Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. О. Орлов, Производные категории когерентных пучков и мотивы, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 6, 231–232

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1687>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:48:21

ПРОИЗВОДНЫЕ КАТЕГОРИИ КОГЕРЕНТНЫХ ПУЧКОВ И МОТИВЫ

Д. О. Орлов

Ограниченная категория когерентных пучков $\mathbb{D}^b(X)$ – это триангулированная категория, которую естественно сопоставить алгебраическому многообразию X . Иногда случается, что для двух разных многообразий X и Y имеется эквивалентность $\mathbb{D}^b(X) \simeq \mathbb{D}^b(Y)$. Возникает естественный вопрос: можно ли в такой ситуации что-то сказать о мотивах данных многообразий? Первый же такой пример [1] – абелево многообразие A и его двойственное $\hat{A}$ – показывает нам, что мотивы данных многообразий не обязаны быть изоморфны. Однако, по-видимому, что во всех известных примерах их мотивы с рациональными коэффициентами являются изоморфными.

Напомним определение категории эффективных мотивов Чжоу $\mathrm{SH}^{\mathrm{eff}}(k)$ над полем k . Категория $\mathrm{SH}^{\mathrm{eff}}(k)$ получается как псевдоабелева оболочка (т.е. формальным добавлением коядер всех проекторов) из категории, объекты которой – гладкие проективные схемы над k , а морфизмы из X в Y – это сумма $\bigoplus_{X_i} A^m(X_i \times Y)$ (по всем компонентам связности X_i) групп циклов коразмерности $m = \dim Y$ на $X_i \times Y$ по модулю рациональной эквивалентности (см. [2], [3]). В [4] В. Воеводский определил триангулированную категорию геометрических мотивов $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(k)$. Он стартовал с аддитивной категории $\mathrm{SmCor}(k)$, объекты которой – гладкие схемы конечного типа над k , а морфизмы из X в Y – это свободная абелева группа, порожденная замкнутыми целыми подсхемами $Z \subset X \times Y$, конечными над X и сюръективными над некоторой компонентой связности X . Имеется естественное вложение $[-]: \mathrm{Sm}(k) \rightarrow \mathrm{SmCor}(k)$ категории $\mathrm{Sm}(k)$ гладких схем конечного типа над k . Категория $\mathrm{SmCor}(k)$ аддитивна, и $[X \amalg Y] = [X] \oplus [Y]$. Далее он рассмотрел факторизацию гомотопической категории $\mathcal{H}^b(\mathrm{SmCor}(k))$ ограниченных комплексов по минимальной толстой подкатегории T , содержащей все объекты вида $[X \times \mathbb{A}^1] \rightarrow [X]$ и $[U \cap V] \rightarrow [U] \oplus [V] \rightarrow [X]$ для любого открытого покрытия $U \cup V = X$. Триангулированная категория $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(k)$ определяется как псевдоабелева оболочка от $\mathcal{H}^b(\mathrm{SmCor}(k))/T$ (см. [4], [3]).

Существует канонический функтор $\mathrm{SH}^{\mathrm{eff}}(k) \rightarrow \mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(k)$, который является полным вложением, если над полем k существует разрешение особенностей [4; 4.2.6]. Таким образом, все, равно в какой из двух категорий (в $\mathrm{SH}^{\mathrm{eff}}(k)$ или в $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(k)$) рассматривать мотивы гладких проективных многообразий. Обозначим мотив многообразия X через $M(X)$, а через $M(X)_{\mathbb{Q}}$ его мотив в категории мотивов с рациональными коэффициентами $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(k) \otimes \mathbb{Q}$ (и $\mathrm{SH}^{\mathrm{eff}}(k) \otimes \mathbb{Q}$).

ГИПОТЕЗА 1. Пусть X и Y – гладкие проективные многообразия и $F: \mathbb{D}^b(X) \rightarrow \mathbb{D}^b(Y)$ – вполне строгий функтор. Тогда мотив $M(X)_{\mathbb{Q}}$ является прямым слагаемым в $M(Y)_{\mathbb{Q}}$. Если F есть эквивалентность, то $M(X)_{\mathbb{Q}}$ и $M(Y)_{\mathbb{Q}}$ изоморфны.

В категории $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(k)$ имеется тензорное произведение, и $M(X) \otimes M(Y) = M(X \times Y)$. Определим мотив Тейта $\mathbb{Z}(1)$ как образ комплекса $[\mathbb{P}^1] \rightarrow [\mathrm{Spec}(k)]$, сосредоточенного в степенях 2 и 3, и положим $M(p) = M \otimes \mathbb{Z}(1)^{\otimes p}$ для любого мотива $M \in \mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(k)$ и $p \in \mathbb{N}$. Триангулированная категория геометрических мотивов $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ получается из $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(k)$ формальным обращением функтора $-\otimes \mathbb{Z}(1)$. Важным и нетривиальным фактом здесь является утверждение, что канонический функтор $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(k) \rightarrow \mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ является вполне строгим [4; 4.3.1]. Более того (см. [4]), для гладких проективных X и Y и любого целого числа i имеется равенство

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k)}(M(X), M(Y)(i)[2i]) \cong A^{m+i}(X \times Y), \quad \text{где } m = \dim Y.$$

Предположим, что имеется вполне строгий функтор $F: \mathbb{D}^b(X) \rightarrow \mathbb{D}^b(Y)$, $\dim X = n$, $\dim Y = m$. Этот функтор имеет правый сопряженный F^* по [5], и по теореме 2.2 из [6] (см. также [7; 3.2.1]) функтор F представляется объектом на произведении $X \times Y$, т.е. $F \cong \Phi_{\mathcal{A}}$,

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-01034), гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых (МД-2731.2004.1), Американского фонда гражданских исследований CRDF (RUM1-2661-MO-05) и Фонда содействия отечественной науке.

где $\Phi_{\mathcal{A}} = \mathbf{R}p_{2*}(p_1^*(-) \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{A})$ для некоторого $\mathcal{A} \in \mathbb{D}^b(X \times Y)$. Каждому функтору вида $\Phi_{\mathcal{A}}: \mathbb{D}^b(X) \rightarrow \mathbb{D}^b(Y)$ можно сопоставить элемент $a \in A^*(X \times Y, \mathbb{Q})$ по правилу

$$a = p_1^* \sqrt{\mathrm{td}_X} \cdot \mathrm{ch}(\mathcal{A}) \cdot p_2^* \sqrt{\mathrm{td}_Y}, \quad (1)$$

где td_X и td_Y – классы Тодда многообразий X и Y . Цикл a имеет смешанный тип, рассмотрим его разложение на компоненты $a = a_0 + \dots + a_{n+m}$, где индекс – это коразмерность цикла на $X \times Y$. Каждая компонента a_q задает отображение мотивов

$$\alpha_q: M(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow M(Y)_{\mathbb{Q}}(q-m)[2(q-m)].$$

А весь цикл a задает отображение $\alpha: M(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \bigoplus_{i=-m}^n M(Y)_{\mathbb{Q}}(i)[2i]$. Теперь рассмотрим объект $\mathcal{B} \in \mathbb{D}^b(X \times Y)$, который представляет (левый) сопряженный функтор F^* , т.е. $F^* \cong \Psi_{\mathcal{B}}$, где $\Psi_{\mathcal{B}} = \mathbf{R}p_{1*}(p_2^*(-) \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{B})$. Сопоставим объекту $\mathcal{B}$ цикл $b = b_0 + \dots + b_{n+m}$ по той же самой формуле (1). Цикл b индуцирует отображение $\beta: \bigoplus_{i=-m}^n M(Y)_{\mathbb{Q}}(i)[2i] \rightarrow M(X)_{\mathbb{Q}}$. Так как функтор $\Phi_{\mathcal{A}}$ вполне строгий, то композиция $\Psi_{\mathcal{B}} \circ \Phi_{\mathcal{A}}$ изоморфна тождественному функтору. А применяя теорему Римана–Роха–Гротендика, получаем, что и композиция

$$M(X)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=-m}^n M(Y)_{\mathbb{Q}}(i)[2i] \xrightarrow{\beta} M(X)_{\mathbb{Q}}$$

является тождественной, т.е. $M(X)_{\mathbb{Q}}$ – прямое слагаемое в $\bigoplus_{i=-m}^n M(Y)_{\mathbb{Q}}(i)[2i]$.

Предположим теперь, что $\dim X = \dim Y = n$ и что носитель объекта $\mathcal{A}$ также имеет размерность n . Значит, $a_q = 0$ при $q = 0, 1, \dots, n-1$, т.е. $a = a_n + \dots + a_{2n}$. Нетрудно видеть, что в этом случае и $b = b_n + \dots + b_{2n}$. Отсюда следует, что композиция $\beta \cdot \alpha: M(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow M(X)_{\mathbb{Q}}$, которая является тождественной, совпадает с композицией $\beta_n \cdot \alpha_n$. И, значит, $M(X)_{\mathbb{Q}}$ является прямым слагаемым в $M(Y)_{\mathbb{Q}}$. Более того, в данной ситуации циклы a_n и b_n целочисленные. Следовательно, и целочисленный мотив $M(X)$ является прямым слагаемым в $M(Y)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X и Y – гладкие проективные многообразия размерности n и $F: \mathbb{D}^b(X) \rightarrow \mathbb{D}^b(Y)$ вполне строгий функтор такой, что размерность носителя объекта $\mathcal{A}$, представляющего функтор F , равна n . Тогда мотив $M(X)$ является прямым слагаемым мотива $M(Y)$. Если к тому же функтор F есть эквивалентность, то мотивы $M(X)$ и $M(Y)$ изоморфны.

Примеры таких функторов известны, они приходят из бирациональной геометрии (см., например, [7]). В этих примерах одна из компонент $\mathrm{supp}(\mathcal{A})$ задает бирациональное отображение $X \dashrightarrow Y$. Раздутья и антифлипы дают вполне строгие функторы, а флопы – эквивалентности. Отметим, что изоморфизм мотивов влечет изоморфизм всех реализаций.

Для произвольной эквивалентности $\Phi_{\mathcal{A}}: \mathbb{D}^b(X) \rightarrow \mathbb{D}^b(Y)$ отображение мотивов $\alpha_n: M(X)_{\mathbb{Q}} \rightarrow M(Y)_{\mathbb{Q}}$, заданное циклом $a_n \in A^n(X \times Y, \mathbb{Q})$, не обязано быть изоморфизмом. Однако вполне возможно, что верна следующая гипотеза, уточняющая гипотезу 1.

ГИПОТЕЗА 2. Пусть $\mathcal{A}$ – объект на $X \times Y$, для которого $\Phi_{\mathcal{A}}: \mathbb{D}^b(X) \rightarrow \mathbb{D}^b(Y)$ есть эквивалентность. Тогда найдутся линейные расслоения L и M на X и Y соответственно такие, что компонента a'_n объекта $\mathcal{A}' := p_1^* L \otimes \mathcal{A} \otimes p_2^* M$ задает изоморфизм между мотивами $M(X)_{\mathbb{Q}}$ и $M(Y)_{\mathbb{Q}}$.

Автор благодарен Ю. И. Манину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Mukai // Nagoya Math. J. 1981. V. 81. P. 153–175. [2] Ю. И. Манин // Матем. сб. 1968. Т. 77. № 4. С. 475–507. [3] S. Bloch // Proc. Sympos. Pure Math. 1997. V. 62. Part 1. P. 329–359. [4] V. Voevodsky // Ann. of Math. Stud. 2000. V. 143. P. 188–238. [5] A. Bondal, M. Van den Bergh // Mosc. Math. J. 2003. V. 3. № 1. P. 1–36. [6] D. Orlov // J. Math. Sci. (New York). 1997. V. 84. № 5. P. 1361–1381. [7] Д. О. Орлов // УМН. 2003. Т. 58. № 3. С. 89–172.