Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Белов, Алгоритм проверки выполнения тождеств для представимых алгебр произвольной сигнатуры над кольцом, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 6, 227–228

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1685>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:35:39

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

АЛГОРИТМ ПРОВЕРКИ ВЫПОЛНЕНИЯ
ТОЖДЕСТВ ДЛЯ ПРЕДСТАВИМЫХ АЛГЕБР
ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИГНАТУРЫ НАД КОЛЬЦОМ

А. Я. Белов

Данная статья посвящена доказательству следующей теоремы:

ТЕОРЕМА. Пусть Φ – конечно порожденное нётерово ассоциативно коммутативное кольцо с единицей, A – представимая Φ -алгебра конечной сигнатуры Ω , f – многочлен, отвечающий сигнатуре Ω . Тогда существует алгоритм проверки выполнимости f в алгебре A .

Алгоритмические проблемы, связанные с представлениями алгебр рассматривались в работах [1], [2], [4]. Подробнее о многообразиях алгебр см. монографию [3].

Алгебра A *представима*, если она вкладывается в Z -алгебру B , нётерову над своим центроидом Z , который является нётеровым ассоциативно коммутативным кольцом с единицей, при этом Φ вкладывается в Z .

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ – многочлен с коэффициентами в произвольном кольце. Многочлен

$$g(y, z, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)|_{y+z \rightarrow x_i} - f(x_1, \dots, x_n)|_{y \rightarrow x_i} - f(x_1, \dots, x_n)|_{z \rightarrow x_i}$$

назовем *квазилинеаризацией f относительно переменной x_i* . Ясно, что квазилинеаризация тождества является его следствием. Если квазилинеаризация по x_i равна нулю, то многочлен *квазилинеен относительно x_i* ; если равна нулю каждая квазилинеаризация, то f *поликвазилинеен* или просто *квазилинеен*. Примером квазилинейного многочлена в коммутативной алгебре A над полем характеристики $p > 0$ служит многочлен $f(x) = x^p$.

Сведем ситуацию к случаю, когда f квазилинеен. Пусть g – некоторая собственная квазилинеаризация многочлена f , являющаяся его следствием. Если g не выполняется в A , то f не выполняется в A . Число этапов квазилинеаризации конечно (не превосходит $\deg(f)$), и потому в силу индукционных соображений (проверив выполнимость квазилинеаризаций f) можно считать, что многочлен f квазилинеен в A . В этом случае вместо переменных достаточно подставлять слова от образующих. Остается проверить, что достаточно подставлять слова ограниченной длины, и получить эффективную оценку.

Пусть алгебра B над нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом является нётеровым модулем над своим центроидом Z , а A есть Φ -подалгебра B . Пусть $\deg(f) = k$ и f зависит от переменных $x_1, \dots, x_r$. Сопоставим каждой переменной x_i Z -модуль $V_i \simeq B$, а каждому моному, входящему в f , – тензорное произведение (над Z) Z -модулей, отвечающих переменным монома

(в том же порядке). Сопоставим многочлену f сумму этих модулей, обозначив ее N . Специализации переменных отвечает элемент Z -модуля N .

Пусть алгебра A вложена в алгебру B ; $a_1, \dots, a_s$ — образующие A . Через N_q обозначим Z -подмодуль в N , отвечающий специализациям переменных x_i в мономы q от образующих a_i .

Ясно, что система $\{N_q\}$ образует возрастающую цепочку Z -подмодулей N , которая стабилизируется на некотором шаге q_0 , и это q_0 эффективно вычислимо. Из определения числа q_0 вытекает следующая лемма.

ЛЕММА. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — многочлен степени q_0 . Тогда множество значений f есть линейная комбинация (над Z) его значений на словах степени не выше q_0 .

Ясно, что для проверки того, обращается ли f тождественно в нуль при подстановке вместо переменных слов от образующих a_i , достаточно проверить только слова длины не выше q_0 , т.е. осуществить конечный перебор.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Я. Белов. Алгебры с полиномиальными тождествами: представления и комбинаторные методы // Дисс. . . . докт. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 2002. [2] В. Н. Латышев. Комбинаторная теория колец. Стандартные базисы. М.: МГУ, 1988. [3] L. H. Rowen. Polynomial Identities in Ring Theory. New York: Acad. Press, 1980. [4] A. Belov, V. Borisenko, V. Latyshev. Monomial Algebras. New York: Plenum, 1998.

Московский институт открытого образования,
Hebrew University of Jerusalem

Принято редколлегией
22.09.2005