\nu')^\theta(1 - \theta)^{-1/p}$.

Пусть $r = 1$. Применяя (3.11) и (3.4), получаем неравенство (1.8).

§ 4. Случай $p_1 = s_1 = 1$

Для любого $x = (x_1, \dots, x_n)$ и любого $k \in \{1, \dots, n\}$ через $\hat{x}_k$ обозначим $(n - 1)$ -мерный вектор, полученный из x удалением координаты x_k . Полагаем также $x = (x_k, \hat{x}_k)$.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ и $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^{n-1}$. Обозначим

$$E(\hat{x}_k) = \{x_k : (x_k, \hat{x}_k) \in E\}.$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть заданы числа $1 \leq p_0, s_0 < \infty$, причем если $p_0 = 1$, то и $s_0 = 1$. Пусть $0 < \theta < 1$ и

$$\frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{p_0} + \theta, \quad \frac{1}{s} = \frac{1 - \theta}{s_0} + \theta.$$

Предположим, что функция $f \in L^{p_0, s_0}(\mathbb{R}^n)$ имеет обобщенную производную $D_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ($n \in \mathbb{N}$) по переменной x_j . Тогда

$$\left(\int_0^\infty [h^{-\theta} \omega_j(f; h)_{p, s}]^s \frac{dh}{h} \right)^{1/s} \leq c \|f\|_{p_0, s_0}^{1-\theta} \|D_j f\|_1^\theta, \quad (4.1)$$

где $c = c(p_0, s_0)[(1 - \theta)\theta]^{-1/s}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $p_0 = s_0 = 1$ неравенство (4.1) мгновенно следует из оценки

$$\omega_j(f; h)_1 \leq \min(2\|f\|_1, h\|D_j f\|_1).$$

Предположим, что $p_0 > 1$. Можно считать также, что $f \geq 0$. Положим $\mu_k = f^*(2^{-k})$ и

$$g_k(x) = \max(f(x), \mu_k) - \mu_k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Далее, пусть $u_k(x) = g_k(x) - g_{k+1}(x)$. Тогда почти всюду на $\mathbb{R}^n$

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(x). \quad (4.2)$$

Заметим, что

$$0 \leq u_k(x) \leq \mu_{k+1} - \mu_k \quad (4.3)$$

и

$$|\{x : u_k(x) > 0\}| \leq 2^{-k}. \quad (4.4)$$

Если $\mu_{k+1} = \mu_k$, то $u_k(x) \equiv 0$. Пусть

$$\sigma = \{k \in \mathbb{Z} : \mu_{k+1} > \mu_k\}$$

и

$$G_k = \{x : \mu_k < f(x) < \mu_{k+1}\}, \quad k \in \sigma.$$

Пусть $j = 1$. Обозначим через D множество всех $\hat{x}_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$ таких, что функция $f(x_1, \hat{x}_1)$ локально абсолютно непрерывна по переменной x_1 на $\mathbb{R}$. Тогда

$$\text{mes}_{n-1}(\mathbb{R}^{n-1} \setminus D) = 0.$$

Пусть $\hat{x}_1 \in D$ и $k \in \sigma$. Сечение $G_k(\hat{x}_1)$ есть открытое множество в $\mathbb{R}$. Функция $u_k(x_1, \hat{x}_1)$ также локально абсолютно непрерывна по переменной x_1 . Отсюда легко следует, что почти всюду на $\mathbb{R}^n$

$$D_1 u_k(x) = D_1 f(x) \chi_{G_k}(x). \quad (4.5)$$

Обозначим ($h > 0$)

$$f_h(x) = f(x + h e_1) - f(x), \quad u_{k,h}(x) = u_k(x + h e_1) - u_k(x).$$

В силу (4.2)

$$f_h(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{k,h}(x). \quad (4.6)$$

Из (4.5) следует, что для любого $k \in \sigma$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_{k,h}(x)| dx \leq h \int_{G_k} |D_1 f(x)| dx \equiv h J_k. \quad (4.7)$$

Поскольку множества G_k попарно не пересекаются, то

$$\sum_{k \in \sigma} J_k \leq \|D_1 f\|_1. \quad (4.8)$$

Предположим сначала, что $s_0 = 1$. Тогда $s = 1$. В силу (4.6)

$$\|f_h\|_{p,1} = \frac{1}{p'} \int_0^\infty t^{1/p-1} f_h^{**}(t) dt \leq \frac{1}{p'} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty t^{1/p-1} u_{k,h}^{**}(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|u_{k,h}\|_{p,1}.$$

Далее, в силу (4.3) и (4.4),

$$\|u_{k,h}\|_{p,1} \leq p 2^{-(k-1)/p} \mu_{k+1}.$$

С другой стороны, применяя лемму 2.1 и неравенства (4.3) и (4.7), имеем

$$\|u_{k,h}\|_{p,1} \leq 2p\mu_{k+1}^{1-1/p}(hJ_k)^{1/p}.$$

Следовательно,

$$\|u_{k,h}\|_{p,1} \leq 2p\mu_{k+1}[\min(2^{-k}, hJ_k/\mu_{k+1})]^{1/p}. \quad (4.9)$$

Пусть $h_k = 2^{-k}\mu_{k+1}/J_k$. Используя (4.9) и учитывая, что $1/p > \theta$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty h^{-\theta} \|u_{k,h}\|_{p,1} \frac{dh}{h} &\leq 2p\mu_{k+1} \left[\left(\frac{J_k}{\mu_{k+1}} \right)^{1/p} \int_0^{h_k} h^{1/p-\theta} \frac{dh}{h} + 2^{-k/p} \int_{h_k}^\infty h^{-\theta} \frac{dh}{h} \right] \\ &= \frac{2p}{(1-p\theta)\theta} \mu_{k+1}^{1-\theta} 2^{-k(1/p-\theta)} J_k^\theta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty h^{-\theta} \|f_h\|_{p,1} \frac{dh}{h} \leq \frac{2p_0}{(1-\theta)\theta} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu_{k+1}^{1-\theta} 2^{-k(1/p-\theta)} J_k^\theta.$$

Применяя неравенство Гёльдера и (4.8), получим, что сумма последнего ряда не превосходит

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu_{k+1} 2^{-k/p_0} \right)^{1-\theta} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} J_k \right)^\theta \leq 4 \|f\|_{p_0,1}^{1-\theta} \|D_1 f\|_1^\theta.$$

Отсюда следует (4.1) в случае $s_0 = 1$ (с постоянной $c = 8p_0[(1-\theta)\theta]^{-1}$).

Предположим теперь, что $s_0 > 1$. Заметим, что $s\theta < 1$ и

$$\frac{s}{p} - s\theta = \frac{s(1-\theta)}{p_0} > \frac{s-1}{p_0} > \frac{s}{p} - 1. \quad (4.10)$$

Далее, положим

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{p} - s\theta + \frac{s-1}{p_0} \right)$$

и

$$\frac{1}{q} = \frac{s}{p} - \beta.$$

В силу (4.10)

$$s\theta < \frac{1}{q} < 1. \quad (4.11)$$

Обозначим

$$\lambda(t) = \int_0^t f^*(u)^{s-1} u^\beta \frac{du}{u}.$$

Поскольку $\beta > (s-1)/p_0$ и $f^*(t) \leq Ct^{-1/p_0}$, то $\lambda(t) < \infty$. Кроме того,

$$f^*(t)^{s-1} \leq \beta t^{-\beta} \lambda(t).$$

Имеем также

$$f_h^*(2t)^s \leq (2f^*(t))^{s-1} f_h^*(t).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|f_h\|_{p,s}^s &\leq 2^{s/p+s-1} \int_0^\infty t^{s/p-1} f^*(t)^{s-1} f_h^*(t) dt \\ &\leq 2^{s/p+s-1} \beta \int_0^\infty t^{1/q-1} \lambda(t) f_h^*(t) dt \\ &= \frac{2^{s/p+s-1} \beta}{q'} \int_0^\infty t^{1/q-2} \int_0^t \lambda(z) f_h^*(z) dz dt \\ &\leq \frac{2^{s/p+s-1} \beta}{q'} \int_0^\infty t^{1/q-2} \lambda(t) \int_0^t f_h^*(z) dz dt. \end{aligned}$$

Обозначим последний повторный интеграл через J . Имеем

$$J \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty t^{1/q-2} \lambda(t) \int_0^t u_{k,h}^*(z) dz dt.$$

Далее, из (4.4) следует, что

$$u_{k,h}^*(z) = 0 \quad \text{при } z > 2^{-k+1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda(2^{-k}) \int_0^{2^{-k}} t^{1/q-2} \int_0^t u_{k,h}^*(z) dz dt \\ &\quad + 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2^{-k}}^\infty t^{1/q-2} \lambda(t) dt \int_0^{2^{-k}} u_{k,h}^*(z) dz \\ &\leq q' \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda(2^{-k}) \|u_{k,h}\|_{q,1} \\ &\quad + 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-k(1-1/q)} \|u_{k,h}\|_{q,1} \int_{2^{-k}}^\infty t^{1/q-2} \lambda(t) dt. \end{aligned}$$

Имеем

$$\int_{2^{-k}}^\infty t^{1/q-2} \lambda(t) dt = q' 2^{k(1-1/q)} \lambda(2^{-k}) + q' \int_{2^{-k}}^\infty t^{s/p-2} f^*(t)^{s-1} dt.$$

Таким образом,

$$\|f_h\|_{p,s}^s \leq 2^{s/p+s+1} \beta \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k \|u_{k,h}\|_{q,1},$$

где $\gamma_k = \lambda(2^{-k}) + 2^{-k(1-1/q)} \eta(2^{-k})$ и $\eta(t) = \int_t^\infty z^{s/p-2} f^*(z)^{s-1} dz$. Положим $\theta_1 = s\theta$. Используя неравенство (4.9) с заменой p на q и учитывая (4.11), получаем, как и выше,

$$\int_0^\infty h^{-\theta_1} \|u_{k,h}\|_{q,1} \frac{dh}{h} \leq \frac{2q}{(1-q\theta_1)\theta_1} \mu_{k+1}^{1-\theta_1} 2^{-k(1/q-\theta_1)} J_k^{\theta_1}.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty h^{-\theta_1} \|f_h\|_{p,s}^s \frac{dh}{h} \leq \frac{4^{s+1} q \beta}{(1 - q \theta_1) \theta_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k \mu_{k+1}^{1-\theta_1} 2^{-k(1/q - \theta_1)} J_k^{\theta_1}. \quad (4.12)$$

Применяя неравенство Гёльдера и (4.8), получим, что сумма ряда в правой части (4.12) не превосходит

$$\|D_1 f\|_1^{\theta_1} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k^{1/(1-\theta_1)} \mu_{k+1} 2^{-k(1/q - \theta_1)/(1-\theta_1)} \right)^{1-\theta_1}. \quad (4.13)$$

Обозначим сумму последнего ряда через V . Заметим, что

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu_{k+1}^{s_0} 2^{-k s_0 / p_0} \right)^{1/s_0} \leq 8 \|f\|_{p_0, s_0}.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателем s_0 , получим

$$\begin{aligned} V^{1-\theta_1} &\leq (8 \|f\|_{p_0, s_0})^{1-\theta_1} \left[\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta(2^{-k})^\nu 2^{-k s'_0 / p'_0} \right)^{1/\nu} \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda(2^{-k})^\nu 2^{-k(s'_0 / p'_0 - \nu / q')} \right)^{1/\nu} \right], \end{aligned}$$

где $\nu = s'_0 / (1 - \theta_1)$. Далее, в силу неравенства Харди,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta(2^{-k})^\nu 2^{-k s'_0 / p'_0} \right)^{1/\nu} &\leq 4 \left(\int_0^\infty t^{s'_0 / p'_0} \left(\int_t^\infty z^{s/p-2} f^*(z)^{s-1} dz \right)^\nu \frac{dt}{t} \right)^{1/\nu} \\ &\leq \frac{4 p'_0}{1 - \theta_1} \|f\|_{p_0, s_0}^{s-1}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda(2^{-k})^\nu 2^{-k(s'_0 / p'_0 - \nu / q')} \right)^{1/\nu} \leq \frac{8 p_0}{1 - \theta_1} \|f\|_{p_0, s_0}^{s-1}.$$

Подставляя полученные оценки в (4.13), а затем в (4.12), получим

$$\left(\int_0^\infty h^{-\theta_1} \|f_h\|_{p,s}^s \frac{dh}{h} \right)^{1/s} \leq C \|f\|_{p_0, s_0}^{1-\theta} \|D_1 f\|_1^\theta,$$

где $C = C(p_0, s_0) [(1 - \theta) \theta]^{-1/s}$. В силу леммы 2.4 и неравенства Харди, отсюда следует (4.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Теорема 4.1 может быть распространена на частные производные и модули непрерывности высших порядков. Соответствующие результаты будут изложены в другой работе.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть заданы числа $1 < p_0 < \infty$, $1 \leq s_0 < \infty$ и $0 < \theta < 1$. Пусть

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \theta, \quad \frac{1}{s} = \frac{1-\theta}{s_0} + \theta.$$

Предположим, что $f \in L^{p_0, s_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ ($n \in \mathbb{N}$). Пусть $1 \leq j \leq n$. Тогда для любого $\delta > 0$

$$\left(\int_{\delta}^{\infty} [t^{-\theta} \omega_j(f; t)_{p, s}]^s \frac{dt}{t} \right)^{1/s} \leq K \|f\|_{p_0, s_0}^{1-\theta} [\omega_j(f; \delta)_1 / \delta]^{\theta} \quad (4.14)$$

и для любого $0 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{\infty} [t^{-\theta\alpha} \omega_j(f; t)_{p, s}]^s \frac{dt}{t} \right)^{1/s} \\ & \leq K_1 (1-\alpha)^{1/s} \|f\|_{p_0, s_0}^{1-\theta} \left(\int_0^{\infty} [t^{-\alpha} \omega_j(f; t)_1]^{s\theta} \frac{dt}{t} \right)^{1/s}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где $K = c(p_0, s_0)[(1-\theta)\theta]^{-1/s}$ и $K_1 = 2K\theta^{1/s}$.

Эта теорема выводится из теоремы 4.1 точно так же, как теорема 3.5 выводится из теоремы 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Теоремы 4.1 и 4.3 не имеют места при $p_0 = s_0 = \infty$. Например, рассмотрим неравенство (4.14). Если $p_0 = s_0 = \infty$ и f — характеристическая функция единичного шара в $\mathbb{R}^n$, то правая часть (4.14) ограничена, а левая часть стремится к ∞ при $\delta \rightarrow 0$.

Пусть $BV(\mathbb{R}^n)$ — пространство функций ограниченной вариации на $\mathbb{R}^n$ (см. [20]). Применяя (4.14) и (3.4), получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$ и $1/q = (1-\theta)/p + \theta$. Предположим, что $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap BV(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\|f\|_{b_q^{\theta}} \leq c \|f\|_p^{1-\theta} \|f\|_{BV}^{\theta}.$$

Этот результат дает некоторое усиление неравенства

$$\|f\|_{b_q^{\theta}} \leq c \|f\|_{b_p^0}^{1-\theta} \|f\|_{BV}^{\theta},$$

доказанного в работе [21; теорема 1.5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
- [2] П. Л. Ульянов. Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Матем. сб. 1970. Т. 81. № 1. С. 104–131.
- [3] В. И. Коляда. О соотношениях между модулями непрерывности в разных метриках // Труды МИАН. 1988. Т. 181. С. 117–136.

- [4] В. И. Коляда. О вложении пространств Соболева // Матем. заметки. 1993. Т. 54. №3. С. 48–71.
- [5] A. Pełczyński, M. Wojciechowski. Molecular decompositions and embedding theorems for vector-valued Sobolev spaces with gradient norm // Studia Math. 1993. V. 107. №1. P. 61–100.
- [6] J. Bourgain, H. Brezis, P. Mironescu. Another look at Sobolev spaces // Optimal Control and Partial Differential Equations. In honour of Professor Alain Bensoussan's 60th Birthday / ed. J.L. Menaldi, E. Rofman, and A. Sulem. Amsterdam / Tokyo: IOS Press / Ohmsha, 2001. P. 439–455.
- [7] J. Bourgain, H. Brezis, P. Mironescu. Limiting embedding theorems for $W^{s,p}$ when $s \uparrow 1$ and applications // J. Anal. Math. 2002. V. 87. P. 77–101.
- [8] V. Maz'ya, T. Shaposhnikova. On the Bourgain, Brezis, and Mironescu theorem concerning limiting embeddings of fractional Sobolev spaces // J. Funct. Anal. 2002. V. 195. №2. P. 230–238.
- [9] V. Maz'ya, T. Shaposhnikova. On the Brezis and Mironescu conjecture concerning a Gagliardo–Nirenberg inequality for fractional Sobolev norms // J. Math. Pures Appl. (9). 2002. V. 81. №9. P. 877–884.
- [10] V. I. Kolyada, A. K. Lerner. On limiting embeddings of Besov spaces // Studia Math. 2005. V. 171. №1. P. 1–13.
- [11] T. Runst. Mapping properties of nonlinear operators in spaces of Triebel–Lizorkin and Besov type // Anal. Math. 1986. V. 12. №4. P. 313–346.
- [12] H. Brezis, P. Mironescu. Gagliardo–Nirenberg, composition and products in fractional Sobolev spaces // J. Evol. Equ. 2001. V. 1. №4. P. 387–404.
- [13] S. Poornima. An embedding theorem for the Sobolev space $W^{1,1}$ // Bull. Sci. Math. (2). 1983. V. 107. №3. P. 253–259.
- [14] J. J. F. Fournier. Mixed norms and rearrangements: Sobolev's inequality and Littlewood's inequality // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1987. V. 148. P. 51–76.
- [15] И. Стейн, Г. Вейс. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
- [16] C. Bennett, R. Sharpley. Interpolation of Operators. Boston: Academic Press, 1988. (Pure Appl. Math. V. 129.)
- [17] P. P. Petrushev, V. A. Popov. Rational Approximation of Real Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. (Encyclopedia Math. Appl. V. 28.)
- [18] Б. С. Кашин. Замечания об оценке функций Лебега ортонормированных систем // Матем. сб. 1978. Т. 106. №3. С. 380–385.
- [19] С. В. Бочкарев. Расходящийся на множестве положительной меры ряд Фурье для произвольной ограниченной ортонормированной системы // Матем. сб. 1975. Т. 98. №3. С. 436–449.
- [20] W. P. Ziemer. Weakly Differentiable Functions. New York: Springer-Verlag, 1989. (Grad. Texts in Math. V. 120.)
- [21] A. Cohen, W. Dahmen, I. Daubechies, R. DeVore. Harmonic analysis of the space BV // Rev. Mat. Iberoamericana. 2003. V. 19. №1. P. 235–263.

Karlstad University, Sweden

E-mail: viktor.kolyada@kau.se

Поступила в редакцию

12.09.2005