Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Фила, Х. Ниномия, Системы “реакция-диффузия”: разрушение решений, возникающее и исчезающее под действием диффузии, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 6, 207–226

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1684>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 18:22:00

УДК 517.947

Посвящается академику С. М. Никольскому

СИСТЕМЫ “РЕАКЦИЯ-ДИФфуЗИЯ”: РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ,
ВОЗНИКАЮЩЕЕ И ИСЧЕЗАЮЩЕЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДИФфуЗИИ

М. Фила, Х. Ниномия

Дается обзор результатов о взаимосвязи динамики системы обыкновенных дифференциальных уравнений и динамики соответствующей системы уравнений реакции-диффузии, полученной при добавлении диффузионных членов. Основное внимание уделяется влиянию диффузии на глобальное существование решений. Приводятся примеры систем, в которых диффузия вызывает разрушение решений (blow-up) или, наоборот, препятствует ему.

Библиография: 27 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	207
2. Случай больших коэффициентов диффузии	208
3. Неустойчивость по Тьюрингу	209
4. Разрушение решений, обусловленное диффузией	211
4.1. Пример Моргана	212
4.2. Пример Гуедды и Кайрейна	213
4.3. Пример Пьерра и Шмитта	214
4.4. Пример Мизогучи, Ниномия и Янагиды	215
4.5. Пример Вайнбергера	219
4.6. Линейно порожденное разрушение решений	219
5. Разрушение решений, исчезающее за счет диффузии	220
Список литературы	225

1. Введение

В данной работе мы даем обзор результатов о взаимосвязи динамики системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{U}_t = \mathbf{f}(\mathbf{U}), \quad (1.1)$$

$$\mathbf{U} := (U_1, \dots, U_M), \quad \mathbf{f} := (f_1, \dots, f_M), \quad M \in \{1, 2, \dots\},$$

Первый автор был частично поддержан грантом VEGA № 1/0259/03. Второй автор был частично поддержан грантом для молодых ученых (Grant-in-Aid for Encouragement of Young Scientists) № 15740076.

и динамики соответствующей системы уравнений реакции-диффузии

$$\mathbf{u}_t = D \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u} := (u_1, \dots, u_M), \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_M \end{pmatrix}.$$

Мы будем рассматривать систему (1.2) как на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, так и во всем пространстве $\mathbb{R}^N$. В случае ограниченной области на границе будут заданы либо условия Неймана

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

либо условия Дирихле

$$\mathbf{u}(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \quad (1.4)$$

В разделе 2 мы приводим и обсуждаем результаты, показывающие, что поведение некоторых решений задачи (1.2), (1.3) определяется системой (1.1) при условии, что коэффициенты диффузии в (1.2) достаточно большие. В разделе 3 мы на примере показываем, что добавление диффузии в (1.1) может оказывать дестабилизирующее воздействие на устойчивое стационарное решение системы (1.1). В разделе 4 мы приводим несколько примеров систем реакции-диффузии (1.2), у которых есть разрушающиеся решения, в то время как все решения соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1) являются глобальными. В разделе 5 рассматривается противоположное явление, когда диффузия препятствует разрушению решений. Другими словами, это означает, что некоторые решения системы (1.1) разрушаются, хотя все решения (1.2) глобальны.

2. Случай больших коэффициентов диффузии

Поведение решений системы реакции-диффузии (1.2) имеет тесную связь с поведением решений соответствующей кинетической системы (1.1). А именно, в [3], [8] показано, что если коэффициенты диффузии достаточно большие, то динамика системы (1.2) в некотором смысле схожа с динамикой системы (1.1).

ТЕОРЕМА 2.1 [3; теорема 3.1]. *Предположим, что прямоугольная область $\Sigma \subset \mathbb{R}^M$ инвариантна относительно потока, порожденного системой (1.1), в положительном направлении и что*

$$\sigma := d\mu_2 - K > 0,$$

где

$$d := \min_j d_j, \quad K := \max_{j,k} \max_{\Sigma} \left| \frac{\partial f_j}{\partial u_k} \right|,$$

а μ_2 – второе собственное значение задачи Неймана для оператора $-\Delta$. Если $\{\mathbf{u}(x, 0) \mid x \in \Omega\} \subset \Sigma$, то решение $\mathbf{u} = (u_1(x, t), \dots, u_M(x, t))$ системы (1.2) удовлетворяет оценке

$$\|u_j(\cdot, t) - \bar{u}_j(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C e^{-\sigma t}, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

с некоторой положительной постоянной C , где $\bar{u}(t) = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} u(x, t) dx$. Более того,

$$\left| \frac{d\bar{u}_j}{dt} - f_j(\bar{u}_1(t), \dots, \bar{u}_M(t)) \right| \leq C e^{-\sigma t}, \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу результатов [1] или [19] прямоугольная область Σ будет инвариантна в положительном направлении относительно потока, порожденного системой (1.2). Для решения $\mathbf{u}$ в Σ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^M \|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \sum_{j=1}^M \int_{\Omega} (-d_j (\Delta u_j)^2 - f_j(u_1, \dots, u_M) \Delta u_j) dx \\ &\leq -(d_j \mu_2 - K) \sum_{j=1}^M \|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^M \|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c e^{-\sigma t},$$

откуда следует утверждение теоремы.

Теорема 2.1 показывает, что решения системы (1.2), находящиеся в Σ , приближаются к решениям системы (1.1) при $t \rightarrow \infty$ при условии, что $\sigma > 0$. Однако предположение о существовании инвариантной области Σ значительно сужает класс систем, к которым применима данная теорема. Хейлу [8] удалось ослабить это предположение. Положим $X = L^2(\Omega, \mathbb{R}^M)$. Стандартным способом с помощью оператора $-\Delta$ определим пространства X^α с дробным показателем.

ТЕОРЕМА 2.2 [8; теорема 1.1]. *Предположим, что $\mathcal{A}$ – компактный аттрактор системы (1.1). Тогда найдется положительная константа K такая, что $\mathcal{A}$, рассматриваемый как подмножество в X^α ($\alpha > 3/4$, $N \leq 3$), состоящее из постоянных функций, является компактным аттрактором для системы (1.2), если $d\mu_2 > K$. Точнее, найдутся окрестность $\mathcal{V}$ множества $\mathcal{A}$ в X^α и постоянные $C, \sigma > 0$ такие, что $\mathbf{u}$ удовлетворяет оценкам (2.1), (2.2), если $\mathbf{u}(\cdot, 0) \in \mathcal{V}$.*

Доказательство теоремы 2.2 (которое мы опускаем) основано на существовании функции Ляпунова в окрестности аттрактора $\mathcal{A}$ (см. [27]) и разложении Ляпунова–Шмидта.

3. Неустойчивость по Тьюрингу

В предыдущем разделе мы увидели некоторое подобие в поведении систем (1.2) и (1.1) для достаточно больших коэффициентов диффузии. В данном разделе мы обсудим ситуацию, при которой решения (1.2) и (1.1) ведут себя принципиально по-разному. А именно, мы покажем, что устойчивое пространственно однородное стационарное решение некоторой системы реакции-диффузии становится неустойчивым при изменении коэффициентов диффузии. При этом устойчивость наследуется

пространственно неоднородным стационарным решением, которое бифурцирует из однородного.

Впервые это явление было изучено Рашевски [17] и Тьюрингом [21]. Оно называется *неустойчивостью, вызванной диффузией*, или *неустойчивостью по Тьюрингу*.

Объясним идею Тьюринга на простом примере. Рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u_t = u - v, \\ v_t = 6u - 4v. \end{cases} \quad (3.1)$$

Эта линейная система обладает устойчивым состоянием равновесия $(0, 0)$, поскольку собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

отрицательны и равны -1 и -2 . Рассмотрим соответствующую систему реакции-диффузии

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + u - v & \text{в } \Omega \times (0, \infty), \\ v_t = d_2 \Delta v + 6u - 4v & \text{в } \Omega \times (0, \infty) \end{cases} \quad (3.2)$$

с граничными условиями Неймана. Очевидно, что $(0, 0)$ – стационарное решение системы (3.2). Обозначим n -е собственное значение задачи Неймана для оператора $-\Delta$ через μ_n . Устойчивость тривиального стационарного решения определяется корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2 + (3 + (d_1 + d_2)\mu_n)\lambda + (d_1\mu_n - 1)(d_2\mu_n + 4) + 6 = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Для простоты предположим, что $d_1 = 1/21$, $d_2 = 1$. Тогда

$$(d_1\mu_n - 1)(d_2\mu_n + 4) + 6 = \frac{(\mu_n - 3)(\mu_n - 14)}{21} < 0$$

при $3 < \mu_n < 14$. Это означает, что один из корней положительный, и поэтому решение $(0, 0)$ неустойчиво. В качестве простейшего примера можно взять $N = 1$, $\Omega = (0, 1)$. Тогда получаем $\mu_2 = \pi^2$.

Чтобы обсудить неустойчивость по Тьюрингу системы (1.2) при $M > 1$, введем некоторые обозначения. Пусть

$$I_k := \{(i_1, \dots, i_k) \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq M\}.$$

Для $J = (i_1, \dots, i_k) \in I_k$ и $(M \times M)$ -матрицы $A = (a_{ij})$ обозначим через $P_J(A)$ матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \dots & a_{i_2 i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \dots & a_{i_k i_k} \end{pmatrix}$$

размера $k \times k$.

ТЕОРЕМА 3.1 [22; теорема 3.1]. *Предположим, что все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части и $(-1)^k \det P_J(A) < 0$ при некоторых $1 \leq k \leq M$ и $J \in I_k$. Тогда существует диагональная матрица D такая, что $A - D$ имеет собственное значение с положительной вещественной частью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d_j = 0$ при $j \in J$ и $d_j = d > 0$ при $j \notin J$. Тогда $(-1)^M \det(A - D)$ является многочленом по d степени $M - k$ со старшим коэффициентом $(-1)^k \det P_J(A)$, откуда $(-1)^M \det(A - D) < 0$ при больших $d > 0$. Теорема 3.1 доказана.

Предположим, что система (1.1) обладает стационарным решением $(U_1^*, \dots, U_M^*)$. Обозначим через A матрицу линеаризации этой системы в точке $(U_1^*, \dots, U_M^*)$:

$$A := \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(U_1^*, \dots, U_M^*) \right).$$

С помощью теоремы 3.1 можно получить неустойчивость по Тьюрингу при подходящем выборе области Ω или коэффициентов диффузии.

Янагида [26] показал, что неустойчивость по Тьюрингу пространственно однородного стационарного решения системы реакции-диффузии с кососимметричной градиентной структурой имеет место тогда и только тогда, когда это стационарное решение не является точкой минимакса соответствующего функционала. В [26] также изучалось вызванное диффузией нарушение симметрии стационарных решений на декартовых произведениях областей.

4. Разрушение решений, обусловленное диффузией

В этом разделе мы изучим влияние диффузии на глобальное существование решений. Более точно, нас интересует разрушение решений за конечное время, вызванное диффузией. Будем говорить, что решение системы (1.2) разрушается за конечное время, если для некоторого $T \in (0, \infty)$

$$\limsup_{t \nearrow T} (\|u_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \dots + \|u_M(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}) = \infty.$$

Явление разрушения решений (blow-up) изучалось многими авторами, и по этой тематике имеется обширная литература (см., например, [6], [9], [4] и ссылки там).

В этом разделе нас будут интересовать примеры систем

$$\begin{cases} U_t = f(U, V), \\ V_t = g(U, V), \end{cases} \quad (4.1)$$

у которых все решения глобальны (по времени), в то время как некоторые решения системы

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + f(u, v), \\ v_t = d_2 \Delta v + g(u, v) \end{cases} \quad (4.2)$$

разрушаются за конечное время. Это явление называется *разрушением решений, вызванным диффузией*. Первые два примера такого рода были обнаружены Чурбановым [2] и Морганом [12].

Чурбанов доказал, что существует такая функция f , что все решения системы (4.1) с $g \equiv 0$ глобальны, в то время как некоторые решения системы

$$u_t = u_{xx} + f(u, v), \quad v_t = v_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

разрушаются. Функция f в [2] не была построена явно.

4.1. Пример Моргана. В [12] было показано, что разрушение решений, вызванное диффузией, имеет место для системы

$$\begin{cases} u_t = \pi^{-2} u_{xx} + u, & x \in (0, 1), \\ v_t = v^2 - |3 - u|v^3, & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (4.3)$$

с граничными условиями Неймана. Легко проверить, что первое уравнение этой системы обладает семейством стационарных решений $u = a \cos \pi x$. Положим $a = 6$ и введем $w(t) := v(1/3, t)$. Тогда

$$w_t = w^2 - |3 - 6 \cos(\pi/3)|w^3 = w^2$$

в силу второго уравнения в (4.3). Если $w(0) > 0$, то w неограниченно возрастает за конечное время.

Покажем, что соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} U_t = U, \\ V_t = V^2 - |3 - U|V^3 \end{cases} \quad (4.4)$$

не имеет решений, которые разрушаются за конечное время. Предположим противное, и пусть $(\tilde{U}, \tilde{V})$ – решение, которое разрушается при $t = T$. Тогда $\tilde{U}(t) \nearrow 3$ и $\tilde{V}(t) \nearrow \infty$ при $t \nearrow T$. Следовательно, $T = \log(3/\tilde{U}(0))$. Положим

$$\Sigma = \{(U, V) \mid 2 < U < 3, V \geq 1, (3 - U)V < 1\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $(\tilde{U}(0), \tilde{V}(0)) \in \Sigma$. В силу того, что $V_t \leq V^2$, имеем $1/\tilde{V}(0) \leq T$, откуда

$$3 - \tilde{U}(0) \leq \frac{1}{\tilde{V}(0)} \leq T.$$

Но это противоречит тому, что $T = \log(3/\tilde{U}(0))$, поскольку

$$\log \frac{3}{s} < 3 - s \quad \text{при } 2 < s < 3.$$

Итак, все решения системы (4.4) глобальны (определены при всех t), но неограниченно возрастают при $t \rightarrow \infty$.

Ван и Чжан [23] обобщили пример Моргана на случай системы

$$\begin{cases} u_t = \pi^{-2} u_{xx} + u, & x \in (0, 1), \\ v_t = dv_{xx} + v^2 - |3 - u|v^3, & x \in (0, 1), \end{cases}$$

где $d > 0$. Они построили разрушающееся нижнее решение следующим образом. Пусть $u = 3 \cos \pi x$. Тогда для v имеем

$$v_t = dv_{xx} + v^2 - 3(1 - \cos \pi x)v^3, \quad (4.5)$$

и

$$w(x, t) = \frac{c}{(A - \cos \pi x - kt)^m}$$

является нижним решением уравнения (4.5) при подходящем выборе констант A , c , k и m .

Отметим также работу [10], в которой рассматривались автомодельные разрушающиеся решения уравнения, связанного с (4.5).

4.2. Пример Гуедды и Кайрейна. Гуедда и Кайрейн [7] рассмотрели следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} U_t = UV, \\ V_t = -2. \end{cases} \quad (4.6)$$

Решения этой системы могут быть выписаны явно:

$$U(t) = U(0)e^{V(0)t-t^2}, \quad V(t) = V(0) - 2t.$$

Рассмотрим соответствующую систему реакции-диффузии

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + uv & \text{в } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ v_t = v_{xx} - 2 & \text{в } \mathbb{R} \times (0, \infty). \end{cases} \quad (4.7)$$

Очевидно, что

$$v(x, t) = x^2$$

будет решением второго уравнения в (4.7). Подставляя его в первое уравнение (4.7), получим

$$u_t = u_{xx} + x^2 u. \quad (4.8)$$

Будем искать решение u в виде

$$u(x, t) = \varphi(t)e^{-x^2\psi(t)}.$$

Подстановка этого выражения в (4.8) дает

$$(\varphi' + 2\varphi\psi)e^{-x^2\psi(t)} - (\psi' + 4\psi^2 + 1)x^2e^{-x^2\psi(t)} = 0.$$

Таким образом,

$$\varphi' = -2\varphi\psi, \quad \psi' = -4\psi^2 - 1.$$

Если взять начальные данные

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \psi(0) = \frac{1}{2},$$

то получим явный вид решения

$$u(x, t) = \frac{2^{-1/4}}{\sqrt{2\pi \cos(\pi/4 - 2t)}} e^{-\frac{x^2}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4-2t}},$$

которое разрушается при $T = 3\pi/8$.

4.3. Пример Пьерра и Шмитта. Рассмотрим задачу с начальными условиями

$$\begin{aligned} U_t &= f(U, V), \quad V_t = g(U, V), \\ U(0) &= U_0 \geq 0, \quad V(0) = V_0 \geq 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где функции f и g таковы, что

$$f(0, v) \geq 0 \text{ при } v \geq 0, \quad g(u, 0) \geq 0 \text{ при } u \geq 0, \quad (4.10)$$

$$f + g \leq 0. \quad (4.11)$$

Тогда все решения задачи (4.9) глобальны, поскольку $U(t), V(t) \geq 0$ в силу (4.10) и $U(t) + V(t) \leq U_0 + V_0$ всюду, где U и V определены, в силу (4.11).

Для соответствующей системы реакции-диффузии

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + f(u, v), & x \in \Omega, \\ v_t = d_2 \Delta v + g(u, v), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.12)$$

на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ с граничными условиями Дирихле

$$u(x, t) = \alpha_1(t), \quad v(x, t) = \alpha_2(t), \quad x \in \partial\Omega, \quad (4.13)$$

и начальными данными $u(x, 0), v(x, 0) \geq 0$ имеет место глобальность решений при $d_1 = d_2$, поскольку для $w := u + v$ в силу (4.11) получаем

$$w_t - d_1 \Delta w \leq 0.$$

В [15], [16] показано, что при $d_1 \neq d_2$ происходит разрушение решений за конечное время.

ТЕОРЕМА 4.1 [15], [16]. Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < 1\}$. Тогда существуют функции $f, g \in C^\infty([0, \infty)^2)$, константы $d_1, d_2 > 0$, $T > 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in C^\infty([0, T])$ и решения $u, v \geq 0$ задачи (4.12), (4.13) при $t \in (0, T)$ такие, что

$$\lim_{t \nearrow T} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{t \nearrow T} \|v(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$u(x, t) = \frac{a(T-t) + b|x|^2}{(T-t + |x|^2)^\gamma}, \quad v(x, t) = \frac{c(T-t) + d|x|^2}{(T-t + |x|^2)^\gamma},$$

$a = \frac{1}{25}$, $b = 1$, $c = \frac{11}{2}$, $d = \frac{1}{10}$, $\gamma = \frac{5}{4}$, $N = 10$, $d_1 = 1$, $d_2 = \frac{1}{10}$, и

$$f(u, v) = \sum_{k=0}^5 \lambda_k u^{5-k} v^k, \quad g(u, v) = \sum_{k=0}^5 \mu_k u^{5-k} v^k,$$

где $\lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R}$ – выбранные подходящим образом константы. Детали этого построения, выполненного с помощью компьютера, можно найти в [15], [16].

4.4. Пример Мизогучи, Ниномия и Янагиды. В примерах Моргана и Гуедды–Кайрейна некоторые решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений уходят в бесконечность при $t \rightarrow \infty$. Возникает естественный вопрос, может ли иметь место разрушение решений системы (1.2), если (1.1) обладает компактным глобальным аттрактором? Мизогучи, Ниномия и Янагида [11] получили положительный ответ на этот вопрос.

Они рассмотрели следующую систему:

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + |u - v|^{p-1}(u - v) - u, \\ v_t = d_2 \Delta v + |u - v|^{p-1}(u - v) - v, \end{cases} \quad (4.14)$$

где $p > 1$.

ТЕОРЕМА 4.2 [11; теорема 2.2]. *Некоторые решения системы (4.14) разрушаются за конечное время, если $0 < d_1 < d_2$, в то время как все решения соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений стремятся к $(0, 0)$, когда t стремится к бесконечности.*

Этот результат справедлив даже для больших коэффициентов диффузии. В этом случае теорема 2.2 утверждает, что компактный аттрактор соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. (4.15) ниже) можно рассматривать как компактный аттрактор системы (4.14). Однако в силу теоремы 4.2 этот аттрактор, который является глобальным для (4.15), будет только локальным для (4.14).

Сначала рассмотрим динамику системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [14; пример 6.2]).

ЛЕММА 4.3. *Пусть (U, V) – решение системы*

$$\begin{cases} U_t = |U - V|^{p-1}(U - V) - aU, \\ V_t = |U - V|^{p-1}(U - V) - bV. \end{cases} \quad (4.15)$$

Если $a \geq b > 0$, то $(U(t), V(t))$ стремится к $(0, 0)$ при $t \rightarrow \infty$. Если $0 \leq a < b$, то $(U(t), V(t))$ при некоторых начальных данных (U_0, V_0) разрушается за конечное время.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $W = U - V$, имеем

$$W_t = -aU + bV = -aW + (b - a)V.$$

Если $a = b$, то

$$W(t) = W_0 e^{-at}.$$

Подставляя это выражение в (4.15), получаем

$$V(t) = V_0 e^{-at} + \frac{|W_0|^{p-1} W_0}{a(p-1)} (e^{-at} - e^{-apt}).$$

Если $a \neq b$, то

$$V = \frac{1}{b-a}(W_t + aW)$$

и тогда

$$W_{tt} + aW_t = (b - a)|W|^{p-1}W - b(W_t + aW). \quad (4.16)$$

Умножая (4.16) на W и W_t , получаем

$$\frac{1}{2}(W^2)_{tt} + \frac{a+b}{2}(W^2)_t = -(W_t)^2 + (b-a)|W|^{p+1} - abW^2, \quad (4.17)$$

$$\frac{d}{dt} \left((W_t)^2 - \frac{b-a}{p+1}|W|^{p+1} + \frac{ab}{2}W^2 \right) = -(a+b)(W_t)^2 \leq 0. \quad (4.18)$$

Если начальные данные таковы, что

$$(W_t)^2 = (-aW + (b-a)W)^2 \leq \frac{b-a}{p+1}|W|^{p+1} - \frac{ab}{2}W^2, \quad (4.19)$$

то (4.19) будет выполняться всюду, где определено решение, в силу (4.18). Тогда из (4.17) имеем

$$\frac{1}{2}(W^2)_{tt} + \frac{a+b}{2}(W^2)_t \geq \frac{(b-a)p}{p+1}(W^2)^{(p+1)/2} - \frac{ab}{2}W^2. \quad (4.20)$$

Снова используя (4.18), видим, что некоторые решения разрушаются, если $b > a$.

Если $b < a$, то из (4.18) следует, что

$$\mathcal{L}(t) := (W_t)^2 + \frac{a-b}{p+1}|W|^{p+1} + \frac{ab}{2}W^2 \quad (4.21)$$

монотонно убывает и стремится к некоторой константе ℓ_∞ . Если $\ell_\infty > 0$, то

$$\int_0^\infty ((W_t)^2 + (a-b)|W|^{p+1} + abW^2) dt = \infty.$$

Отсюда и из (4.17) получаем, что найдутся положительное время T и положительная константа δ такие, что

$$\frac{1}{2}(W^2)_t + \frac{a+b}{2}W^2 \leq -\delta < 0 \quad \text{при } t \geq T.$$

Поэтому W^2 становится отрицательной при больших t — противоречие. Значит, $\ell_\infty = 0$. Тогда W и W_t стремятся к 0 и (U, V) стремится к $(0, 0)$ при $t \rightarrow \infty$. Лемма 4.3 доказана.

Из этой леммы вытекает, что $(0, 0)$ является глобальным аттрактором системы обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующей (4.14), а именно: все решения $(U(t), V(t))$ системы (4.15) с $a = b = 1$ стремятся к $(0, 0)$. Эта лемма позволяет также сделать предположение, что при введении диффузии с достаточно большим коэффициентом для v некоторые решения могут разрушаться.

Далее мы рассмотрим решение $(u(x, t), v(x, t))$ системы реакции-диффузии (4.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.2. Для простоты пусть

$$\int_{\Omega} (u_0(x) - v_0(x)) dx = 0. \quad (4.22)$$

Полагая

$$w := u - v,$$

имеем

$$w_t = d_1 \Delta u - d_2 \Delta v - w = d_1 \Delta w - (d_2 - d_1) \Delta v - w. \quad (4.23)$$

Интегрируя (4.23) по Ω , из (1.3) и (4.22) находим

$$\int_{\Omega} w(x, t) dx = 0 \quad \text{при } t > 0.$$

В силу (4.23)

$$v = \bar{v} + \frac{1}{d_2 - d_1} (-\Delta)^{-1} w_t + \frac{d_1}{d_2 - d_1} w + \frac{1}{d_2 - d_1} (-\Delta)^{-1} w, \quad (4.24)$$

где $\bar{v}$ – усреднение v по области, т.е.

$$\bar{v}(t) := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v(x, t) dx.$$

Подставляя (4.24) во второе уравнение из (4.14), получаем

$$\begin{aligned} & (-\Delta)^{-1} w_{tt} + (d_1 + d_2)(w_t + w) + 2(-\Delta)^{-1} w_t \\ & = d_1 d_2 \Delta w - (-\Delta)^{-1} w + (d_2 - d_1) |w|^{p-1} w - (d_2 - d_1)(\bar{v} + \bar{v}_t). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Умножая (4.25) на w_t и интегрируя по Ω , приходим к

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \|(-\Delta)^{-1/2} w_t\|^2 + d_1 d_2 \|(-\Delta)^{1/2} w\|^2 + (d_1 + d_2) \|w\|^2 \right. \\ & \quad \left. + \|(-\Delta)^{-1/2} w\|^2 - \frac{2(d_2 - d_1)}{p+1} \int_{\Omega} |w|^{p+1} dx \right\} \\ & = -2(d_1 + d_2) \|w_t\|^2 - 4 \|(-\Delta)^{-1/2} w_t\|^2 \leq 0, \end{aligned}$$

где

$$\|u\| := \int_{\Omega} u^2 dx.$$

Тогда оценка

$$\begin{aligned} & \|(-\Delta)^{-1/2} w_t\|^2 + d_1 d_2 \|(-\Delta)^{1/2} w\|^2 + (d_1 + d_2) \|w\|^2 + \|(-\Delta)^{-1/2} w\|^2 \\ & \quad - \frac{2(d_2 - d_1)}{p+1} \int_{\Omega} |w|^{p+1} dx \leq 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

справедлива при всех $t \geq 0$, если только она верна при $t = 0$. С другой стороны, умножая (4.25) на w и снова интегрируя по Ω , получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w \cdot (-\Delta)^{-1} w_{tt} dx + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d_1 + d_2}{2} \|w\|^2 + \|(-\Delta)^{-1/2} w\|^2 \right\} \\ &= -d_1 d_2 \|(-\Delta)^{1/2} w\|^2 - (d_1 + d_2) \|w\|^2 - \|(-\Delta)^{-1/2} w\|^2 + (d_2 - d_1) \int_{\Omega} |w|^{p+1} dx \\ &\geq \|(-\Delta)^{-1/2} w_t\|^2 + \frac{2(p-1)(d_2 - d_1)}{p+1} \int_{\Omega} |w|^{p+1} dx \end{aligned}$$

в силу (4.26). Так как

$$\int_{\Omega} w \cdot (-\Delta)^{-1} w_{tt} dx = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \|(-\Delta)^{-1/2} w\|^2 - \|(-\Delta)^{-1/2} w_t\|^2,$$

то

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \|(-\Delta)^{-1/2} w\|^2 + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d_1 + d_2}{2} \|w\|^2 + \|(-\Delta)^{-1/2} w\|^2 \right\} \\ &\geq 2 \|(-\Delta)^{-1/2} w_t\|^2 + \frac{2(p-1)(d_2 - d_1)}{p+1} \int_{\Omega} |w|^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Дважды интегрируя по t , мы приходим к неравенству

$$X'' + t^{(p-1)/2} X' \geq C_1 X^{(p+1)/2} + C_2 \|(-\Delta)^{-1/2} w(\cdot, 0)\|^2 + \rho,$$

где C_i – некоторые положительные постоянные, ρ зависит от начальных данных и

$$X(t) := \int_0^t \int_0^s \|w(\cdot, \tau)\|^{p+1} d\tau ds.$$

Таким образом, заключаем, что X не может существовать глобально. Теорема 4.2 доказана.

Рассмотрим теперь случай $d_1 = d_2 = d$. Тогда существует семейство выпуклых инвариантных областей Σ_j для системы (4.15) таких, что

$$\bigcup \Sigma_j = \mathbb{R}^2.$$

Тогда, как следует из результатов Вайнбергера [24], все решения системы (4.14) глобальны (по времени). Таким образом, условие $d_1 \neq d_2$ существенно для разрушения решений.

4.5. Пример Вайнбергера. Из приведенных выше рассуждений естественным образом возникает вопрос, может ли произойти разрушение решений под действием диффузии, если для исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений существует глобальный аттрактор и $d_1 = d_2 = d$. Если система допускает растущие со временем решения, то положительный ответ на этот вопрос дает пример Вана и Чжана [23], рассмотренный выше. Вайнбергер [25] построил пример разрушения решений, вызванного диффузией, в случае, когда все решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений стремятся к нулю. Совсем недавно рассуждения Вайнбергера были значительно упрощены в [20], где была рассмотрена нелинейность даже более общего вида. А именно, в [20] изучалась система

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + h(u, v)(u + 1) - u, & |x| < 1, \\ v_t = v_{xx} - h(u, v)(v + 1) - v, & |x| < 1, \end{cases} \quad (4.27)$$

с граничными условиями Неймана и положительными начальными данными. В качестве примера функции $h(u, v)$, удовлетворяющей всем требованиям из [20], можно взять

$$h(u, v) = uv(u - v)$$

из [25].

То, что все положительные решения соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} U_t = h(U, V)(U + 1) - u, \\ V_t = -h(U, V)(V + 1) - v \end{cases}$$

стремятся к нулю, вытекает из следующего простого наблюдения:

$$(U + V + UV)_t = -(U + V + 2UV).$$

4.6. Линейно порожденное разрушение решений. Морган отметил, что система (4.4) неустойчива относительно линейных возмущений. Действительно, если мы добавим член $(-U, -aV)$, $a \geq 0$, к правой части системы (4.4), то у возмущенной системы будут решения, которые разрушаются за конечное время. Из леммы 4.1 следует, что система, рассмотренная в теореме 4.2, неустойчива относительно возмущений $(-aU, -bV)$, где $b > a$. Легко показать, что линейное возмущение $(V - U, U - V)$ приводит к появлению разрушающихся решений в примере п. 4.5. Такое явление можно назвать *линейно порожденным разрушением решений*.

Ниномия и Вайнбергер [13] построили пример, в котором линейное возмущение $(-U, -V)$, направленное "точно вовнутрь", приводит к разрушению решений, в то время как у исходной системы (4.1) имеется глобальный аттрактор. В работе [14] тех же авторов исследованы условия возникновения линейно порожденного разрушения решений для однородных систем.

5. Разрушение решений, исчезающее за счет диффузии

В этом разделе мы исследуем вопрос, противоположный рассмотренному выше: может ли диффузия предотвратить разрушение решений? Более точно, могут ли все решения системы (1.2) с подходящими граничными значениями быть глобальными по времени при наличии у системы (1.1) решений, которые разрушаются за конечное время? Для задачи Неймана такая возможность исключена, поскольку пространственно однородные решения системы (1.2) разрушаются, если разрушаются решения системы (1.1). Поэтому ниже мы рассматриваем только однородную задачу Дирихле.

Фила, Ниномия и Вазкез [5] рассмотрели следующую систему:

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + |u - v|^{p-1}(u - v), & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = d_2 \Delta v + |u - v|^{p-1}(u - v) - v, & x \in \Omega, t > 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Из леммы 4.3 вытекает, что некоторые решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} U_t &= |U - V|^{p-1}(U - V), \\ V_t &= |U - V|^{p-1}(U - V) - V \end{aligned} \quad (5.2)$$

разрушаются за конечное время при $p > 1$. Однако все решения системы (5.1) с граничными условиями Дирихле

$$u(x, t) = v(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (5.3)$$

глобальны по времени, равномерно ограничены и стремятся к $(0, 0)$ в $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ при $t \rightarrow \infty$ при условии, что $(N - 2)p < N + 2$ и

$$(d_1 - d_2)\mu_D > 1, \quad (5.4)$$

где μ_D – первое собственное значение задачи Дирихле для оператора $-\Delta$.

Дадим набросок доказательства. Пусть $(u(x, t), v(x, t))$ – решение задачи (5.1), (5.3). Как и в п. 4.4, положим

$$w(x, t) := u(x, t) - v(x, t).$$

Тогда для (w, v) имеем

$$\begin{cases} w_t = d_1 \Delta w + (d_1 - d_2) \Delta v + v, \\ v_t = d_2 \Delta v - v + |w|^{p-1}w. \end{cases} \quad (5.5)$$

В силу (5.4) положительный самосопряженный оператор $-(d_1 - d_2)\Delta - 1$ имеет обратный оператор $\mathcal{K}$,

$$\mathcal{K} := (-(d_1 - d_2)\Delta - 1)^{-1},$$

удовлетворяющий оценке

$$\|\mathcal{K}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))} \leq \frac{1}{(d_1 - d_2)\mu_D - 1}.$$

Из (5.5) получаем

$$v = \mathcal{K}(d_1 \Delta w - w_t)$$

и

$$\mathcal{K}(d_1 \Delta w_t - w_{tt}) = d_2 \mathcal{K} \Delta(d_1 \Delta w - w_t) - \mathcal{K}(d_1 \Delta w - w_t) + |w|^{p-1} w. \quad (5.6)$$

Для упрощения записи введем норму

$$\|\varphi\|_{-1} = \|\mathcal{K}^{1/2} \varphi\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{для } \varphi \in L^2(\Omega).$$

Умножая (5.6) на w_t и интегрируя по x по области Ω , приходим к

$$\begin{aligned} -d_1 \|(-\Delta)^{1/2} w_t\|_{-1}^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_t\|_{-1}^2 &= \frac{d_1 d_2}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta w\|_{-1}^2 + d_2 \|(-\Delta)^{1/2} w_t\|_{-1}^2 \\ &+ \frac{d_1}{2} \frac{d}{dt} \|(-\Delta)^{1/2} w\|_{-1}^2 + \|w_t\|_{-1}^2 + \frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |w|^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Имеем

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) = -(d_1 + d_2) \|(-\Delta)^{1/2} w_t\|_{-1}^2 - \|w_t\|_{-1}^2 \leq 0, \quad (5.7)$$

где

$$\mathcal{L}(t) := \frac{1}{2} \|w_t\|_{-1}^2 + \frac{d_1 d_2}{2} \|\Delta w\|_{-1}^2 + \frac{d_1}{2} \|(-\Delta)^{1/2} w\|_{-1}^2 + \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |w|^{p+1} dx.$$

Таким образом, норма $\|w\|_{L^{p+1}(\Omega)}$ ограничена сверху. Поэтому $|w|^{p-1} w$ ограничена в $L^{(p+1)/p}(\Omega)$, и в силу второго уравнения из (5.5) v ограничена в $W^{2-\varepsilon, (p+1)/p}(\Omega)$. В силу первого уравнения из (5.5) получаем ограниченность w в $W^{2-2\varepsilon, (p+1)/p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $q > p+1$. Продолжая рассуждения в том же духе “перетягивания” между w и v , в конце концов получаем ограниченность w и v в $L^\infty(\Omega)$. Следовательно, решение может быть продолжено на все положительные значения t и будет равномерно ограниченным.

Тем же способом, что и в лемме 4.1, можно доказать, что $(u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \rightarrow (0, 0)$ в $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ при $t \rightarrow \infty$.

Далее возникает следующий естественный вопрос: можно ли построить подобные примеры для одного уравнения?

Ниже мы приводим пример, в котором все решения ограничены и стремятся к ограниченному стационарному решению, в то время как все положительные решения соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения разрушаются.

ТЕОРЕМА 5.1 [5; теорема 1]. *Существует гладкая функция $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(u) > 0$ при $u > 0$, такая, что*

(i) *все решения уравнения*

$$U_t = f(U) \quad (5.8)$$

с $U(0) > 0$ разрушаются за конечное время;

(ii) *все решения уравнения реакции-диффузии*

$$u_t = d \Delta u + f(u), \quad (5.9)$$

рассматриваемого в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, с ограниченными начальными данными и граничными условиями Дирихле

$$u(x, t) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad (5.10)$$

определены и ограничены при всех $t \geq 0$.

Более того, это утверждение справедливо для решений уравнения (5.9) с ненулевыми граничными значениями $0 \leq u(x, t) \leq C$ при $x \in \partial\Omega$.

Это означает, что диффузия может полностью подавлять разрушение решений с ограниченными начальными и граничными данными в задаче Дирихле для уравнения реакции-диффузии. Этот результат был получен еще в [18; гл. VII] для случая нелинейной диффузии. Теорема 5.1 показывает, что для того, чтобы остановить разрушение решений, достаточно и линейной диффузии. Ниже мы приводим более простое доказательство, чем в [5].

Для доказательства теоремы 5.1 нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 5.2. Для любого $\lambda > 0$ и любой возрастающей последовательности $\{a_n\}$ такой, что $a_1 > 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, существуют гладкая функция $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(u) > 0$ при $u > 0$, и последовательность $\{b_n\}$ такие, что

$$a_n < b_n < a_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.11)$$

$$\int_1^\infty \frac{du}{f(u)} < \infty, \quad (5.12)$$

$$\int_{a_n}^{b_n} \frac{du}{\sqrt{F(b_n) - F(u)}} \geq \sqrt{2} a_n^\lambda,$$

где $F' = f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную C^1 -функцию $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ такую, что $g(u) > 0$ при $u > 0$ и

$$\int_1^\infty \frac{ds}{g(s)} < \infty, \quad g(s) > 1 \quad \text{для} \quad s \geq 1. \quad (5.13)$$

Возьмем некоторые последовательности $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ и $\{d_n\}$ ($a_n < b_n < c_n < a_{n+1}$), которые будут определены позднее (см. (5.15)–(5.17)). С их помощью построим вспомогательную функцию $\tilde{g}$, изменяя значения функции g на интервалах $[a_n, b_n]$ и $[b_n, c_n]$ следующим образом:

$$\tilde{g}(u) = \begin{cases} d_n + \frac{g(a_n) - d_n}{b_n - a_n}(b_n - u) & \text{при } a_n \leq u \leq b_n, \\ d_n + \frac{g(c_n) - d_n}{c_n - b_n}(u - b_n) & \text{при } b_n \leq u \leq c_n. \end{cases}$$

Простые вычисления показывают, что

$$\int_{a_n}^{b_n} \frac{du}{\tilde{g}(u)} = \int_{a_n}^{b_n} \left(d_n + \frac{g(a_n) - d_n}{b_n - a_n}(b_n - u) \right)^{-1} du = \frac{b_n - a_n}{g(a_n) - d_n} \log \frac{g(a_n)}{d_n}$$

и

$$\int_{b_n}^{c_n} \frac{du}{\tilde{g}(u)} = \int_{b_n}^{c_n} \left(d_n + \frac{g(c_n) - d_n}{c_n - b_n} (u - b_n) \right)^{-1} du = \frac{c_n - b_n}{g(c_n) - d_n} \log \frac{g(c_n)}{d_n}. \quad (5.14)$$

Рассмотрим решение v_n задачи

$$v_{xx} + \tilde{g}(v) = 0, \quad v_x(0) = 0, \quad v(0) = b_n.$$

Пусть l_n – положительный корень уравнения $v_n(x) = a_n$. Легко показать, что

$$v_n(x) = \frac{g(a_n)b_n - a_nd_n}{g(a_n) - d_n} - \frac{(b_n - a_n)d_n}{g(a_n) - d_n} \cosh \sqrt{\frac{g(a_n) - d_n}{b_n - a_n}} x,$$

откуда

$$l_n \geq \sqrt{\frac{b_n - a_n}{g(a_n) - d_n}} \log \frac{g(a_n)}{d_n}.$$

Если выбрать b_n и d_n таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{b_n - a_n}{g(a_n) - d_n} = \left(\log \frac{g(a_n)}{d_n} \right)^{-3/2} = a_n^{-6\lambda}$$

с некоторым $\lambda > 1$, а именно

$$b_n = a_n + (g(a_n) - d_n) \left(\log \frac{g(a_n)}{d_n} \right)^{-3/2} = a_n + g(a_n)(1 - e^{-a_n^{4\lambda}}) a_n^{-6\lambda}, \quad (5.15)$$

$$d_n = g(a_n) e^{-a_n^{4\lambda}}, \quad (5.16)$$

то

$$l_n = \sqrt{2} a_n^\lambda, \quad \sum_n \int_{a_n}^{b_n} \frac{du}{\tilde{g}(u)} = \sum_n a_n^{-2\lambda}.$$

Пусть β_n – положительные числа такие, что $\sum_n \beta_n < \infty$. Зафиксируем достаточно большое число a_n , $a_n > \max\{\beta_n^{-1/(2\lambda)}, c_{n-1}\}$. В силу (5.14) c_n можно взять настолько близким к b_n , что

$$\int_{b_n}^{c_n} \frac{du}{\tilde{g}(u)} = \frac{c_n - b_n}{g(c_n) - d_n} \log \frac{g(c_n)}{d_n} \leq \beta_n. \quad (5.17)$$

Таким образом, для $\tilde{g}$ выполнены условия (5.11) и (5.12). Теперь в качестве f можно взять любую гладкую функцию, удовлетворяющую неравенствам

$$\frac{1}{2} \tilde{g}(u) \leq f(u) \leq \tilde{g}(u). \quad (5.18)$$

Условие (5.11) для f очевидно. Поскольку

$$\int_u^{b_n} f(s) ds = F(b_n) - F(u),$$

то, интегрируя второе неравенство в (5.17) по отрезку $[b_n, u]$, получаем

$$F(b_n) - F(u) \leq \tilde{G}(b_n) - \tilde{G}(u).$$

Следовательно, f удовлетворяет и (5.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Из леммы 5.2 непосредственно вытекает существование верхних решений u_n , удовлетворяющих

$$u_{nxx} + f(u_n) = 0 \quad \text{при} \quad -a_n^\lambda < x < a_n^\lambda, \quad (5.19)$$

$$u_{nx}(0) = 0, \quad u_n(x) \geq a_n \quad \text{при} \quad -a_n^\lambda < x < a_n^\lambda. \quad (5.20)$$

Предположим, что Ω – ограниченная область. Пусть $u(x, t)$ – решение уравнения (5.9) с $u(x, 0) = u_0(x)$. Для любой ограниченной начальной функции $u_0(x)$ найдется такое положительное число n , что

$$\begin{aligned} \{x_1 \mid x = (x_1, \hat{x}) \in \Omega\} &\subset [-a_n^\lambda, a_n^\lambda], \\ u_0(x) &< a_n \leq u_n(x_1) \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Очевидно, на границе имеем $u(\cdot, t) \leq u_n$. Тогда в силу принципа максимума $u(x, t) \leq u_n(x_1)$ при всех $t > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Очевидно, что пространственно однородные решения уравнения (5.9) с граничными условиями Неймана (1.3) разрушаются за конечное время, если функция f такова, что $f(u) > 0$ при $u > 0$ и

$$\int_1^\infty \frac{du}{f(u)} < \infty.$$

Интересно проанализировать, как изменяется поведение решений уравнения (5.9) с граничным условием

$$\kappa \frac{\partial u}{\partial \nu} + (1 - \kappa)u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (5.21)$$

при изменении параметра $\kappa \in [0, 1]$. Из доказательства предыдущей теоремы имеем

$$\frac{|v'_n(l_n)|}{v_n(l_n)} = \frac{d_n}{a_n} \sqrt{\frac{b_n - a_n}{g(a_n) - d_n}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{g(a_n) - d_n}{b_n - a_n}} l_n \leq \frac{g(a_n)}{2a_n} \sqrt{\frac{b_n - a_n}{g(a_n) - d_n}} = \frac{g(a_n)}{a_n^{3\lambda+1}}.$$

Положим $g(u) = u^p$, и пусть $\lambda > (p - 1)/3$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|v'_n(l_n)|}{v_n(l_n)} = 0.$$

Таким образом, заключаем, что найдется такая функция f , что

- (i) если $\kappa \in [0, 1)$, то все решения задачи (5.9), (5.19) остаются ограниченными при $t > 0$;
- (ii) если $\kappa = 1$, то все положительные решения разрушаются за конечное время.

В [5] также был рассмотрен случай, когда область Ω совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^N$.

ТЕОРЕМА 5.4 [5; теорема 2]. Для любого $p > 1$ существует гладкая функция $f_p: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f_p(u) > 0$ при $u > 0$, $\limsup_{u \rightarrow \infty} u^{-p} f_p(u) > 0$, такая, что все решения уравнения (5.8) с $U(0) > 0$ разрушаются за конечное время, в то время как решения уравнения (5.9) с $\Omega = \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) существуют при всех $t \geq 0$ при условии, что $u(x, 0) = u_0(x) \geq 0$ ограничена и для некоторых $i \in \{1, \dots, N\}$ и $M > 0$ выполнено

$$|x_i|^{\frac{1}{p-1}} u_0(x) \leq M, \quad x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Для доказательства этой теоремы используются верхние решения из доказательства теоремы 5.1 в сочетании с решениями типа бегущей волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. N. Chueh, C. C. Conley, J. A. Smoller. Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations // Indiana Univ. Math. J. 1977. V. 26. №2. P. 373–392.
- [2] В. В. Чурбанов. Пример системы реакции с диффузией, в которой диффузионные члены приводят к взрыву // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. №6. С. 1308–1309.
- [3] E. Conway, D. Hoff, J. Smoller. Large time behavior of solutions of nonlinear reaction-diffusion equations // SIAM J. Appl. Math. 1978. V. 35. №1. P. 1–16.
- [4] M. Fila, H. Matano. Blow-up in nonlinear heat equations from the dynamical systems point of view // Handbook of Dynamical Systems. V. 2. Amsterdam: North-Holland, 2002. P. 723–758.
- [5] M. Fila, H. Ninomiya, J. L. Vázquez. Dirichlet boundary conditions can prevent blow-up in reaction-diffusion equations and systems // Discrete Contin. Dynam. Systems A. 2006. V. 14. №1. P. 63–74.
- [6] Y. Giga, R. V. Kohn. Characterizing blowup using similarity variables // Indiana Univ. Math. J. 1987. V. 36. №1. P. 1–40.
- [7] M. Guedda, M. Kirane. Diffusion terms in systems of reaction diffusion equations can lead to blow up // J. Math. Anal. Appl. 1998. V. 218. №1. P. 325–327.
- [8] J. K. Hale. Large diffusivity and asymptotic behavior in parabolic systems // J. Math. Anal. Appl. 1986. V. 118. №2. P. 455–466.
- [9] H. A. Levine. The role of critical exponents in blowup theorems // SIAM Rev. 1990. V. 32. №2. P. 262–288.
- [10] C. P. Lo. A blowup problem of reaction diffusion equation related to the diffusion induced blowup phenomenon // arXiv: math.AP/0307397v1.
- [11] N. Mizoguchi, H. Ninomiya, E. Yanagida. Diffusion-induced blowup in a nonlinear parabolic system // J. Dynam. Differential Equations. 1998. V. 10. №4. P. 619–638.
- [12] J. Morgan. On a question of blow-up for semilinear parabolic systems // Differential Integral Equations. 1990. V. 3. №5. P. 973–978.
- [13] H. Ninomiya, H. F. Weinberger. Pest control may make the pest population explode // Z. Angew. Math. Phys. 2003. V. 54. №5. P. 869–873.
- [14] H. Ninomiya, H. F. Weinberger. On p -homogeneous systems of differential equations and their linear perturbation // Appl. Anal. (to appear).
- [15] M. Pierre, D. Schmitt. Blowup in reaction-diffusion systems with dissipation of mass // SIAM J. Math. Anal. 1997. V. 28. №2. P. 259–269.
- [16] M. Pierre, D. Schmitt. Blowup in reaction-diffusion systems with dissipation of mass // SIAM Rev. 2000. V. 42. №1. P. 93–106.
- [17] N. Rashevsky. An approach to the mathematical biophysics of biological self-regulation and of cell polarity // Bull. Math. Biophys. 1940. V. 2. P. 15–25.

- [18] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
- [19] J. Smoller. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. New York: Springer-Verlag, 1983. (Grundlehren Math. Wiss. V. 258.)
- [20] Ph. Souplet. A note on diffusion-induced blow-up // J. Differential Equations (to appear).
- [21] A. M. Turing. The chemical basis of morphogenesis // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1952. V. B237. № 641. P. 37–72.
- [22] L. Wang, M. Y. Li. Diffusion-driven instability in reaction-diffusion systems // J. Math. Anal. Appl. 2001. V. 254. № 1. P. 138–153.
- [23] M. Wang, Q. Zhang. A note on a question of blow-up for semilinear parabolic equations // J. Math. Anal. Appl. 1996. V. 198. № 1. P. 289–300.
- [24] H. F. Weinberger. Invariant sets for weakly coupled parabolic and elliptic systems // Rend. Mat. (6). 1975. V. 8. P. 295–310.
- [25] H. F. Weinberger. An example of blowup produced by equal diffusions // J. Differential Equations. 1999. V. 154. № 1. P. 225–237.
- [26] E. Yanagida. Mini-maximizers for reaction-diffusion systems with skew-gradient structure // J. Differential Equations. 2002. V. 179. № 1. P. 311–335.
- [27] T. Yoshizawa. Stability Theory by Liapunov's Second Method. Tokyo: Math. Soc. Japan, 1966.

Comenius University, Bratislava, Slovakia;

Ryukoku University, Seta, Japan

E-mail: fila@fmph.uniba.sk; ninomiya@math.ryukoku.ac.jp

Поступила в редакцию

02.10.2005