Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Трибель, Пространства на множествах, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 6, 187–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1683>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:54:52

УДК 517.5

ПРОСТРАНСТВА НА МНОЖЕСТВАХ

Г. ТРИБЕЛЬ

В работе рассматриваются пространства $\mathfrak{B}_{pq}^s$ и $\mathfrak{F}_{pq}^s$ положительной гладкости $s > 0$, основанные на L_p -пространствах с $0 < p \leq \infty$ и воспроизводящих формулах для гладких функций. Мы сравниваем эти пространства с B -пространствами и F -пространствами, полученными другими средствами.

Библиография: 37 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение и воспроизводящая формула	187
§ 2. Пространства, определяемые с помощью анализа Фурье	189
2.1. Основные обозначения	189
2.2. Кварковые разложения и фреймы всплесков	190
§ 3. Доказательство теоремы 1, дальнейшие комментарии	192
3.1. Доказательство теоремы 1	192
3.2. Свойство мультиразрешения	194
§ 4. Пространства на $\mathbb{R}^n$	194
4.1. Определение и основные утверждения	194
4.2. Свойства	197
§ 5. Пространства на множествах	199
5.1. Предварительные сведения, пространства последовательностей	199
5.2. Функциональные пространства	202
5.3. Свойства, комментарии, преобразования типа “снежинки”	203
Список литературы	205

§ 1. Введение и воспроизводящая формула

Теория классических пространств Никольского–Бесова B_{pq}^s , пространств Соболева W_p^s и пространств бесселевых потенциалов H_p^s положительной гладкости $s > 0$, в том виде, в котором она развита в [24], [23], [3], основана на теории L_p -пространств с $1 \leq p \leq \infty$, (дробных) производных и разностях функций. В этой статье мы описываем другой подход к пространствам типа B_{pq}^s и F_{pq}^s (также положительной гладкости $s > 0$), основанный на теории L_p -пространств с $0 < p \leq \infty$ и воспроизводящих формулах для гладких функций. Этот метод применим к $\mathbb{R}^n$, к областям в $\mathbb{R}^n$, замкнутым множествам в $\mathbb{R}^n$ и абстрактным квазиметрическим пространствам. Мы сравниваем результат с другими подходами.

Пусть k – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^n$ с носителем

$$\text{supp } k \subset \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 2^{J-\varepsilon}, y > 0\} \quad (1)$$

при некотором $\varepsilon > 0$ и $J \in \mathbb{N}$ (можно фиксировать значение $J = n$), и пусть

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} k(x - m) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Тогда

$$k^\beta(x) = (2^{-J}x)^\beta k(x) \geq 0, \quad \text{если } x \in \mathbb{R}^n \text{ и } \beta \in \mathbb{N}_0^n. \quad (3)$$

Пусть

$$k_{jm}^\beta(x) = k^\beta(2^j x - m), \quad \text{где } j \in \mathbb{N}_0 \text{ и } m \in \mathbb{Z}^n. \quad (4)$$

Пусть K – другая функция того же типа, удовлетворяющая условиям (1) и (2), и пусть K^β и K_{jm}^β – такие же, как в (3) и (4). Пусть $(f, g) = f(g)$, где $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ и $g \in S(\mathbb{R}^n)$.

ТЕОРЕМА 1. *Существуют такие универсальные функции $\Psi_{j,r;m,l}^{\beta,\gamma} \in S(\mathbb{R}^n)$ с $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$; $j \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{N}_0$; $m \in \mathbb{Z}^n$, $l \in \mathbb{Z}^n$, что для любой введенной выше пары функций k, K выполняется соотношение*

$$K_{rl}^\gamma(x) = \sum_{\beta, j \geq r, m} (K_{rl}^\gamma, \Psi_{j,r;m,l}^{\beta,\gamma}) k_{jm}^\beta(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

где ряд сходится безусловно в $S(\mathbb{R}^n)$. Для любых $\varkappa > 0$, $M > 0$, $b > 0$ существует такая положительная постоянная $c = c_{\varkappa, M, b}$ (зависящая от k и K), что

$$|(K_{rl}^\gamma, \Psi_{j,r;m,l}^{\beta,\gamma})| \leq c 2^{-\varepsilon|\gamma|} 2^{-\varkappa|\beta|} 2^{-(j-r)M} (1 + |m - 2^{j-r}l|)^{-b}. \quad (6)$$

Это выражение одной системы $\{K_{rl}^\gamma\}$ через другую систему $\{k_{jm}^\beta\}$ с помощью комплексных коэффициентов, удовлетворяющих условию (6), дает возможность ввести пространства

$$\mathfrak{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \text{ и } \mathfrak{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{для } s > 0, \quad 0 < p \leq \infty, \quad 0 < q \leq \infty \quad (7)$$

(с $p < \infty$ для $\mathfrak{F}$ -пространств) как подпространства в $L_p(\mathbb{R}^n)$ с помощью представлений

$$f = \sum_{\beta, j, m} \lambda_{jm}^\beta k_{jm}^\beta, \quad (8)$$

где $\{\lambda_{jm}^\beta\} \subset \mathbb{C}$ принадлежит некоторому пространству последовательностей. Это делается в § 4. Но сначала, в § 2, мы приводим сведения о (сейчас почти классических) пространствах $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ и $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$, определяемых с помощью анализа Фурье. На основе этих результатов мы доказываем теорему 1 в § 3. Затем показывается, что при $0 < p \leq \infty$ (при $p < \infty$ для F -пространств) и при $0 < q \leq \infty$ имеем

$$\mathfrak{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n) = B_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{при } s > \sigma_p = n\left(\frac{1}{p} - 1\right)_+ \quad (9)$$

и

$$\mathfrak{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n) = F_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{при } s > \sigma_{pq} = \left(\frac{1}{\min(p, q)} - 1\right)_+, \quad (10)$$

в то время как пространства $\mathfrak{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ и $\mathfrak{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ при $p < 1$ и $0 < s < \sigma_p$ (как подпространства $L_p(\mathbb{R}^n)$), с одной стороны, и $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ и $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ (как подпространства $S'(\mathbb{R}^n)$ (содержащие сингулярные распределения)), с другой стороны, не могут совпадать. Наконец, в §5 мы имеем дело с пространствами типа (7) на множествах в $\mathbb{R}^n$, главным образом на областях (= открытых множествах) Ω и на компактных множествах Γ , которые являются носителями конечных радоновских мер на $\mathbb{R}^n$. Мы снова сравниваем результат с пространствами, введенными другими средствами, и формулируем некоторые задачи, которые следует обсудить в дальнейшем.

§ 2. Пространства, определяемые с помощью анализа Фурье

2.1. Основные обозначения. Мы используем стандартные обозначения: $\mathbb{R}^n$ (евклидово n -мерное пространство), $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, $\mathbb{C}$ (комплексная плоскость), $\mathbb{Z}^n$ (решетка всех точек в $\mathbb{R}^n$ с целочисленными компонентами), $\mathbb{N}$ (натуральные числа), $\mathbb{N}_0$ (неотрицательные целые), $\mathbb{N}_0^n$ (мультииндексы), $x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$ (мономы с $x \in \mathbb{R}^n$ и $\beta \in \mathbb{N}_0^n$), $S(\mathbb{R}^n)$ (пространство Шварца), $S'(\mathbb{R}^n)$ (умеренные распределения), $\widehat{f} = Ff$ (преобразование Фурье функции $f \in S'(\mathbb{R}^n)$), $f^\vee = F^{-1}f$ (соответствующее обратное преобразование Фурье). Пусть

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 0 < p \leq \infty, \quad (11)$$

с очевидными изменениями для $p = \infty$. Мы предполагаем, что читатель знаком с основными утверждениями о пространствах $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ и $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$. Все необходимые (и более широкие) сведения можно найти в [27], [28], [35].

Пусть $\varphi_0 \in S(\mathbb{R}^n)$, где $\varphi_0(x) = 1$ при $|x| \leq 1$ и $\varphi_0(y) = 0$ при $|y| \geq 3/2$. Пусть

$$\varphi_k(x) = \varphi_0(2^{-k}x) - \varphi_0(2^{-k+1}x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

Тогда $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x) = 1$ – диалитическое разложение единицы и $(\varphi_j \widehat{f})^\vee(x)$ – целая аналитическая функция для любой функции $f \in S'(\mathbb{R}^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть последовательность $\varphi = \{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ такая же, как и выше. Пусть $0 < p \leq \infty$ (с $p < \infty$ для F -пространств), $0 < q \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$. Тогда $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ – семейство всех функций $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \|(\varphi_j \widehat{f})^\vee\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^q \right)^{1/q} < \infty,$$

и $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ – семейство всех функций $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)} = \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} |(\varphi_j \widehat{f})^\vee(\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $q = \infty$ нужны обычные в этом случае изменения. Далее, $L_p(\mathbb{R}^n)$ при $0 < p \leq \infty$ – обычные пространства, квазинормированные по формуле (11). Пространства $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ и $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ квазибанаховы, они не зависят от φ (квазинормы эквивалентны). По поводу частных случаев (классических соболевских пространств и соболевских пространств дробного порядка, классических пространств Никольского–Бесова, пространств Харди) см. упомянутую выше литературу. Заметим только, что

$$\mathcal{C}^\sigma(\mathbb{R}^n) = B_{\infty\infty}^\sigma(\mathbb{R}^n), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

– пространства Гёльдера–Зигмунда (продолженные в область $\sigma \leq 0$).

2.2. Кварковые разложения и фреймы всплесков. Пусть χ_{jm} , где $j \in \mathbb{N}_0$ и $m \in \mathbb{Z}^n$, – характеристические функции кубов Q_{jm} в $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными осям координат, с центрами в $2^{-j}m$ и с длинами сторон 2^{-j+1} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\varrho \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$, $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ и

$$\lambda = \{\lambda_{jm}^\beta \in \mathbb{C} : \beta \in \mathbb{N}_0^n, j \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Тогда

$$\|\lambda \mid b_{pq}^{s,\varrho}\| = \sup_{\beta \in \mathbb{N}_0^n} 2^{\varrho|\beta|} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(s-n/p)q} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\lambda_{jm}^\beta|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} \quad (14)$$

и

$$\|\lambda \mid f_{pq}^{s,\varrho}\| = \sup_{\beta \in \mathbb{N}_0^n} 2^{\varrho|\beta|} \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{jsq} |\lambda_{jm}^\beta|^q \chi_{jm}(\cdot) \right)^{1/q} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

с обычными изменениями при $p = \infty$ и/или $q = \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Соответствующие пространства последовательностей $b_{pq}^{s,\varrho}$ и $f_{pq}^{s,\varrho}$ играют определенную роль в теории кварковых разложений функциональных пространств. В частности, мы отсылаем читателя к §2 в [30]. По происхождению эти пространства связаны с атомическими разложениями пространств функций. Ссылки и пояснения можно найти в [28; §1] и [35; §1], а также в [29].

Опишем теперь основные составные части кварковых разложений пространств $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ и $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть ω – функция из C^∞ на $\mathbb{R}^n$ такая, что

$$\text{supp } \omega \subset (-\pi, \pi)^n, \quad \omega(x) = 1 \quad \text{при } |x| \leq 2.$$

Для $J \in \mathbb{N}$, как в (1)–(3), положим

$$\omega^\beta(x) = \frac{i^{|\beta|} 2^{J|\beta|}}{(2\pi)^n \beta!} x^\beta \omega(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{N}_0^n, \quad (15)$$

и

$$\Omega^\beta(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} (\omega^\beta)^\vee(m) e^{-imx}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Пусть φ_0 и φ_1 – такие же, как в (12). Тогда для $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ и $m \in \mathbb{Z}^n$ имеем

$$\begin{aligned} (\Phi_F^\beta)^\vee(\xi) &= \varphi_0(\xi) \Omega^\beta(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n, \\ (\Phi_M^\beta)^\vee(\xi) &= \varphi_1(\xi) \Omega^\beta(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (16)$$

и

$$\Phi_{jm}^\beta(x) = \begin{cases} \Phi_F^\beta(x - m), & \text{если } j = 0, \\ \Phi_M^\beta(2^j x - m), & \text{если } j \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Мы следовали [31] с небольшими изменениями в соответствии с [35; шп. 3.2.1 и 3.2.2]. Там же можно найти и дальнейшие пояснения. В частности,

$$\omega^\beta(x) = (2\pi)^{-n/2} \Omega^\beta(x), \quad \text{если } x \in (-\pi, \pi)^n. \quad (18)$$

Следовательно, Φ_F^β , Φ_M^β и Φ_{jm}^β – аналитические функции, принадлежащие $S(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, согласно замечанию 3.22 в [35], существует такая постоянная $c \geq 0$, что

$$|D^\alpha[\xi^\beta \omega(\xi)]| \leq c_K (1 + |\beta|)^{2K} 2^{c|\beta|} \quad (19)$$

для любых $K \in \mathbb{N}$, любых $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ с $|\alpha| \leq 2K$, любых $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ и некоторой постоянной c_K . И (18), и (19) будут нужны нам в дальнейшем. Эти неравенства могут быть также получены элементарными рассуждениями. Пусть σ_p и σ_{pq} – те же числа, что в (9) и (10). Пусть

$$\lambda_{jm}^\beta(f) = 2^{jn}(f, \Phi_{jm}^\beta) \quad \text{при } f \in S'(\mathbb{R}^n). \quad (20)$$

Пусть $\bar{p} = p$ при $1 \leq p \leq \infty$ и $\bar{p} = 1$ при $0 < p < 1$. Пусть $L_\infty(\mathbb{R}^n, w_\sigma)$ – очевидным образом нормированное пространство всех функций f , удовлетворяющих условию $w_\sigma f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, где $w_\sigma(x) = (1 + |x|^2)^{\sigma/2}$. В следующей теореме обсуждаются представления вида (8), где $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, $j \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{Z}^n$. В любом случае соответствующий ряд сходится абсолютно (и поэтому безусловно) в $L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^n)$ при $p < \infty$ и в $L_\infty(\mathbb{R}^n, w_\sigma)$ с $\sigma < 0$ при $p = \infty$. Это оправдывает запись и в (8), и в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 8. Пусть k_{jm}^β (те же, что в (1)–(4)) и Φ_{jm}^β (как в определении 6) – две фиксированные системы. Пусть $\varrho \geq 0$ и $0 < q \leq \infty$.

(i) Пусть $0 < p \leq \infty$ и $s > \sigma_p$. Тогда $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ является элементом $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ в том и только том случае, если f допускает представление в виде

$$f = \sum_{\beta, j, m} \lambda_{jm}^\beta k_{jm}^\beta, \quad \lambda \in b_{pq}^{s, \varrho}, \quad (21)$$

причем ряд абсолютно сходится в $L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^n)$ при $p < \infty$ и в $L_\infty(\mathbb{R}^n, w_\sigma)$, где $\sigma < 0$, при $p = \infty$. Кроме того,

$$\|f \mid B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)\| \sim \inf \|\lambda \mid b_{pq}^{s, \varrho}\|$$

– эквивалентные квазинормы, если нижняя грань берется по множеству всех допустимых представлений (21).

(ii) Пусть $0 < p < \infty$ и $s > \sigma_{pq}$. Тогда $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ является элементом $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ в том и только том случае, если f может быть представлена в виде

$$f = \sum_{\beta, j, m} \lambda_{jm}^\beta k_{jm}^\beta, \quad \lambda \in f_{pq}^{s, \varrho}, \quad (22)$$

причем ряд абсолютно сходится в $L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^n)$. Кроме того,

$$\|f \mid F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)\| \sim \inf \|\lambda \mid f_{pq}^{s, \varrho}\|$$

– эквивалентные квазинормы, где нижняя грань берется по множеству всех допустимых представлений (22).

(iii) Пусть $\lambda_{jm}^\beta(f)$ заданы формулой (20). Пусть $0 < p \leq \infty$ и $s > \sigma_p$. Тогда $f \in B_{pp}^s(\mathbb{R}^n)$ можно представить в виде

$$f = \sum_{\beta, j, m} \lambda_{jm}^\beta(f) k_{jm}^\beta, \quad (23)$$

причем ряд абсолютно сходится в $L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^n)$ при $p < \infty$ и в $L_\infty(\mathbb{R}^n, w_\sigma)$ для $\sigma < 0$ при $p = \infty$. Кроме того, $\lambda(f) \in b_{pp}^{s, \varrho}$ и

$$\|f\|_{B_{pp}^s(\mathbb{R}^n)} \sim \|\lambda(f)\|_{b_{pp}^{s, \varrho}} \quad (24)$$

(эквивалентные квазинормы).

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Утверждения (i) и (ii) – частные случаи более общих теорем о кварковых разложениях из [30; § 2], которые также приведены (без доказательств) в [35; § 1.6]. Утверждение (iii) содержится в [31] и [35; § 3.2.2]. Добавим два замечания. Во-первых, можно спросить, для всех ли пространств $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$, указанных в (i), и всех ли пространств $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$, указанных в (ii), существуют оптимальные базисные представления, как в (23), удовлетворяющие условиям (20) и (24). Это возможно установить, но требует некоторых дополнительных усилий. Сошлемся на [30; следствие 2.12]. Во-вторых, в вышеприведенных утверждениях о сходимости можно заменить $L_{\bar{p}}$ любым пространством

$$L_r \text{ с } p \leq r \leq \infty \text{ и } \frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{s}{n}.$$

Этот факт следует из хорошо известных вложений. Выбор $r = \bar{p} \geq 1$ проясняет, что все происходит в рамках пространства $S'(\mathbb{R}^n)$. Для наших дальнейших целей выбор $r = p$, и потому абсолютная сходимость в $L_p(\mathbb{R}^n)$ (с указанными изменениями при $p = \infty$), лучше приспособлен.

§ 3. Доказательство теоремы 1, дальнейшие комментарии

3.1. Доказательство теоремы 1.

Шаг 1. Докажем сначала утверждения (5) и (6) с $r = 0$ и $l = 0$. Напомним, что $K^\gamma(x) = (2^{-J}x)^\gamma K(x)$ с $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$. Согласно (23), (20) и (17), имеем

$$K^\gamma(x) = \sum_{\beta, j, m} \lambda_{jm}^\beta(K^\gamma) k_{jm}^\beta(x), \quad (25)$$

$$\lambda_{jm}^\beta(K^\gamma) = 2^{jn} \int_{\mathbb{R}^n} K^\gamma(y) \Phi_M^\beta(2^j y - m) dy \quad (26)$$

при $j \in \mathbb{N}$. Если $j = 0$, то здесь и в дальнейшем нужны соответствующие изменения. Пусть $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ с $|\alpha| \leq 2A$ при некотором $A \in \mathbb{N}$. Тогда из (16) следует (на основании (18), (15), (19) и формулы Стирлинга для $N!$), что

$$|D^\alpha(\Phi_M^\beta)^\vee(\xi)| \leq c_{A, \varkappa} 2^{-\varkappa|\beta|}$$

для любого $\varkappa > 0$ и любого $\beta \in \mathbb{N}_0^n$. Из свойств носителя функции φ_1 из (12) и стандартных утверждений о преобразовании Фурье следует, что, с одной стороны, для любого $b > 0$, любого $\varkappa > 0$ и любого $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ имеем

$$|\Phi_M^\beta(y)| \leq c_{b, \varkappa} 2^{-\varkappa|\beta|} (1 + |y|)^{-b}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (27)$$

и, с другой стороны,

$$(\Phi_M^\beta)^\vee(\xi) = |\xi|^{2L} \frac{\varphi_1(\xi)}{|\xi|^{2L}} \Omega^\beta(\xi) = |\xi|^{2L} \tilde{\Omega}^\beta(\xi)$$

для любого $L \in \mathbb{N}$, и поэтому

$$\Phi_M^\beta(y) = \Delta^L \tilde{\Phi}_M^\beta(y), \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

где Δ^L – L -я степень лапласиана Δ . Здесь $\tilde{\Phi}_M^\beta$ имеет те же свойства, что и Φ_M^β . В частности, формула (27) выполняется с $\tilde{\Phi}_M^\beta$ вместо Φ_M^β . Тогда, интегрируя по частям, видим, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta^L K^\gamma)(y) \tilde{\Phi}_M^\beta(2^j y - m) dy = 2^{2jL} \int_{\mathbb{R}^n} K^\gamma(y) \Phi_M^\beta(2^j y - m) dy.$$

Из (26) и (27) с $\tilde{\Phi}$ вместо Φ и свойств K^γ получаем

$$\begin{aligned} |\lambda_{jm}^\beta(K^\gamma)| &\leq c 2^{jn-2jL} 2^{-\varepsilon|\gamma|} 2^{-\varkappa|\beta|} \int_{|y| \leq 2^j} (1 + |2^j y - m|)^{-b} dy \\ &\leq c' 2^{j(n+b-2L)} 2^{-\varepsilon|\gamma|} 2^{-\varkappa|\beta|} (1 + |m|)^{-b}. \end{aligned} \quad (28)$$

Так как $b > 0$, то $L \in \mathbb{N}$ и $\varkappa > 0$ – в нашем распоряжении, а формулы (25) и (28) доказывают (5) и (6) с $r = 0$ и $l = 0$, и поэтому

$$|\lambda_{jm}^\gamma(K^\gamma)| \leq c 2^{-\varepsilon|\gamma|} 2^{-\varkappa|\beta|} 2^{-jM} (1 + |m|)^{-b}. \quad (29)$$

Шаг 2. Пусть $r = 0$ и $l \in \mathbb{Z}^n$. Тогда из (25) следует, что

$$K_{0,l}^\gamma(x) = K^\gamma(x - l) = \sum_{\beta, j, m} \lambda_{jm}^\beta(K^\gamma) k_{j, m+2^j l}^\beta(x) = \sum_{\beta, j, m} \nu_{jm}^\beta(K_{0,l}^\gamma) k_{jm}^\beta(x) \quad (30)$$

с $\nu_{jm}^\beta(K_{0,l}^\gamma) = \lambda_{j, m-2^j l}^\beta(K^\gamma)$. Из (29) получаем

$$|\nu_{jm}^\beta(K_{0,l}^\gamma)| \leq c 2^{-\varepsilon|\gamma|} 2^{-\varkappa|\beta|} 2^{-jM} (1 + |m - 2^j l|)^{-b}, \quad (31)$$

откуда следует (6) с $r = 0$. Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{Z}^n$. Тогда из (30) выводим

$$K_{r,l}^\gamma(x) = K^\gamma(2^r x - l) = \sum_{\beta, j, m} \nu_{jm}^\beta(K_{0,l}^\gamma) k_{j+r, m}^\beta(x) = \sum_{\beta, j \geq r, m} \mu_{jm}^\beta(K_{r,l}^\gamma) k_{jm}^\beta(x) \quad (32)$$

с $\mu_{jm}^\beta(K_{r,l}^\gamma) = \nu_{j-r, m}^\beta(K_{0,l}^\gamma)$. Из (31) получаем (6).

Шаг 3. Согласно (20) и приведенному выше сдвигу в индексах из $\mathbb{Z}^n$ и $\mathbb{N}_0$, коэффициенты $\mu_{jm}^\beta(K_{r,l}^\gamma)$ в (32) можно представить в виде (5) с некоторыми $\Psi_{j,r;m,l}^{\beta,\gamma} \in S(\mathbb{R}^n)$, которые можно вычислить явно. Согласно (5), (6) и свойствам k_{jm}^β , ряд в (5) сходится в норме

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq L} (1 + |x|^2)^{\sigma/2} |D^\alpha g(x)|$$

с любыми $\sigma > 0$ и $L \in \mathbb{N}$. Следовательно, ряд (5) сходится безусловно в $S(\mathbb{R}^n)$.

3.2. Свойство мультиразрешения.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Возникает вопрос: какие свойства функций k и K в теореме 1 действительно нужны, чтобы получить утверждение типа (5), (6)? Что касается k , то и вышеприведенные рассуждения, и базисное представление в теореме 8 (iii) справедливы для любого разложения единицы с условием (2), основанного на финитной бесконечно дифференцируемой функции k на $\mathbb{R}^n$. (Некоторые технические изменения при этом необходимы.) Что же касается K , то мы используем только тот факт, что K – финитная бесконечно дифференцируемая функция. Но C^∞ -условие можно ослабить до C^N -условия, а условие, что K – финитная функция, до соответствующего условия достаточно быстрого убывания K (в зависимости от имеющихся в виду приложений).

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Недавно развитая теория ортогональных базисов всплесков, скажем, в $L_2(\mathbb{R})$, обычно основывается на так называемом *анализе мультиразложений* с типичным утверждением

$$\Phi(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \Phi(2x - m), \quad x \in \mathbb{R},$$

для масштабирующей функции Φ , где a_m – подходящие комплексные числа (см., например, [37]). По теореме 1 и в силу высказанных выше замечаний получаем следующее дополнение.

СЛЕДСТВИЕ 12. Пусть k – финитная бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^n$, порождающая разложение единицы (2). Пусть $k_\beta(x) = x^\beta k(x)$, где $\beta \in \mathbb{N}_0^n$. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Тогда существуют такие комплексные числа λ_{jm}^β , что

$$k(x) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n} \sum_{j=N}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \lambda_{jm}^\beta k_\beta(2^j x - m), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где ряд безусловно сходится в $S(\mathbb{R}^n)$. Для любых $\varkappa > 0$, $M > 0$ и $b > 0$ существует положительная постоянная $c = c_{\varkappa, M, b}$ (зависящая от k и N) такая, что

$$|\lambda_{jm}^\beta| \leq c 2^{-\varkappa|\beta|} 2^{-jM} (1 + |m|)^{-b}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует из рассуждений, примененных на шаге 1 в п.3.1, комментариев в замечании 10 и формулы (29).

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Можно говорить о *свойстве мультиразрешения*, если грубые сетки $k(x - m)$ или $k^\beta(x - m)$ можно заменить более тонкими сетками k_{jm}^β , $j \in \mathbb{N}$, порожденными той же функцией k .

§ 4. Пространства на $\mathbb{R}^n$

4.1. Определение и основные утверждения. Теорема 1 – краеугольный камень всего последующего изложения. Пространства последовательностей $b_{pq}^{s, \varrho}$ и $f_{pq}^{s, \varrho}$ имеют здесь тот же смысл, что в определении 4 и замечании 5. Кроме того, $L_p(\mathbb{R}^n)$ – обычные лебеговские пространства, квазинормированные по формуле (11), и $L_\infty(\mathbb{R}^n, w_\sigma)$ определено в замечании 7.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Пусть k – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию (1) при некотором $J \in \mathbb{N}$ (мы можем фиксировать $J = n$) и условию (2). Пусть k_{jm}^β как в (4). Пусть $\varrho \geq 0$, $0 < q \leq \infty$ и $s > 0$.

(i) Пусть $0 < p \leq \infty$. Тогда $\mathfrak{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ – семейство всех функций $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, которые могут быть представлены в виде

$$f = \sum_{\beta, j, m} \lambda_{jm}^\beta k_{jm}^\beta, \quad \lambda \in b_{pq}^{s, \varrho}, \quad (33)$$

и ряд абсолютно сходится в $L_p(\mathbb{R}^n)$ при $p < \infty$ и в $L_\infty(\mathbb{R}^n, w_\sigma)$ для $\sigma < 0$ при $p = \infty$. Пусть

$$\|f\|_{\mathfrak{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)} = \inf \|\lambda\|_{b_{pq}^{s, \varrho}},$$

где нижняя грань берется по всем допустимым представлениям функции f в виде (33).

(ii) Пусть $0 < p < \infty$. Тогда $\mathfrak{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ – семейство всех функций $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, которые могут быть представлены в виде

$$f = \sum_{\beta, j, m} \lambda_{jm}^\beta k_{jm}^\beta, \quad \lambda \in f_{pq}^{s, \varrho}, \quad (34)$$

и ряд абсолютно сходится в $L_p(\mathbb{R}^n)$. Пусть

$$\|f\|_{\mathfrak{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)} = \inf \|\lambda\|_{f_{pq}^{s, \varrho}},$$

где нижняя грань берется по всем допустимым представлениям функции f в виде (34).

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Чтобы избежать недопонимания, заметим, что абсолютная сходимость ряда (33) вытекает из условия $\lambda \in b_{pq}^{s, \varrho}$ и не является дополнительным требованием. Ситуация с рядом (34) аналогична.

ТЕОРЕМА 16. Введенные выше пространства $\mathfrak{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ и $\mathfrak{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ являются квазибанаховыми. Они не зависят от ϱ и k (квазинормы эквивалентны). Кроме того, для всех допустимых s, p и q имеем

$$\mathfrak{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_p(\mathbb{R}^n), \quad \mathfrak{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_p(\mathbb{R}^n), \quad (35)$$

и

$$\mathfrak{B}_{p, \min(p, q)}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathfrak{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathfrak{B}_{p, \max(p, q)}^s(\mathbb{R}^n). \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Пусть $\varrho \geq 0$ фиксировано. Непрерывное вложение (36) следует из соответствующего включения для самих пространств последовательностей [29; с. 75, предложение 13.6]. Докажем наличие непрерывных вложений (35). Согласно (36), достаточно обсудить первое включение. Пусть $0 < p \leq 1$ (иначе нужны соответствующие изменения). Тогда из (1), (3) и (14) следует, что

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\beta, j, m} \lambda_{jm}^\beta k_{jm}^\beta \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}^p &\leq \sum_{\beta, j} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_m \lambda_{jm}^\beta k_{jm}^\beta(2^j x - m) \right|^p dx \\ &\leq c \sum_{\beta, j} 2^{-jn} 2^{-\varepsilon|\beta|p} \sum_m |\lambda_{jm}^\beta|^p \leq c' \sum_{\beta, j} 2^{-\varepsilon|\beta|p - js p}. \end{aligned} \quad (37)$$

Это доказывает (35) (мы использовали тот факт, что $\varepsilon > 0$ и $s > 0$). Тогда из стандартных рассуждений следует, что $\mathfrak{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ и $\mathfrak{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ – квазибанаховы пространства.

Шаг 2. Остается доказать независимость результата от ϱ и k . Обсудим сначала случай $\mathfrak{B}$ -пространств. Предположим, что f задана вариантом формулы (33) с K вместо k , где K имеет тот же смысл, что и в теореме 1. Тогда

$$f(x) = \sum_{\gamma, r, l} \nu_{rl}^\gamma K_{rl}^\gamma(x), \quad \nu \in b_{pq}^{s, \varrho}. \quad (38)$$

Подставляя (5), переформулированное как (32), в (38), получаем

$$f(x) = \sum_{\beta, j, m} \lambda_{jm}^\beta k_{jm}^\beta(x),$$

где

$$\lambda_{jm}^\beta = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^n} \sum_{r=0}^j \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \nu_{rl}^\gamma \cdot \mu_{jm}^\beta(K_{rl}^\gamma). \quad (39)$$

Пусть $\nu_{rl}^\gamma = 0$, если $r < 0$, и $t = j - r$. Тогда из (6) (с μ -коэффициентами в левой части) вытекает, что

$$\begin{aligned} & 2^{j(s-n/p)} 2^{\kappa|\beta|} |\lambda_{jm}^\beta| \\ & \leq c \sum_{\gamma} 2^{-\varepsilon|\gamma|} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} 2^{(j-t)(s-n/p)} |\nu_{j-t,l}^\gamma| 2^{-tM'} (1 + |m - 2^t l|)^{-b} \\ & \leq c' \sum_{\gamma} 2^{-\varepsilon|\gamma|} \left(\sum_{t,l} 2^{(j-t)(s-n/p)p} |\nu_{j-t,l}^\gamma|^p 2^{-tM''p} (1 + |m - 2^t l|)^{-b'p} \right)^{1/p}, \quad (40) \end{aligned}$$

где $\kappa > 0$, $M'' > 0$ и $b' > 0$ — в нашем распоряжении. Возьмем ℓ_p -квазинорму относительно $m \in \mathbb{Z}^n$. Соответствующие множители в правой части (40) можно оценить независимо от $2^t l$ (если выбрать $b' > 0$ достаточно большим). Тогда суммирование по $l \in \mathbb{Z}^n$ дает требуемые ℓ_p -блоки для $\nu_{j-t,l}^\gamma$ -коэффициентов. Затем можно сделать то же самое относительно ℓ_q и суммирования относительно j за счет $M'' > 0$. Так как $\varepsilon > 0$, то

$$\|\lambda \mid b_{pq}^{s,\kappa}\| \leq c \|\nu \mid b_{pq}^{s,0}\| \leq c \|\nu \mid b_{pq}^{s,\varrho}\| \quad (41)$$

для любого $\varrho \geq 0$ и любого $\kappa \geq 0$. Это доказывает независимость пространств $\mathfrak{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ и от ϱ , и от k .

Шаг 3. Докажем, что $\mathfrak{F}$ -пространства не зависят от ϱ и k . Нам нужна некоторая подготовка. Напомним, что для любой локально интегрируемой функции g на $\mathbb{R}^n$ функция

$$(Mg)(x) = \sup_Q |Q|^{-1} \int_Q |g(y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (42)$$

где верхняя грань берется по всем кубам Q с центром в x , называется максимальной функцией Харди–Литлвуда. Пусть $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ и $0 < w < \min(p, q)$. Тогда существует такая постоянная c , что

$$\left\| \left(\sum_{j,m} (M|g_{jm}|^w)(\cdot)^{q/w} \right)^{1/q} \mid L_p(\mathbb{R}^n) \right\| \leq c \left\| \left(\sum_{j,m} |g_{jm}(\cdot)|^q \right)^{1/q} \mid L_p(\mathbb{R}^n) \right\| \quad (43)$$

для всех функций g_{jm} рассматриваемого класса с $j \in \mathbb{N}_0$ и $m \in \mathbb{Z}^n$. Это векторнозначное “максимальное неравенство” восходит к [11]. Короткое доказательство приведено в [26; с. 303–305]. По поводу применения неравенства (43) в контексте F -пространств и дальнейших ссылок мы отсылаем читателя к [28; с. 89], и [29; с. 79]. Теперь нам нужна следующая подготовка. Пусть χ_r — характеристическая функция куба со стороной 2^{-r} при $r \in \mathbb{N}_0$ и центром в начале координат. Тогда из (42) следует неравенство

$$(M\chi_r)(x) \geq c \min[1, 2^{-rn}|x|^{-n}], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (44)$$

для некоторого $c > 0$ (не зависящего от r). Сравним χ_{jm} с $M\chi_{rl}$, как это требуется в (39), в связи с $f_{pq}^{s,\varrho}$ (в соответствии с определением 4). В частности, $r \leq j$. Тогда для $x = 2^{-j}m$ из (44) получаем

$$(M\chi_{rl})(x)^{1/w} \geq c \min[1, (2^{-rn} |2^{-j}m - 2^{-r}l|^{-n})^{1/w}] \geq c[1, |m - 2^{j-r}l|^{-n/w}]. \quad (45)$$

Эта оценка остается справедливой для всех $x \in \mathbb{R}^n$ с $\chi_{jm}(x) = 1$ в левой части формулы (45) и той же правой частью. При $t = j - r$ получаем

$$\chi_{jm}(x) \leq c' (1 + |m - 2^t l|)^{n/w} (M\chi_{j-t,l})(x)^{1/w}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (46)$$

Умножим (39) на $\chi_{jm}(x)$ и применим (46). Так как $b > 0$ в (40) находится в нашем распоряжении, мы приходим к варианту формулы (41) с q вместо p . Применяя (43), получаем f -вариант формулы (41). Это завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Тот факт, что ϱ в определении 14 и теореме 16 можно взять сколь угодно большим (эквивалентные квазинормы), выглядит почти *черной магией*. Это следует из (40) и, как следствие, из (41) с $\varkappa = \varrho$. Для лучшего понимания можно выяснить зависимость величины c в (6) от $\varkappa = \varrho$, что, в свою очередь, непосредственно влияет на постоянные в эквивалентных квазинормах для различных значений ϱ . В несколько ином, но близком контексте мы оцениваем соответствующие постоянные в [30; (2.81), с. 23]. Это наводит на мысль, что c в (6) можно заменить на $c_1 2^{c_2 \varkappa}$, где $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ не зависят от $\varkappa$. Следовательно, цена, которую нужно заплатить за быстрое убывание $2^{-\varkappa|\beta|}$ – это экспоненциально взрывающиеся постоянные $c_1 2^{c_2 \varkappa}$.

4.2. Свойства. Пусть σ_p и σ_{pq} те же, что в (9) и (10).

ТЕОРЕМА 18. Пусть $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ и $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ – те же, что в определении 2, и пусть $\mathfrak{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ и $\mathfrak{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ – те же, что в определении 14. Тогда

$$B_{pq}^s(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{при} \quad s > \sigma_p \quad (47)$$

и

$$F_{pq}^s(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{при} \quad s > \sigma_{pq}, \quad (48)$$

если их интерпретировать как подпространства в $S'(\mathbb{R}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это непосредственно следует из теоремы 8 и замечания 9.

ЗАМЕЧАНИЕ 19. По теореме 8 и замечанию 9, базисные представления (23) и (20) имеют место для всех пространств в предыдущей теореме. Но неясно, имеет ли место соответствующее свойство для $\mathfrak{B}$ - и $\mathfrak{F}$ -пространств, не рассматриваемых в предыдущей теореме. Если $0 < s < \sigma_p$ (и потому $p < 1$), то ничего подобного формулам (47) и (48) ожидать нельзя. В этом случае пространства $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ и $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ содержат сингулярные распределения, например, δ -функцию, в то время как $\mathfrak{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ и $\mathfrak{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ – подмножества $L_p(\mathbb{R}^n)$. Но есть и другая возможность. Пусть

$$(\Delta_h^1 f)(x) = f(x+h) - f(x), \quad \Delta_h^{l+1} = \Delta_h^1 \Delta_h^l,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^n$ и $l \in \mathbb{N}$, и пусть

$$\omega_m(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^m f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad 0 < t < \infty,$$

– обычный модуль непрерывности. Пусть $s > 0$, $0 < p \leq \infty$ и $0 < q \leq \infty$. Пусть $s < m \in \mathbb{N}$. Тогда, по определению, $\mathbf{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ – это семейство всех $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \left(\int_0^1 t^{-sq} \omega_m(f, t)_p^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \quad (49)$$

(с обычными изменениями при $q = \infty$). Эти пространства не зависят от m (квазинормы эквивалентны); см. [8; гл. 2, §10]. Интерес к этим пространствам вызван теорией приближений и численным анализом; см. [25] и [9]. Кроме того, можно дополнить формулу (47) следующим образом:

$$B_{pq}^s(\mathbb{R}^n) = \mathbf{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{при } 0 < p \leq \infty, 0 < q \leq \infty, s > \sigma_p,$$

см. [28; §2.6.1]. В любом случае пространства $\mathbf{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ являются подпространствами $L_p(\mathbb{R}^n)$, и можно задать вопрос, верно ли, что

$$\mathfrak{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n) = \mathbf{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{при } 0 < p \leq \infty, 0 < q \leq \infty, s > 0. \quad (50)$$

Для $\mathfrak{F}$ -пространств также есть хороший кандидат на F -часть в (50). Ю.В. Нетрусов [22] дополнил шкалу $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ пространствами $\mathbf{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n) = FL_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ с $s > 0$, $0 < p < \infty$ и $0 < q \leq \infty$, как подпространствами в $L_p(\mathbb{R}^n)$. В этой связи мы также упомянем недавнюю существенную работу [18], продолжающую [22] и [1; §10], и особенно теорему 1.1.14 в [18]. Там можно найти характеристики пространств $\mathbf{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ из $\mathbf{F}$ -аналога формулы (49) и в терминах атомов, и с помощью разностей. Хотя некоторые детали нуждаются в проверке, ясно, что одновременно выполняется и соотношение (50), и равенство

$$\mathfrak{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n) = \mathbf{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{при } 0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty, s > 0. \quad (51)$$

В одну сторону это следует из наблюдения, что кварковое представление, в соответствии с определением 14, можно конвертировать в атомическое разложение в соответствии с [22], [18]. Для доказательства обратного утверждения можно применить воспроизводящую формулу (5) к любому атому (где теперь $\gamma = 0$) и рассуждать как в доказательстве теоремы 16. Учитывая упомянутую характеристику в терминах разностей, мы получаем и (51), и (50).

ЗАМЕЧАНИЕ 20. Для пространств $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ с $s > \sigma_{pq}$ имеет место формула (48) и характеристика в терминах разностей, [28; теорема 3.5.3, с. 194]. В недавней работе [7] указано, что нельзя ожидать такой характеристики в терминах средних значений разностей, если $\sigma_p < s < \sigma_{pq}$ (и поэтому $0 < q < p$). Можно также учесть формулировки в [35] (§1.11.8, теорема 1.116 и замечание 1.117). В сочетании с теоремой 3.14 в [18], этот факт подсказывает, что

$$\mathbf{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \neq F_{pq}^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{при } 0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty, 0 < s < \sigma_{pq} \quad (52)$$

(как подпространства в $L_p(\mathbb{R}^n)$ или – если также $s > \sigma_p$ – как подпространства в $S'(\mathbb{R}^n)$). Конечно, $0 < q < p < \infty$ и $\sigma_p < s < \sigma_{pq}$ – наиболее поразительный случай в (52). Сравнивая атомические разложения для $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ (см. [22], [12], [13]) с соответствующими разложениями для $\mathbf{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ (см. [22] и [18; теорема 1.1.14]), автоматически получаем, что обычные условия сокращения для атомов в $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ при $s < \sigma_{pq}$ необходимы. В этой связи можно также отметить [35; §1.5, теорема 1.19 и замечание 1.20]. Это решает давно стоявшую проблему.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. Говорят, что пространство $A(\mathbb{R}^n)$, соответствующее определению 2 или определению 14, называется обладает свойством положительности, если любой элемент $f \in A(\mathbb{R}^n)$ допускает разложение

$$f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4 \quad \text{с} \quad f_l \geq 0, \quad f_l \in A(\mathbb{R}^n),$$

и

$$\|f\|_{A(\mathbb{R}^n)} \sim \sum_{l=1}^4 \|f_l\|_{A(\mathbb{R}^n)},$$

где константы эквивалентности не зависят от f .

ЗАМЕЧАНИЕ 22. Напомним, что условие $f \geq 0$ для $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ означает, что $f(\varphi) \geq 0$ для любой вещественной неотрицательной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

ТЕОРЕМА 23. Все пространства $\mathfrak{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ и $\mathfrak{F}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$, введенные в определении 14, имеют свойство положительности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разлагая $\lambda_{jm}^\beta \in \mathbb{C}$ в (33), мы немедленно получаем это утверждение, поскольку $k_{jm}^\beta \geq 0$ согласно (3) и (4).

ЗАМЕЧАНИЕ 24. В частности, все пространства $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ в (47) и все пространства $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ в (48) имеют свойство положительности. Этот факт известен, см. [33] и [35; §3.3.2], где можно также найти дальнейшие утверждения этого типа. В частности, пространства $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ и $F_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ с $0 < p \leq \infty$ ($p < \infty$ для F -пространств), с $0 < q \leq \infty$ и $-\infty < s < \sigma_p$ не имеют свойства положительности. Отсюда следует, что эти пространства не имеют представления из теоремы 8 (i), (ii).

§ 5. Пространства на множествах

5.1. Предварительные сведения, пространства последовательностей.

Определение 4 для пространств последовательностей и определение 14 для функциональных пространств могут быть распространены на случай множеств M в $\mathbb{R}^n$. Два случая представляют особый интерес. Во-первых, случай, когда $M = \Omega$ – область (= открытое множество) в $\mathbb{R}^n$, и, во-вторых, случай, когда $M = \Gamma$ – компактное множество (= фрактал) в $\mathbb{R}^n$. Что касается пространств $\mathfrak{B}_{pq}^s(M)$ и $\mathfrak{F}_{pq}^s(M)$, то всегда нужна соответствующая версия формулы (35). В случае $M = \Omega$ получаем пространство $L_p(\Omega)$, естественно квазинормированное по формуле

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 0 < p \leq \infty,$$

с очевидными изменениями при $p = \infty$. Если Γ – компактное множество в $\mathbb{R}^n$, то есть искушение воспользоваться замечательным наблюдением [36], что существует радонова мера μ в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию удвоения, такая, что

$$\text{supp } \mu = \Gamma \text{ компактен,} \quad 0 < \mu(\Gamma) < \infty. \quad (53)$$

Но у нас другая точка зрения. Мы предпочитаем такие радоновы меры на $\mathbb{R}^n$ (удовлетворяющие или не удовлетворяющие условию удвоения), что их носитель Γ в смысле (53) компактен. Можно спросить, каким пространствам $B_{pq}^s(\mathbb{R}^n)$ принадлежат такие меры. Это приводит к довольно точному “отпечатку пальца” меры μ , так называемой *характеристике Бесова*. Мы подробно изучали ее в [35] и в статьях, там цитируемых. Хотя эта характеристика могла бы быть полезна в контексте настоящей

статьи, мы ограничимся более грубым случаем, оставляя более тонкие исследования до дальнейших публикаций.

Предположим снова, что Q_{jm} , где $j \in \mathbb{N}_0$ и $m \in \mathbb{Z}^n$, – введенные выше кубы со сторонами, параллельными координатным осям, с центрами в точках вида $2^{-j}m$ и с длинами сторон 2^{-j+1} . Напомним, что $\mathcal{C}^\sigma(\mathbb{R}^n)$ – пространства Гёльдера–Зигмунда (см. (13)). Тогда $\mu \in \mathcal{C}^{-n}(\mathbb{R}^n)$ для любой радоновой меры μ , удовлетворяющей условию (53). Это утверждение можно уточнить следующим образом. Пусть

$$0 < \sigma \leq n \text{ и } \mu_j = \sup_{m \in \mathbb{Z}^n} \mu(Q_{jm}), \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (54)$$

Тогда

$$\mu \in \mathcal{C}^{-\sigma}(\mathbb{R}^n) \iff \sup_j 2^{j(n-\sigma)} \mu_j < \infty. \quad (55)$$

Мы ссылаемся на [32] или [35; § 1.12]. При $M \subset \mathbb{R}^n$ (либо область Ω , либо компактное множество Γ) мы используем сокращение

$$\sum_m^{M,j} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n, Q_{jm} \cap M \neq \emptyset}, \quad \text{где } j \in \mathbb{N}_0.$$

Как и выше, χ_{jm} – характеристическая функция Q_{jm} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. Пусть $\varrho \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$, $0 < p \leq \infty$ и $0 < q \leq \infty$. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ и

$$\lambda = \{\lambda_{jm}^\beta \in \mathbb{C} : \beta \in \mathbb{N}_0^n, j \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}^n \text{ и } Q_{jm} \cap M \neq \emptyset\}.$$

Тогда

$$\|\lambda \mid b_{pq}^{s,\varrho}(M)\| = \sup_{\beta \in \mathbb{N}_0^n} 2^{\varrho|\beta|} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(s-n/p)q} \left(\sum_m^{M,j} |\lambda_{jm}^\beta|^p \right)^{q/p} \right)^{1/q} \quad (56)$$

и

$$\|\lambda \mid f_{pq}^{s,\varrho}(M)\| = \sup_{\beta \in \mathbb{N}_0^n} 2^{\varrho|\beta|} \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_m^{M,j} 2^{jsq} |\lambda_{jm}^\beta|^q \chi_{jm}(\cdot) \right)^{1/q} \mid L_p(\mathbb{R}^n) \right\| \quad (57)$$

с обычными изменениями при $p = \infty$ и/или $q = \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 26. Определение 25 – вариант определения 4. Обозначим соответствующие пространства последовательностей через $b_{pq}^{s,\varrho}(M)$ и $f_{pq}^{s,\varrho}(M)$. Возникают некоторые вопросы, особенно в связи с (57). Заметим сначала, что

$$b_{pp}^{s,\varrho}(M) = f_{pp}^{s,\varrho}(M), \quad 0 < p \leq \infty.$$

Можно спросить, что случится, если заменить пространство $L_p(\mathbb{R}^n)$ пространством $L_p(\Gamma, \mu)$, квазинормированным по формуле

$$\|f \mid L_p(\Gamma, \mu)\| = \left(\int_{\Gamma} |f(\gamma)|^p \mu(d\gamma) \right)^{1/p}, \quad (58)$$

если $M = \Gamma$ при условии (53). В случае, когда $M = \Omega$, мы рассматриваем (58) для $L_p(\Omega)$ с лебеговой мерой $\mu(dx) = dx$ вместо μ . Напомним, что радонова мера μ

на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию (53), называется *изотропной*, если существует такая непрерывная строго возрастающая функция h на промежутке $[0, 1]$, что $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ и

$$\mu(B(\gamma, r)) \sim h(r) \quad \text{при } \gamma \in \Gamma \text{ и } 0 < r < 1, \quad (59)$$

где $B(\gamma, r)$ – шар с центром в γ и радиусом r . Тогда Γ называется h -множеством. Частный случай $h(r) = r^d$ с $0 \leq d \leq n$ приводит к d -множествам, и $\mu = \mathcal{H}^d|_{\Gamma}$ – ограниченное хаусдорфовой меры $\mathcal{H}^d$ в $\mathbb{R}^n$ на Γ . Детальное изучение h -множеств можно найти в [4] и [5]. Пусть $f_{pq}^{s, \varrho, \mu}$ – пространства, определенные формулой (57) с $L_p(\Gamma, \mu)$ вместо $L_p(\mathbb{R}^n)$. Пусть Γ есть d -множество с $0 < d < n$. Тогда

$$f_{pp}^{s, \varrho, \mu} = f_{pp}^{\sigma, \varrho}(\Gamma) = b_{pp}^{\sigma, \varrho}(\Gamma), \quad 0 < p < \infty, \quad s = \sigma - \frac{n}{p} + \frac{d}{p}. \quad (60)$$

Наметим доказательство этого утверждения. Из (43) и (44) следует, что характеристические функции χ_{jm} кубов Q_{jm} , $Q_{jm} \cap \Gamma \neq \emptyset$, в формуле (57) можно заменить характеристическими функциями шаров с центрами в точках множества Γ и с радиусами $\sim 2^{-j}$, покрывающими Γ и с попарными расстояниями $\geq 2^{-j}$. Тогда формула (60) следует из (59) при $h(r) = r^d$. Если $p \neq q$, то пространства $f_{pq}^{s, \varrho}(\Gamma)$ и $f_{pq}^{s, \varrho, \mu}$ могут быть не связаны между собой. Тем не менее, в случае изотропных мер μ пространства $f_{pq}^{s, \varrho, \mu}$, определяемые внутренним образом, могут оказаться лучшим выбором, когда речь идет об определении соответствующих $\mathfrak{F}$ -пространств. Может также существовать и соответствующий аналог векторнозначного максимального неравенства (43), указывающий путь к соответствующей теории для $\mathfrak{F}$ -пространств, параллельной приведенным выше рассмотрениям в $\mathbb{R}^n$. В случае d -множеств такое максимальное неравенство было использовано в [16; с. 80–81]. Если μ неизотропна и не имеет свойства удвоения, то пространства $f_{pq}^{s, \varrho}(\Gamma)$ и $f_{pq}^{s, \varrho, \mu}$ (и даже пространства $b_{pq}^{s, \varrho}(\Gamma)$ и (подходящим образом определенное) $b_{pq}^{s, \varrho, \mu}$) выглядят не связанными между собой. Мы придерживаемся здесь пространств из определения 25, добавляя некоторые утверждения, связанные с геометрией множества M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. (i) Область Ω в $\mathbb{R}^n$ называется областью с *регулярной внутренностью*, если существует такое положительное число c , что $|\Omega \cap B| \geq c|B|$ для любого шара с центром в $\partial\Omega$ и радиусом, меньшим 1.

(ii) Компактное множество Γ в $\mathbb{R}^n$ называется *пористым*, если существует такое η , $0 < \eta < 1$, что для любого шара $B(x, r)$ с центром в $x \in \mathbb{R}^n$ и с радиусом $0 < r < 1$ существует шар $B(y, \eta r)$, удовлетворяющий условиям

$$B(y, \eta r) \subset B(x, r) \quad \text{и} \quad B(y, \eta r) \cap \Gamma = \emptyset. \quad (61)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 28. Регулярность внутренности области играет роль в связи с атомическим разложением функциональных пространств в негладких областях, см. [10; с. 59]. Пористость возникает из фрактальной геометрии, см. [21; с. 156–158]. Мы использовали это свойство, называемое также *условием шаров*, в [30; с. 138–141] в связи с функциональными пространствами на фракталах. Там найдена характеристика того, что данное h -множество Γ – пористое. В частности, любое d -множество с $d < n$ – пористое. Кроме того, если Γ – пористое, то $|\Gamma| = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 29. (i) Пусть Ω – область с регулярной внутренностью в $\mathbb{R}^n$, и пусть $\tilde{\chi}_{jm}^\Omega$ – характеристическая функция пересечения $\tilde{Q}_{jm} \cap \Omega$, где $\tilde{Q}_{jm}$ – куб с центром в $2^{-j}m$ и с длиной стороны 2^{-j+2} . Пусть $p < \infty$. Тогда правая часть формулы (57) с $\tilde{\chi}_{jm}^\Omega$ вместо χ_{jm} эквивалентна квазинорме в (57) (внутренняя характеристикация).

(ii) Пусть $p < \infty$ и Γ – компактное пористое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда $f_{pq}^{s,\varrho}(\Gamma)$ не зависит от q и, в частности,

$$f_{pq}^{s,\varrho}(\Gamma) = b_{pp}^{s,\varrho}(\Gamma). \quad (62)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Часть (i) следует из (43) и (44). Что касается части (ii), заметим сначала, что кубы Q_{jm} можно заменить, снова в силу (43) и (44), шарами радиуса 2^{-j} с центрами в Γ на попарных расстояниях $\geq 2^{-j}$. Для любого такого шара можно выбрать подшар в соответствии с (61), радиуса $\eta 2^{-j}$, причем можно дополнительно предположить, что расстояние от каждого подшара до Γ не меньше $c 2^{-j}$ при некотором $c > 0$. Тогда все эти подшары имеют управляемые пересечения, и можно даже предполагать, что все эти подшары имеют попарно непересекающиеся носители. Это доказывает (62).

ЗАМЕЧАНИЕ 30. В частности, если Ω имеет регулярную внутренность, то функции χ_{jm} в (57) можно заменить на $\tilde{\chi}_{jm}$ (на характеристические функции кубов $\tilde{Q}_{jm}$) и пространство $L_p(\mathbb{R}^n)$ на $L_p(\Omega)$ (квазинормы эквивалентны).

5.2. Функциональные пространства. Здесь множество M снова является либо областью Ω в $\mathbb{R}^n$, либо компактным множеством Γ – носителем меры μ , удовлетворяющей условиям (53)–(55). Для унификации обозначений положим $L_p(\Omega) = L_p(M, \mu)$, если $M = \Omega$ – область. Если область Ω неограничена, то символом $L_\infty(\Omega, w_\sigma)$ обозначим семейство всех f с $w_\sigma f \in L_\infty(\Omega)$, где $w_\sigma(x) = (1 + |x|^2)^{\sigma/2}$. Пусть k_{jm}^β – те же функции, что и в определении 14. Кроме того, $b_{pq}^{s,\varrho}(M)$ и $f_{pq}^{s,\varrho}(M)$ имеют тот же смысл, что и в определении 25 и замечании 26.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31. Пусть $0 < p \leq \infty$ ($p < \infty$ для $\mathfrak{F}$ -пространств), $0 < q \leq \infty$ и $\varrho \geq 0$. Пусть либо

$$M = \Omega \text{ – область в } \mathbb{R}^n \text{ и } s > 0$$

либо

$$M = \Gamma \text{ с } \mu \in \mathcal{C}^{-\sigma}(\mathbb{R}^n), \quad 0 < \sigma \leq n, \quad s > \sigma/p, \quad (63)$$

в соответствии с (53)–(55). Тогда $\mathfrak{B}_{pq}^s(M, \mu)$ – множество всех функций $f \in L_p(M, \mu)$, которые могут быть представлены в виде

$$f = \sum_{\beta, j} \sum_m^{M, j} \lambda_{jm}^\beta k_{jm}^\beta, \quad \lambda \in b_{pq}^{s,\varrho}(M), \quad (64)$$

где ряд абсолютно сходится в $L_p(M, \mu)$ (с заменой на $L_\infty(\Omega, w_\kappa)$, $\kappa < 0$, если $p = \infty$ и Ω – неограниченная область). Пусть

$$\|f\|_{\mathfrak{B}_{pq}^s(M, \mu)} = \inf \|\lambda\|_{b_{pq}^{s,\varrho}(M)},$$

где нижняя грань берется по множеству всех допустимых представлений (64). Аналогично, $\mathfrak{F}_{pq}^s(M, \mu)$ – семейство всех функций $f \in L_p(M, \mu)$, допускающих представление в виде

$$f = \sum_{\beta, j} \sum_m^{M, j} \lambda_{jm}^\beta k_{jm}^\beta, \quad \lambda \in f_{pq}^{s,\varrho}(M), \quad (65)$$

где ряд абсолютно сходится в $L_p(M, \mu)$. Пусть

$$\|f\|_{\mathfrak{F}_{pq}^s(M, \mu)} = \inf \|\lambda\|_{f_{pq}^{s, \varrho}(M)},$$

где нижняя грань берется по множеству всех допустимых представлений (65).

ЗАМЕЧАНИЕ 32. Это – непосредственный вариант определения 14, включая комментарий в замечании 15. Очевидно, в случае областей $M = \Omega$ предпочтительнее писать $\mathfrak{B}_{pq}^s(\Omega)$ и $\mathfrak{F}_{pq}^s(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 33. (i) *Приведенные выше пространства $\mathfrak{B}_{pq}^s(M, \mu)$ и $\mathfrak{F}_{pq}^s(M, \mu)$ квазибанаховы. Они не зависят от ϱ и k (квазинормы эквивалентны). Кроме того, для всех допустимых s, p и q имеем*

$$\mathfrak{B}_{pq}^s(M, \mu) \hookrightarrow L_p(M, \mu), \quad \mathfrak{F}_{pq}^s(M, \mu) \hookrightarrow L_p(M, \mu), \quad (66)$$

и

$$\mathfrak{B}_{p, \min(p, q)}^s(M, \mu) \hookrightarrow \mathfrak{F}_{pq}^s(M, \mu) \hookrightarrow \mathfrak{B}_{p, \max(p, q)}^s(M, \mu).$$

(ii) *Пусть, кроме того, Γ в (53) – пористое в смысле определения 27 (ii). Тогда $\mathfrak{F}_{pq}^s(\Gamma, \mu)$ не зависит от q . В частности,*

$$\mathfrak{F}_{pq}^s(\Gamma, \mu) = \mathfrak{B}_{pp}^s(\Gamma, \mu).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое включение в (66) для случая множества $M = \Gamma$, удовлетворяющего условиям (53)–(55). Пусть $p < \infty$ (при $p = \infty$ нужны соответствующие изменения). По аналогии с (37) получаем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_m^{\Gamma, j} \lambda_{jm}^\beta k_{jm}^\beta \right\|_{L_p(\Gamma, \mu)}^p &\leq c 2^{-\varepsilon|\beta|p} \sum_m^{\Gamma, j} |\lambda_{jm}^\beta|^p \mu_j \\ &\leq c' 2^{-\varepsilon|\beta|p} 2^{-(n-\sigma)j} 2^{-jsp+jn} \leq c' 2^{-\varepsilon|\beta|} 2^{-j(sp-\sigma)}. \end{aligned}$$

Из (63) следует первое включение в (66). Все остальные утверждения в части (i) можно получить так же, как в доказательстве теоремы 16. Часть (ii) следует из предложения 29 (ii).

5.3. Свойства, комментарии, преобразования типа “снежинки”. Здесь собраны некоторые замечания и ссылки на близкие по тематике работы.

ЗАМЕЧАНИЕ 34. Пусть $M = \Omega$ – область в $\mathbb{R}^n$. Пусть $0 < p \leq \infty$ ($p < \infty$ для $\mathfrak{F}$ -пространств), $0 < q \leq \infty$ и $s > 0$. Тогда из определений 14 и 31 следует, что пространства на Ω являются ограничениями соответствующих пространств на $\mathbb{R}^n$ в обычном смысле,

$$\|f\|_{\mathfrak{B}_{pq}^s(\Omega)} = \inf \|g\|_{\mathfrak{B}_{pq}^s(\mathbb{R}^n)}, \quad g|_{\Omega} = f,$$

как подпространства в $L_p(\Omega)$; ситуация для $\mathfrak{F}$ -пространств аналогична. Так как пространства анализа Фурье, $B_{pq}^s(\Omega)$ и $F_{pq}^s(\Omega)$, также определяются ограничениями соответствующих пространств на $\mathbb{R}^n$, то, в частности, получаем равенства

$$\mathfrak{B}_{pq}^s(\Omega) = B_{pq}^s(\Omega) \quad \text{при } s > \sigma_p, \quad \mathfrak{F}_{pq}^s(\Omega) = F_{pq}^s(\Omega) \quad \text{при } s > \sigma_{pq},$$

как следствие теоремы 18.

ЗАМЕЧАНИЕ 35. Пусть μ и Γ – как в (53)–(55). В [29], [30] и недавно в [35; § 1.17.2, 7], мы имели дело с пространствами на $\Gamma = \text{supp } \mu$. В частности, при $0 < 1/p = t < 1$, $0 < q \leq \infty$ и $s > 0$ мы очень естественно ввели пространства

$$B_{pq}^s(\Gamma, \mu) = \text{tr}_\mu B_{pq}^{s+|s_\mu(1-t)|}(\mathbb{R}^n)$$

как пространства следов, где $s_\mu(1-t)$ – характеристика Бесова радоновой меры μ . Но мы здесь не обсуждаем детали. Заметим только, что в случае d -множеств, которые мы кратко упомянули после (59), имеем $|s_\mu(1-t)| = t(n-d)$. Если $s + |s_\mu(1-t)| > \sigma t$ с теми же μ и σ , что и в (63), то $s > 0$ и

$$B_{pq}^s(\Gamma, \mu) = \mathfrak{B}_{pq}^{s+|s_\mu(1-t)|}(\Gamma, \mu). \quad (67)$$

Подход через следы (пока что) тоньше при $1 < p < \infty$. С другой стороны, $\mathfrak{B}$ -пространства (в виде, введенном в определении 31) применимы ко всем $0 < p \leq \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 36. В литературе есть несколько предложений введения функциональных пространств на абстрактных пространствах (X, ϱ, μ) , где X – множество, ϱ – (квази-)метрика и μ – соответствующая борелевская мера. В случае соболевских пространств (первого порядка) сошлемся на [14]. Другой подход к пространствам типа Бесова на компактных множествах Γ в $\mathbb{R}^n$ основан на наблюдении, что Γ можно снабдить мерой со свойством удвоения, [36], и кратко упомянут в начале § 5.1. Уточнения этого подхода и соответствующих пространств Бесова, основанные на (первых) разностях и атомах, приведены в [20] и [6]. Кроме того, более подробные ссылки можно найти в [35; § 1.17.5]. Ближе к нашей теме находятся пространства типа $B_{pq}^s(X)$ и $F_{pq}^s(X)$ на пространствах (X, ϱ, μ) однородного типа, особенно при ограничении на случай $1 \leq p \leq \infty$ (некоторые расширения на случай $p < 1$ тоже есть), $1 \leq q \leq \infty$ и $|s| < 1$, где μ – борелевская мера со свойством удвоения. Подробные ссылки см. в [35; § 1.17.5]. Отметим здесь обзоры [15] и [16]. В случае пространств $F_{pq}^s(X)$ соответствующая техника может оказаться ближе к технике пространств последовательностей $f_{pq}^{s, \varrho, \mu}$, кратко упомянутой между (59) и (60), чем к технике пространств типа $f_{pq}^{s, \varrho}$, примененной выше в надежде, что найдется вариант мощного инструмента векторнозначных максимальных неравенств вида (43), что было использовано в [16]. Но, по-видимому, это требует некоторой регулярности меры μ , например, изотропности. Соответствующая часть утверждения (43) недостижима для общих мер. Тем не менее есть способ обойти эту трудность, см. [17]. Следует заметить, что теория пространств $B_{pq}^s(X)$ и $F_{pq}^s(X)$ – в том виде, в котором она развита в [15]–[17] (с векторнозначными максимальными неравенствами Харди–Литлвуда или без них) – с одной стороны и подход, представленный в настоящей работе, с другой, имеют нечто общее. Оба подхода решительно зависят от воспроизводящих формул типа (5) и их абстрактных вариантов в (X, ϱ, μ) .

ЗАМЕЧАНИЕ 37. Введенное выше однородное пространство (X, ϱ, μ) называется d -пространством при некотором $d > 0$, если мера μ , удовлетворяющая условию удвоения, удовлетворяет и условию

$$\mu(B(x, r)) \sim r^d \quad \text{при } x \in X \text{ и } 0 < r \leq \text{diam } X < \infty,$$

где $B(x, r)$ – шар радиуса r с центром в x . Существует такое число $0 < \varepsilon_0 \leq 1$, что для любого ε с $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ можно найти билипшицево отображение $H \mapsto \mathbb{R}^n$,

$$H: (X, \varrho^\varepsilon, \mu) \Longleftrightarrow (\Gamma, \varrho_n, \mathcal{H}^{d/\varepsilon} \llcorner \Gamma),$$

так называемой *версии типа “снежинки”* $(X, \varrho^\varepsilon, \mu)$ пространства (X, ϱ, μ) на заданное d/ε -множество Γ в некотором (многомерном) пространстве $\mathbb{R}^n$ с $d/\varepsilon < n$, где ϱ_n – соответствующая евклидова метрика и $\mathcal{H}^{d/\varepsilon}$ – связанная с ней хаусдорфова мера. Это – так называемое *преобразование типа “снежинки”* пространства (X, ϱ, μ) . Оно дает возможность перенести пространство

$$B_{pq}^s(\Gamma, \mu) = \mathfrak{B}_{pq}^{s + \frac{n-d/\varepsilon}{p}}(\Gamma, \mu)$$

(отвечающее формуле (67)) в d -пространство (X, ϱ, μ) , и поэтому получить формулу

$$f = \sum_{\beta, j} \sum_m^{M, j} \lambda_{jm}^\beta H^{-1} k_{jm}^\beta$$

в качестве перенесенного представления (65). В частности, $H^{-1} k_{jm}^\beta \geq 0$. Это подробно сделано в [34] в предположении, что $s > 0$ и $1 < p = q < \infty$. Теперь эта конструкция может быть распространена на все родственные пространства, рассматриваемые в определении 31 и теореме 33. Преобразование типа “снежинки” восходит к [2]. Мы также отсылаем читателя к подробному тексту [19]. Описание и дальнейшие ссылки можно также найти в [34] и [35; § 1.17.9]. Но основным наблюдением в связи с нашим подходом является то, что это преобразование типа “снежинки” работает в гораздо более богатой шкале квазиметрических пространств (X, ϱ, μ) с мерами, имеющими свойство удвоения [19]. Более подробные ссылки даны в [34] и [35; § 1.17]. На основании определения 31 этим способом можно перенести $\mathfrak{B}^s$ -пространства на широкие классы однородных пространств (X, ϱ, μ) для всех $s > 0$, $0 < p \leq \infty$ и $0 < q \leq \infty$. Но это еще не сделано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. R. Adams, L. I. Hedberg. Function Spaces and Potential Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [2] P. Assouad. Plongements lipschitziens dans $\mathbb{R}^n$ // Bull. Soc. Math. France. 1983. V. 111. № 4. P. 429–448.
- [3] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
- [4] M. Bricchi. Complements and results on h -sets // Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis. Basel: Birkhäuser, 2003. P. 219–229.
- [5] M. Bricchi. Tailored Besov spaces and h -sets // Math. Nachr. 2004. V. 263/264. P. 36–52.
- [6] P. Bylund. Besov spaces and measures on arbitrary sets // Ph.D Thesis. Umeå: University of Umeå, 1994.
- [7] M. Christ, A. Seeger. Necessary conditions for vector-valued operator inequalities in harmonic analysis // ArXiv: math.CA/0504030.
- [8] R. A. DeVore, G. G. Lorentz. Constructive Approximation. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [9] R. A. DeVore, R. C. Sharpley. Besov spaces on domains in $\mathbb{R}^d$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 335. № 2. P. 843–864.
- [10] D. E. Edmunds, H. Triebel. Function Spaces, Entropy Numbers, Differential Operators. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
- [11] C. Fefferman, E. M. Stein. Some maximal inequalities // Amer. J. Math. 1971. V. 93. P. 107–115.
- [12] M. Frazier, B. Jawerth. A discrete transform and decompositions of distribution spaces // J. Funct. Anal. 1990. V. 93. № 1. P. 34–170.
- [13] M. Frazier, B. Jawerth, G. Weiss. Littlewood–Paley Theory and the Study of Function Spaces. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991.

- [14] P. Hajlasz, P. Koskela. Sobolev met Poincaré // Mem. Amer. Math. Soc. 2000. V. 145. № 688. P. 1–101.
- [15] Y. S. Han, E. T. Sawyer. Littlewood–Paley theory on spaces of homogeneous type and classical function spaces // Mem. Amer. Math. Soc. 1994. V. 110. № 530.
- [16] Y. Han, D. Yang. New characterizations and applications of inhomogeneous Besov and Triebel–Lizorkin spaces on homogeneous type spaces and fractals // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.). 2002. V. 403.
- [17] Y. Han, D. Yang. Triebel–Lizorkin spaces with non-doubling measures // Studia Math. 2004. V. 162. № 2. P. 105–140.
- [18] L. I. Hedberg, Yu. Netrusov. An axiomatic approach to function spaces, spectral synthesis, and Luzin approximation // Mem. Amer. Math. Soc. (to appear).
- [19] J. Heinonen. Lectures on Analysis on Metric Spaces. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [20] A. Jonsson. Besov spaces on closed subsets of $\mathbb{R}^n$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 341. № 1. P. 355–370.
- [21] P. Mattila. Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
- [22] Ю. Нетрусов. Множества особенностей функций из пространств типа Бесова и Лизоркина–Трибеля // Труды МИАН. 1989. Т. 187. С. 162–177.
- [23] С. М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
- [24] С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.
- [25] Э. А. Стороженко, П. Освальд. Теорема Джексона в пространствах $L^p(\mathbb{R}^k)$, $0 < p < 1$ // Сиб. матем. журн. 1978. Т. 19. № 4. С. 888–901.
- [26] A. Torchinsky. Real-variable Methods in Harmonic Analysis. Orlando, FL: Academic Press, 1986.
- [27] H. Triebel. Theory of Function Spaces. Basel: Birkhäuser, 1983. (Рус. пер.: Х. Трибель. Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.)
- [28] H. Triebel. Theory of Function Spaces. II. Basel: Birkhäuser, 1992.
- [29] H. Triebel. Fractals and Spectra. Related to Fourier Analysis and Function Spaces. Basel: Birkhäuser, 1997.
- [30] H. Triebel. The Structure of Functions. Basel: Birkhäuser, 2001.
- [31] H. Triebel. Wavelet frames for distributions; local and pointwise regularity // Studia Math. 2003. V. 154. № 1. P. 59–88.
- [32] H. Triebel. Fractal characteristics of measures: An approach via function spaces // J. Fourier Anal. Appl. 2003. V. 9. № 4. P. 411–430.
- [33] H. Triebel. The positivity property of function spaces // Proceedings of the Sixth Conference “Function Spaces” (Wrocław, 2001) / ed. R. Grzaslewicz et al. River Edge, NJ: World Scientific, 2003. P. 263–274.
- [34] H. Triebel. A new approach to function spaces on quasi-metric spaces // Rev. Mat. Complut. 2005. V. 18. № 1. P. 7–48.
- [35] H. Triebel. Theory of Function Spaces. III. Basel: Birkhäuser (to appear).
- [36] А. Л. Вольберг, С. В. Конягин. О мерах с условием удвоения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 3. С. 666–675.
- [37] P. Wojtaszczyk. A Mathematical Introduction to Wavelets. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.

Mathematisches Institut,
Friedrich-Schiller-Universität, Jena, Germany
E-mail: triebel@minet.uni-jena.de

Поступила в редакцию
20.09.2005