Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Х. Сендов, Экстремальные задачи для алгебраических многочленов, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 6, 175–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1682>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:19:09

УДК 517.5

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Бл. Сендов

Пусть $L(p)$ — линейный оператор на множестве нормализованных алгебраических многочленов $p(z) = (z_1 - z)(z_2 - z) \cdots (z_n - z)$ с $z_1 z_2 \cdots z_n = 1$. Нас интересует значение

$$[L] = \sup \{ \min \{ |L(p)(z_k)| : k = 1, 2, \dots, n \} : z_1 z_2 \cdots z_n = 1 \}$$

для различных линейных операторов. Наша мотивация состоит в том, что гипотеза Смейла о среднем значении может быть представлена в виде равенства $[L] = 1 - 1/(n+1)$ для линейного оператора

$$L(p)(z) = L\left(\sum_{k=0}^n a_k z^k\right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} a_k z^k = \frac{1}{z} \int_0^z p(u) du, \quad a_0 = 1, \quad a_n = (-1)^n.$$

Библиография: 7 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	175
2. Обозначения	177
3. Операторы	178
4. Случай малых n	186
Список литературы	186

1. Введение

С 1981 г. знаменитая гипотеза о среднем значении филдсовского медалиста Стефана Смейла [4] формулировалась с точки зрения численного метода последовательных приближений нулей многочлена p . При таком подходе было желательно найти наименьшую положительную постоянную c , удовлетворяющую условию

$$|p'(z)| \geq \frac{1}{c} \left| \frac{p(\zeta) - p(z)}{\zeta - z} \right| \quad (1)$$

для по крайней мере одного нуля многочлена p' (критической точки p) и для всех z в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Достаточно установить неравенство (1) только при $z = 0$

и для всех многочленов p , удовлетворяющих условиям $p(0) = 0$ и $p'(0) \neq 0$. Смейл сформулировал следующую гипотезу о величине наименьшей постоянной c , известную как *гипотеза Смейла о среднем значении*.

ГИПОТЕЗА 1. Пусть p – многочлен степени n , причем $p(0) = 0$ и $p'(0) \neq 0$. Тогда

$$\min \left\{ \left| \frac{p(\zeta)}{\zeta p'(0)} \right| : p(\zeta) = 0 \right\} \leq 1 - \frac{1}{n}. \quad (2)$$

Гипотеза 1 тривиальна при $n = 2$ и доказана для $n = 3, 4$. Следующий частный случай принадлежит Д. Тишлеру [5].

ТЕОРЕМА 1. Гипотеза 1 выполняется для многочлена p , если все критические точки многочлена p имеют равные модули.

В качестве ослабления гипотезы 1 можно разрешить постоянной c быть больше 1. С. Смейл проверил утверждение (2) для $c = 4$. А. Ф. Бердон, Д. Минда и Т. В. Нг [1] доказали неравенство (2) для

$$c = \alpha_n = 4^{(n-2)/(n-1)},$$

а Г. Шмайссер [2] привел простое доказательство неравенства (2) для

$$c = \beta_n = \frac{2^n - (n+1)}{n(n-1)}.$$

Асимптотически величина β_n много больше α_n , но при $2 \leq n \leq 7$ имеем $\beta_n < \alpha_n$.

Тишлер [5], [6] сформулировал следующую более сильную гипотезу.

ГИПОТЕЗА 2. Пусть p – многочлен степени n , и пусть $p(0) = 0$ и $p'(0) \neq 0$. Тогда

$$\min \left\{ \left| \frac{1}{2} - \frac{p(\zeta)}{\zeta p'(0)} \right| : p(\zeta) = 0 \right\} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}. \quad (3)$$

Эта более общая гипотеза была доказана Тишлером при $n = 3, 4$. Недавно Дж. Тайсон [7] опубликовал статью, в которой наиболее интересен следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Для любого $n \geq 5$ существует многочлен p степени n с $p(0) = 0$ и $p'(0) \neq 0$, удовлетворяющий условию

$$\min \left\{ \left| \frac{1}{2} - \frac{p(\zeta)}{\zeta p'(0)} \right| : p(\zeta) = 0 \right\} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}.$$

Иначе говоря, Тайсон доказал, что гипотеза 2 неверна при $n > 4$.

Цель настоящей статьи – сформулировать задачу о минимаксе для симметрических многочленов, включающую гипотезы 1 и 2.

2. Обозначения

Пусть $\mathcal{S}_n$ – множество нормализованных алгебраических многочленов

$$\begin{aligned} p(z) &= (z_1 - z)(z_2 - z) \cdots (z_n - z) \\ &= \sum_{m=0}^n (-1)^m S_{n,n-m}(z_1, z_2, \dots, z_n) z^m = \sum_{m=0}^n a_m z^m \end{aligned} \quad (4)$$

с $z_1 z_2 \cdots z_n = 1$, где

$$S_{n,m}(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n,$$

– элементарные симметрические функции степени m .

Пусть $U(p)$ – оператор на множестве алгебраических многочленов $p \in \mathcal{S}_n$. Положим

$$\begin{aligned} \|U(p)\| &= \min\{|U(p)(z_k)| : k = 1, 2, \dots, n\}, \\ [U] &= \sup\{\|U(p)\| : p \in \mathcal{S}_n\}. \end{aligned}$$

Многочлен $p^* \in \mathcal{S}_n$ называется *экстремальным* для оператора U , если $[U] = \|U(p^*)\|$.

Рассмотрим класс линейных операторов L на множестве алгебраических многочленов следующего вида:

$$L(p)(z) = \sum_{m=0}^n \alpha_m a_m z^m, \quad (5)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ – вещественные числа. Тогда

$$\begin{aligned} L(p)(z_1) &= \sum_{m=0}^n (-1)^m \alpha_m S_{n,n-m}(z_1, z_2, \dots, z_n) z_1^m \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \lambda_{m+1} S_{n-1,n-m-1}(z_2, z_3, \dots, z_n) z_1^{m+1}, \end{aligned}$$

где

$$\lambda_k = \alpha_{k-1} - \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Положим

$$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

и отождествим оператор $L = L_\Lambda$ с вектором Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обозначим через $\mathcal{L}_n$ множество всех линейных операторов L_Λ , отвечающих n -мерным векторам Λ с неотрицательными координатами.

Очевидно, что $\mathcal{L}_n$ – замкнутый выпуклый конус.

Изучение операторов из конуса $\mathcal{L}_n$ мотивируется тем, что гипотеза Смейла [4] отвечает оператору $L_\Lambda \in \mathcal{L}_n$ с вектором

$$\Lambda = \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \dots, \frac{1}{n(n+1)} \right\}. \quad (6)$$

Заметим, что гипотеза 2 соответствует оператору $L_\Lambda \in \mathcal{L}_n$ с

$$\Lambda = \left\{ 0, \frac{1}{2 \cdot 3}, \dots, \frac{1}{n(n+1)} \right\} \quad (7)$$

и, в нашей формулировке, $n - 1$ заменено на n .

3. Операторы

Начнем с простого утверждения.

ЛЕММА 1. Для любого оператора $L_\Lambda \in \mathcal{L}_n$ значение $[L_\Lambda]$ конечно и выполняется неравенство

$$[L_\Lambda] \leq \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \lambda_{m+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $z_1 z_2 \cdots z_n = 1$ следует, что

$$S_{n-1, n-m-1}(z_2, z_3, \dots, z_n) = \frac{1}{z_1} S_{n-1, m} \left(\frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}, \dots, \frac{1}{z_n} \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Пусть нули занумерованы так, что $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n|$. Тогда

$$\begin{aligned} [L_\Lambda] &\leq |L_\Lambda(p)(z_1)| = \left| \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \lambda_{m+1} S_{n-1, m} \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_1}{z_3}, \dots, \frac{z_1}{z_n} \right) \right| \\ &\leq \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \lambda_{m+1}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Равенство

$$[cL_\Lambda] = |c|[L_\Lambda]$$

справедливо для любого Λ и любой постоянной c , причем

$$[L_\Lambda] = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \Lambda = I = \{0, 0, \dots, 0\}.$$

Положим

$$\begin{aligned} \zeta_k &= e^{2(k-1)\pi i/n}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ \theta_n(z) &= 1 + (-z)^n = \prod_{k=1}^n (\zeta_k - z) \end{aligned}$$

и

$$\kappa_n(z) = (1 - z)^n.$$

Очевидно, что $\theta_n(z)$ и $\kappa_n(z)$ — многочлены, принадлежащие множеству $\mathcal{S}_n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $p^*(z)$ — экстремальный многочлен для оператора $L_\Lambda \in \mathcal{L}_n$, то и многочлен

$$p_m^*(z) = p^*(\zeta_m z), \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

экстремален для L_Λ .

Доказательство следует из того факта, что нули p_m^* — это точки $z_k \zeta_m^{-1}$, где $k = 1, 2, \dots, n$, и $L_\Lambda(p^*)(z_k) = L_\Lambda(p_m^*)(z_k \zeta_m^{-1})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любого $L_\Lambda \in \mathcal{L}_n$ имеем

$$L_\Lambda(\theta_n)(\zeta_k) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

и

$$L_\Lambda(\kappa_n)(\zeta_k) = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \binom{n-1}{m} \lambda_{m+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обозначим через $\mathcal{L}(\theta_n)$ множество операторов $L_\Lambda \in \mathcal{L}_n$, для которых многочлен θ_n является экстремальным.

Множество операторов $L_\Lambda \in \mathcal{L}_n$, для которых многочлен κ_n является экстремальным, мы обозначим символом $\mathcal{L}_+(\kappa_n)$, если

$$\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \binom{n-1}{m} \lambda_{m+1} \geq 0$$

и символом $\mathcal{L}_-(\kappa_n)$, если

$$\sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \binom{n-1}{m} \lambda_{m+1} \leq 0.$$

Если $L_\Lambda \in \mathcal{L}(\theta_n)$, то мы будем также говорить, что $\Lambda \in \mathcal{L}(\theta_n)$, и то же относится к $\mathcal{L}_+(\kappa_n)$ и $\mathcal{L}_-(\kappa_n)$.

ЛЕММА 2. Множества $\mathcal{L}(\theta_n)$, $\mathcal{L}_+(\kappa_n)$ и $\mathcal{L}_-(\kappa_n)$ – замкнутые выпуклые конусы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно доказать, что если $L_\Lambda, L_\Omega \in \mathcal{L}(\theta_n)$ и $\alpha > 0, \beta > 0$ выполняется соотношение $L_\Gamma = \alpha L_\Lambda + \beta L_\Omega \in \mathcal{L}(\theta_n)$. Предположим противное. Пусть θ_n – не экстремальный многочлен для L_Γ . Тогда

$$[L_\Gamma] > \alpha \left(\sum_{m=1}^n \lambda_m \right) + \beta \left(\sum_{m=1}^n \omega_m \right). \quad (8)$$

Пусть g – экстремальный многочлен для L_Γ . Тогда по предложению 3 имеем

$$\begin{aligned} \|L_\Gamma(g)\| &= \min\{|L_\Gamma(g)(\zeta)| : g(\zeta) = 0\} \\ &= \min\{|\alpha L_\Lambda(g)(\zeta) + \beta L_\Omega(g)(\zeta)| : g(\zeta) = 0\} \\ &\leq \min\{|\alpha L_\Lambda(\theta_n)(\zeta) + \beta L_\Omega(\theta_n)(\zeta)| : \theta_n(\zeta) = 0\} \\ &= \alpha \left(\sum_{m=1}^n \lambda_m \right) + \beta \left(\sum_{m=1}^n \omega_m \right), \end{aligned}$$

что противоречит формуле (8).

Тот факт, что $\mathcal{L}_+(\kappa_n)$ и $\mathcal{L}_-(\kappa_n)$ – выпуклые конусы, можно доказать аналогично.

Заметим, что гипотеза 1 эквивалентна соотношению

$$\left\{ \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \dots, \frac{1}{n(n+1)} \right\} \in \mathcal{L}(\theta_n),$$

а гипотеза 2 – соотношению

$$\left\{ 0, \frac{1}{2 \cdot 3}, \dots, \frac{1}{n(n+1)} \right\} \in \mathcal{L}(\theta_n).$$

Хорошо известно, что любой элемент замкнутого выпуклого конуса в конечномерном евклидовом пространстве может быть представлен в виде неотрицательной линейной комбинации неприводимых элементов этого конуса. (Элемент конуса называется неприводимым, если это – периферический элемент, не являющийся суммой двух различных элементов этого конуса.) Неприводимые элементы конуса $\mathcal{L}_n$ – это векторы

$$e_{n,m} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

где $\lambda_m = 1$ и $\lambda_l = 0$ при $l \neq m$. Очевидно, любой элемент $\mathcal{L}_n$ есть неотрицательная линейная комбинация векторов (9).

Из леммы 1 и предложения 3 вытекает следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Векторы $e_{n,1}$ и $e_{n,n}$ принадлежат конусу $\mathcal{L}(\theta_n)$. Вектор $e_{n,m}$ принадлежит конусу $\mathcal{L}_+(\kappa_n)$, если m четно, и конусу $\mathcal{L}_-(\kappa_n)$, если m нечетно. Векторы $e_{n,m}$ неприводимы в любом содержащем их подконусе конуса $\mathcal{L}_n$.

При $n \geq 3$ векторы $e_{n,m}$ не принадлежат $\mathcal{L}(\theta_n)$ при $m = 2, 3, \dots, n-1$.

3.1. Операторы с двумя последовательными ненулевыми координатами. Мы ищем простые векторы, принадлежащие $\mathcal{L}(\theta_n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Положим

$$l_{n,m}(\alpha) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \quad \alpha \in [0, 1],$$

где $\lambda_m = 1 - \alpha$, $\lambda_{m+1} = \alpha$ и $\lambda_l = 0$ при $n \neq m, m+1$; $m = 1, 3, \dots, n-1$.

Из предложения 3 следует, что

$$\|L_{l_{n,m}(\alpha)}(\theta_n)\| = \lambda_{m-1} + \lambda_m = 1$$

и

$$\|L_{l_{n,m}(\alpha)}(\kappa_n)\| = \left| \binom{n}{m} \alpha - \binom{n-1}{m-1} \right|.$$

Поэтому справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Вектор $l_{n,m}(\alpha)$ не принадлежит конусу $\mathcal{L}(\theta_n)$, если α не принадлежит отрезку

$$\left[\frac{m}{n} - \binom{n}{m}^{-1}, \frac{m}{n} + \binom{n}{m}^{-1} \right]. \quad (10)$$

Доказательство следует из неравенства

$$\|L_{l_{n,m}(\alpha)}(\theta_n)\| < \|L_{l_{n,m}(\alpha)}(\kappa_n)\|,$$

которое выполняется, если α не принадлежит отрезку (10).

Возникает естественный вопрос: принадлежит ли вектор $l_{n,m}(\alpha)$ конусу $\mathcal{L}(\theta_n)$, если α принадлежит отрезку (10)? Ответ положителен при $m = 1$ и $m = n - 1$, но отрицателен в общем случае, см. лемму 5 и предложение 6.

Для доказательства леммы 5 нам нужно следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — положительные вещественные числа, $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. Тогда

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x_1^{-n+1} + x_2^{-n+1} + \cdots + x_n^{-n+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма тривиальна при $n = 2$. При $n = 3$ она доказана в [3]. Доказательство следует из очевидных неравенств

$$x_1^2(x_2 - x_3)^2 + x_2^2(x_3 - x_1)^2 + x_3^2(x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Действительно, при $x_1 x_2 x_3 = 1$ имеем

$$\begin{aligned} & x_1^2(x_2 - x_3)^2 + x_2^2(x_3 - x_1)^2 + x_3^2(x_1 - x_2)^2 \\ &= 2(x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 - x_1^2 x_2 x_3 - x_2^2 x_3 x_1 - x_3^2 x_1 x_2) \\ &= 2(x_1^{-2} + x_2^{-2} + x_3^{-2} - x_1 - x_2 - x_3) \geq 0. \end{aligned}$$

При $n \geq 4$ положим

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) &= (x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^{n-1} + x_1^{-n+1} + x_2^{-n+1} + \cdots + x_{n-1}^{-n+1} \\ &\quad - (x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^{-1} - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}. \end{aligned}$$

Соотношение

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (11)$$

является необходимым условием минимума f . Из (11) следует, что не существует таких трех индексов k, l, s , что

$$x_k \neq x_l \neq x_s \neq x_k. \quad (12)$$

Предположим противное. Пусть (12) выполняется. Тогда из

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{n-1}{x_k} (x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^{n-1} - (n-1)x_k^{-n} + \frac{1}{x_k} (x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^{-1} - 1 = 0$$

следует, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_l} &= \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_l} \right) [(n-1)(x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^{n-1} \\ &\quad - (n-1)(x_k^{-n+1} + x_k^{-n+2} x_l^{-1} + \cdots + x_l^{-n+1}) + (x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^{-1}] = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_s} &= \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_s} \right) [(n-1)(x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^{n-1} \\ &\quad - (n-1)(x_k^{-n+1} + x_k^{-n+2} x_s^{-1} + \cdots + x_s^{-n+1}) + (x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^{-1}] = 0\end{aligned}$$

и

$$x_k^{-n+1} + x_k^{-n+2} x_l^{-1} + \cdots + x_l^{-n+1} = x_k^{-n+1} + x_k^{-n+2} x_s^{-1} + \cdots + x_s^{-n+1},$$

или $x_l = x_s$, что противоречит (12).

К настоящему моменту мы доказали, что из (11) следует, что

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = u, \quad x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_{n-1} = v$$

и

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) &= g(u, v) = \left(u^k v^{n-k-1} \right)^{n-1} \\ &\quad + k u^{-n+1} + (n-k-1) v^{-n+1} - \left(u^k v^{n-k-1} \right)^{-1} - k u - (n-k-1) v.\end{aligned}$$

Поэтому из соотношения

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v} = 0,$$

следует, что $u = v$, и поэтому

$$g(u, v) = h(u) = u^{(n-1)^2} + (n-2)u^{-n+1} - (n-1)u.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{n-1}{u^n} ((n-1)u^{n^2-2n} - u^n - n + 2) = 0$$

и, наконец, $u = 1$. Докажем, что из (11) следует соотношение

$$\min\{f(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_k > 0\} = f(1, 1, \dots, 1) = 0.$$

ЛЕММА 4. Для z_1 положим

$$A_1 = (1 - \alpha)S_{n-1, n-m}(z_2, z_3, \dots, z_n)z_1^m - \alpha S_{n-1, n-m-1}(z_2, z_3, \dots, z_n)z_1^{m+1}$$

и аналогично введем $A_2, A_3, \dots, A_n$ для $z_2, z_3, \dots, z_n$ соответственно. Пусть

$$Z'_1 = S_{n-1, n-m}(z_2, z_3, \dots, z_n), \quad Z''_1 = z_1 S_{n-1, n-m-1}(z_2, z_3, \dots, z_n)$$

при z_1 , и аналогично введем $Z'_2, Z''_2, \dots, Z'_n, Z''_n$ при $z_2, z_3, \dots, z_n$ соответственно. Если

$$M = S_{n, n-m}(z_1, z_2, \dots, z_n),$$

то

$$\sum_{k=1}^n |z_k|^{-2m} |A_k|^2 = \sum_{k=1}^n |Z'_k - \alpha M|^2 = \sum_{k=1}^n |Z'_k|^2 - \alpha(2m - n\alpha)|M|^2 \quad (13)$$

и

$$\sum_{k=1}^n |z_k|^{-2m} |A_k|^2 = \sum_{k=1}^n |Z''_k - (1 - \alpha)M|^2 = \sum_{k=1}^n |Z''_k|^2 - (1 - \alpha)(n - 2m + n\alpha)|M|^2. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$Z'_1 + Z'_2 + \dots + Z'_n = mM \quad \text{и} \quad Z''_1 + Z''_2 + \dots + Z''_n = (n - m)M.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |z_k|^{-2m} |A_k|^2 &= \sum_{k=1}^n (Z'_k - \alpha M)(\overline{Z'_k} - \alpha \overline{M}) \\ &= \sum_{k=1}^n |Z'_k|^2 + n\alpha^2 |M|^2 - 2m\alpha |M|^2. \end{aligned}$$

Формулу (14) можно доказать аналогично.

Мы теперь можем доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 5. Вектор $l_{n,1}(\alpha)$ лежит в конусе $\mathcal{L}(\theta_n)$ при $\alpha \in [0, 2/n]$, а вектор $l_{n,n-1}(\alpha)$ принадлежит конусу $\mathcal{L}(\theta_n)$ при $\alpha \in [1 - 2/n, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $m = 1$ и $\alpha \in [0, 2/n]$ из (13) следует, что

$$\sum_{k=1}^n |z_k|^{-2} |A_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n |Z'_k|^2, \quad Z'_k = \frac{z_1 z_2 \dots z_n}{z_k}.$$

Согласно последнему неравенству, хотя бы для одного из чисел $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, скажем, для $k = 1$, имеем

$$|z_1|^{-2} |A_1|^2 \leq |Z'_1|^2,$$

или

$$|A_1|^2 \leq |z_1|^2 |Z'_1|^2 = |z_1 z_2 \cdots z_n|^2 = 1.$$

Для доказательства второй части леммы нужна лемма 3. При $m = n - 1$ и $\alpha \in [1 - 2/n, 1]$ имеем

$$\sum_{k=1}^n |z_k|^{-2n+2} |A_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n |Z''_k|^2 = \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n |z_k|^{-2n+2}.$$

Согласно последнему неравенству, хотя бы для одного из чисел $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, скажем, при $k = 1$, имеем

$$|z_1|^{-2n+2} |A_1|^2 \leq |z_1|^{-2n+2},$$

или

$$|A_1|^2 \leq 1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Вектор $l_{4,2}(\alpha)$ не принадлежит конусу $\mathcal{L}(\theta_4)$ при $\alpha \neq 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для z_1 положим

$$A_1 = (1 - \alpha)(z_2 z_3 + z_3 z_4 + z_4 z_2) z_1^2 - \alpha(z_2 + z_3 + z_4) z_1^3$$

и аналогично введем A_2, A_3, A_4 при z_2, z_3, z_4 , соответственно. Пусть

$$z_1 = z_2 = e^{i\varphi}, \quad z_3 = z_4 = e^{-i\varphi}, \quad z_1 z_2 z_3 z_4 = 1.$$

Тогда

$$A_1(\varphi) = 1 - \alpha + 2(1 - 2\alpha)e^{2i\varphi} - \alpha e^{4i\varphi}.$$

Очевидно

$$A_2(\varphi) = A_1(\varphi), \quad A_3(\varphi) = A_4(\varphi) = \overline{A_1(\varphi)},$$

или

$$|A_1(\varphi)| = |A_2(\varphi)| = |A_3(\varphi)| = |A_4(\varphi)|$$

и

$$\min\{|A_1(\varphi)|, |A_2(\varphi)|, |A_3(\varphi)|, |A_4(\varphi)|\} = |A_1(\varphi)|.$$

$$|A_1(\varphi)|^2 = A_1(\varphi) \overline{A_1(\varphi)} = 5 - 18\alpha + 18\alpha^2 + 4(1 - 2\alpha)^2 \cos 2\varphi - 2\alpha(1 - \alpha) \cos 4\varphi.$$

Величина $|A_1(\varphi)|^2$ достигает максимума для

$$\cos 2\varphi^* = \frac{(1 - 2\alpha)^2}{2\alpha(1 - \alpha)}$$

и

$$|A_1(\varphi^*)|^2 = 1 + 4(1 - 2\alpha)^2 + \frac{(1 - 2\alpha)^2}{\alpha(1 - \alpha)}. \quad (15)$$

Заметим, что

$$0 \leq \frac{(1 - 2\alpha)^2}{2\alpha(1 - \alpha)} \leq \frac{1}{4} \quad \text{для } \alpha \in [1/3, 2/3].$$

Из (15) следует, что $\{0, 1 - \alpha, \alpha, 0\}$ может принадлежать $\mathcal{L}(\theta_4)$ при $\alpha = 1/2$.

На основании предложений 5 и 6 получаем следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 3. Векторы $l_{n,m}(m/n)$ принадлежат $\mathcal{L}(\theta_n)$ при $m = 2, 3, \dots, n-2$.

ЛЕММА 6. Гипотеза 3 влечет гипотезу Смейла о среднем значении.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть гипотеза 3 справедлива. Тогда следующие векторы принадлежат $\mathcal{L}(\theta_n)$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0\}, \\ V_2 &= \{n-1, 1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0\}, \\ V_3 &= \{0, n-2, 2, 0, \dots, 0, 0, 0\}, \\ &\dots\dots\dots \\ V_{n-1} &= \{0, 0, 0, 0, \dots, 2, n-2, 0\}, \\ V_n &= \{0, 0, 0, 0, \dots, 0, 1, n-1\}. \end{aligned}$$

Простые вычисления показывают, что

$$\left\{ \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \dots, \frac{1}{n(n+1)} \right\} = \frac{1}{n+1} V_1 + \frac{1}{n+1} \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} V_k.$$

Заметим, что вектор

$$\left\{ 0, \frac{1}{2 \cdot 3}, \dots, \frac{1}{n(n+1)} \right\}$$

не является положительной линейной комбинацией векторов $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ при $n \geq 4$. Этот факт не дает нового доказательства теоремы Тайсона (теоремы 2), но такое доказательство может быть получено нашими операторными методами.

В [3] получено решение задачи, обратной гипотезе 1.

ТЕОРЕМА 3. Если $\Lambda = \{1, 1, 1, \dots, 1\}$, то $[L_\Lambda] = n$ и $\{1, 1, 1, \dots, 1\} \in \mathcal{L}(\theta_n)$.

Теорема 3 эквивалентна соотношению

$$\sup \{ \min \{ |\zeta p'(\zeta)| : p(\zeta) = 0 \} : p \in \mathcal{S}_n \} = n.$$

Его доказательство основано на тождестве

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k p'(z_k)} = (-1)^{n-1}$$

при $p \in \mathcal{S}_n$ с простыми нулями $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Заметим, что

$$\{1, 1, 1, \dots, 1\} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n V_k.$$

4. Случай малых n

В этом разделе мы описываем конусы $\mathcal{L}(\theta_2)$ и $\mathcal{L}(\theta_3)$.

4.1. Конус $\mathcal{L}(\theta_2)$. Из предложения 4 следует, что $\mathcal{L}(\theta_2) = \mathcal{L}_2$, и для любого $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\} \in \mathcal{L}_2$ имеем $[\Lambda] = \lambda_1 + \lambda_2$. Доказательства гипотез 1 и 2 при $n = 3$ следуют из последнего равенства.

4.2. Конус $\mathcal{L}(\theta_3)$. Из предложения 4 и леммы 5 получаем:

ТЕОРЕМА 4. *Векторы*

$$U_1 = \{1, 0, 0\}, \quad U_2 = \{1, 2, 0\}, \quad U_3 = \{0, 2, 1\} \quad \text{и} \quad U_4 = \{0, 0, 1\}$$

и коллинеарные им – это все неприводимые векторы в $\mathcal{L}(\theta_3)$.

Доказательства гипотез 1 и 2 при $n = 4$ следуют из теоремы 4 поскольку

$$\left\{ \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4} \right\} = \frac{1}{2} U_1 + \frac{1}{12} U_3$$

и

$$\left\{ 0, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4} \right\} = \frac{1}{12} U_3.$$

4.3. Конус $\mathcal{L}(\theta_4)$. Мы уже доказали, что неприводимые векторы в $\mathcal{L}(\theta_3)$ имеют вид

$$V_1 = \{1, 0, 0, 0\}, \quad V_2 = \{1, 1, 0, 0\}, \quad V_4 = \{0, 0, 1, 1\} \quad \text{и} \quad V_5 = \{0, 0, 0, 1\}.$$

Для доказательства гипотезы Смейла о среднем значении при $n = 5$ нужно показать, что

$$V_3 = \{0, 1, 1, 0\} \in \mathcal{L}(\theta_4).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. F. Beardon, D. Minda, T. W. Ng. Smale's mean value conjecture and the hyperbolic metric // Math. Ann. 2002. V. 322. №4. P. 623–632.
- [2] Q. I. Rahman, G. Schmeisser. Analytic Theory of Polynomials. Oxford: Oxford Univ. Press, Clarendon Press, 2002.
- [3] Bl. Sendov, N. Nikolov. Min problems for complex polynomials // East J. Approx. 2003. V. 9. №4. P. 427–442.
- [4] S. Smale. The fundamental theorem of algebra and complexity theory // Bull. Amer. Math. Soc. 1981. V. 4. №1. P. 1–36.
- [5] D. Tischler. Critical points and values of complex polynomials // J. Complexity. 1989. V. 5. №4. P. 438–456.
- [6] D. Tischler. Perturbations of critical fixed points of analytic maps // Astérisque. 1994. V. 222. P. 407–422.
- [7] J. Tyson. Counterexamples to Tischler's strong form of Smale's mean value conjecture // Bull. London Math. Soc. 2005. V. 37. №1. P. 95–106.