Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Адрианов, Г. Б. Шабат, Функции Белого 4-реберных детских рисунков
рода 2, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 6, 229–230

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1686>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:29:07

ФУНКЦИИ БЕЛОГО 4-РЕБЕРНЫХ ДЕТСКИХ РИСУНКОВ РОДА 2

Н. М. Адрианов, Г. Б. Шабат

1. Введение. Детским рисунком мы называем граф Γ , вложенный в связную компактную ориентированную поверхность $\mathcal{X}$ таким образом, что дополнение $\mathcal{X} \setminus \Gamma$ гомеоморфно несвязному объединению открытых дисков. Пусть X – полная гладкая неприводимая комплексная кривая. Функция β на X называется (чистой) *функцией Белого*, если β не имеет критических значений кроме 0, 1 и ∞ , причем все прообразы $\beta^{-1}(1)$ двукратны. Пара (X, β) , где β – функция Белого, называется *парой Белого*.

Пусть (X, β) – пара Белого. Рассмотрим граф $\Gamma = \beta^{-1}([0, 1])$ на X , вершинами которого являются прообразы $\beta^{-1}(0)$. Тогда (X, Γ) – детский рисунок, причем каждый детский рисунок можно задать единственной (с точностью до изоморфизма) парой Белого.

Термин “детский рисунок” был предложен А. Гротендиком [1], который и обратил внимание на связь графов на поверхностях с алгебраическими кривыми и теорией Галуа. Современный обзор теории детских рисунков можно найти в [2].

2. Перечисление. Поскольку у рисунка есть, как минимум, одна вершина и одна грань, из формулы Эйлера $V - E + F = 2 - 2g$ видно, что для рода $g = 2$ минимально возможное количество ребер равно 4. Несложно перечислить 4-реберные детские рисунки рода 2. Таких рисунков существует всего 4, соответствующие склейки 8-угольника задаются гауссовыми словами $abcdabcd$, $ababcdcd$, $abacbdcd$, $abacdbcd$ и изображены на рис. 1.

Рис. 1. Склейки 8-угольника рода 2

Группа автоморфизмов $\text{Aut}(D)$ одноклеточного рисунка D , представленного в виде склейки правильного многоугольника, есть циклическая группа, состоящая из вращений многоугольника, оставляющих склейку неизменной. Легко видеть, что $\text{Aut}(A)$ – циклическая группа порядка 8, $\text{Aut}(B)$ – циклическая группа порядка 2, $\text{Aut}(C_1)$ и $\text{Aut}(C_2)$ – тривиальны.

3. Самодвойственность. Если пара Белого (X, β) задает детский рисунок D , то пара $(X, 1/\beta)$ также является парой Белого и задает двойственный рисунок D^* . Вершины рисунка D^* совпадают с центрами граней рисунка D , и наоборот. Рисунок D называется *самодвойственным*, если он изоморфен двойственному: $D \simeq D^*$. В терминах пары Белого (X, β) это означает, что существует автоморфизм кривой $\tau: X \rightarrow X$ такой, что $\tau^*\beta = 1/\beta$.

Поскольку группы автоморфизмов рисунков D и D^* изоморфны, рисунки A и B самодвойственны: они однозначно определяются родом, количеством ребер и группой автоморфизмов. Случай рисунков C_1 и C_2 требует более тщательных рассмотрений: они могли бы быть двойственными друг другу. Тем не менее, оказывается верным следующее предложение.

Предложение. Рисунки A, B, C_1, C_2 – самодвойственные.

4. Пары Белого. Пусть (X, β) – пара Белого одного из рисунков A, B, C_1, C_2 . Тогда дивизор функции Белого имеет вид $(\beta) = 8(A_0 - A_\infty)$, где $A_0, A_\infty \in X$ – единственный нуль и единственный полюс функции β .

Пусть $\text{Cl}(X)$ – группа классов дивизоров алгебраической кривой X , см. [3]. Будем обозначать $m\Gamma$ подгруппу m -кручения абелевой группы Γ . Тогда из условия $(\beta) = 8(A_0 - A_\infty)$ следует, что $A_0 - A_\infty \in 8\text{Cl}(X)$ и имеется 3 возможности:

(A) $A_0 - A_\infty \in {}_2\text{Cl}(X)$, (B) $A_0 - A_\infty \in {}_4\text{Cl}(X) \setminus {}_2\text{Cl}(X)$, (C) $A_0 - A_\infty \in {}_8\text{Cl}(X) \setminus {}_4\text{Cl}(X)$.

Оказывается, что все они реализуются: случай (A) соответствует рисунку A, случай (B) – рисунку B, случай (C) – рисункам C_1 и C_2 . В случае (A) функция β является четвертой степенью некоторой функции на X , в случае (B) – квадратом некоторой функции на X . В случае (C) дивизор $4(A_0 - A_\infty)$ имеет порядок 2 в $\text{Cl}(X)$, т.е. он линейно эквивалентен дивизору $W_1 - W_2$, где W_1, W_2 – точки Вейерштрасса гиперэллиптической кривой X . Следовательно, в этом случае β можно представить в виде

$$\beta = \frac{x - x(W_1)}{x - x(W_2)} h^2 = \frac{((x - x(W_1))h)^2}{(x - x(W_1))(x - x(W_2))}.$$

Описать все дальнейшие детали вычислений не позволяет объем заметки, поэтому ограничимся формулировкой результата.

ТЕОРЕМА. (i) Пара Белого рисунка A задается уравнениями

$$y^2 = x^5 - x, \quad \beta = x^4.$$

(ii) Пара Белого рисунка B задается уравнениями

$$y^2 = (x^2 - 2)(x^4 - 2x^2 + 2), \quad \beta = -((1 - x)^2(1 + x)^2 - xy)^2.$$

(iii) Положим $\varepsilon = 1 \pm \sqrt{2}$, $\omega = \varepsilon + 1/\varepsilon + 1 = 1 \pm 2\sqrt{2}$,

$$Q_2(x) = (x - \varepsilon)(x - 1/\varepsilon) = x^2 + (1 - \omega)x + 1,$$

$$Q_3(x) = (x + 1)(x^2 - 2\varepsilon x + 1),$$

$$E_2(x) = -\omega x^2 + 6x - \omega,$$

$$E_4(x) = (x^2 - 2\varepsilon x - \omega)(-\omega x^2 - 2\varepsilon x + 1).$$

Тогда пары Белого рисунков C_1 и C_2 задаются уравнениями

$$y^2 = E_2(x)E_4(x), \quad \beta = -\frac{1}{16\varepsilon^2} \frac{(Q_3(x)E_2(x) + Q_2(x)y)^2}{E_2(x)}.$$

Значение $\varepsilon = 1 - \sqrt{2}$ соответствует рисунку C_1 , а значение $\varepsilon = 1 + \sqrt{2}$ – рисунку C_2 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Grothendieck // London Math. Soc. Lecture Notes Series. 1997. V. 242. P. 5–48.
 [2] S. K. Lando, A. K. Zvonkin. Graphs on Surfaces and Their Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2004. (Encyclopedia Math. Sci. V. 141.) [3] Р. Хартсхорн. Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
 Российский государственный гуманитарный университет,
 Независимый московский университет

Принято редколлегией
 22.09.2005

E-mail: nikolai_adrianov@cnit.msu.ru; george@shabat.mccme.ru