Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Шамолин, Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbb{R}^4$, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 6, 233–234

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1688>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:19:04

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРИРУЕМОМ СЛУЧАЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ НА $so(4) \times \mathbb{R}^4$

М. В. ШАМОЛИН

Нет необходимости перечислять весь спектр имеющихся работ по интегрированию уравнений движения многомерного твердого тела. Отметим лишь работы [1], [2], которые связаны с представляемой статьей.

Структура динамических уравнений движения свободного двумерного и трехмерного твердого тела на $so(2) \times \mathbb{R}^2$ и $so(3) \times \mathbb{R}^3$ соответственно сохраняется при переносе динамических свойств на случай большей размерности. Настоящая статья посвящена изучению движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле сил сопротивления с так называемой переменной диссипацией [3].

В работе предполагается, что все взаимодействие (четырёхмерного) твердого тела со средой сосредоточено на той части (трехмерной) поверхности тела, которая имеет форму (трехмерного) шара. При этом вектор угловой скорости движения такого тела – элемент алгебры $so(4)$, а скорость центра масс – элемент $\mathbb{R}^4$ (ср. с [4]).

Если оператор инерции в декартовой системе $Dx_1x_2x_3x_4$, связанной с телом (ось Dx_1 направлена вдоль оси динамической симметрии (см. далее), а декартова система $Dx_2x_3x_4$ связана с трехмерным шаром), имеет диагональный вид $\text{diag}\{I_1, I_2, I_3, I_4\}$ и $\Omega \in so(4)$ – матрица “угловой скорости” твердого тела, то та часть уравнений движения, которая отвечает алгебре $so(4)$, имеет следующий вид (ср. с [5]):

$$\Omega^\bullet \Lambda + \Lambda \Omega^\bullet + [\Omega, \Omega \Lambda + \Lambda \Omega] = M, \quad (1)$$

где $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, $\lambda_1 = (-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)/2, \dots, \lambda_4 = (I_1 + I_2 + I_3 - I_4)/2$, M – момент “внешних сил”, действующих на тело в $\mathbb{R}^4$, спроектированный на $so(4)$, $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор в $so(4)$. Матрицу Ω удобно представлять в естественных координатах следующим образом: $\omega_{12} = -\omega_6, \omega_{13} = \omega_5, \omega_{14} = -\omega_3, \omega_{23} = -\omega_4, \omega_{24} = \omega_2, \omega_{34} = \omega_1$, а момент внешних сил удобно представлять в виде $M = (0, 0, x_{4N}S, 0, -x_{3N}S, x_{2N}S) \in \mathbb{R}^6 \cong so(4)$ (ср. с [5]).

Поле сил определяем по аналогии с полем, используемым при моделировании воздействия сопротивляющейся среды на твердое тело в условиях струйного обтекания [6], [7]: если $(\nu, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ – сферические координаты в $\mathbb{R}^4$, то $x_{2N} = A \sin \alpha \cos \beta_1, x_{3N} = A \sin \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2, x_{4N} = A \sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2, S = B \cos \alpha \nu^2$.

В случае динамически симметричного твердого тела (когда $I_2 = I_3 = I_4$) уравнения (1) на нулевых уровнях циклических интегралов

$$\omega_1 = \omega_1^0 = 0, \quad \omega_2 = -\omega_2^0 = 0, \quad \omega_4 = \omega_4^0 = 0 \quad (n_0^2 = AB/(2I_2)) \quad (2)$$

при условии, когда на систему наложена неинтегрируемая сервосвязь (ср. с [7]) вида

$$\nu \equiv \text{const}, \quad (3)$$

примут вид

$$\begin{aligned} \omega_3^\bullet &= n_0^2 \nu^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2, & \omega_5^\bullet &= -n_0^2 \nu^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2, \\ \omega_6^\bullet &= n_0^2 \nu^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta_1. \end{aligned}$$

После замены “угловых скоростей” по формулам

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_3 \cos \beta_2 + \omega_5 \sin \beta_2, & z_2 &= -\omega_3 \sin \beta_2 \cos \beta_1 + \omega_5 \cos \beta_2 \cos \beta_1 + \omega_6 \sin \beta_1, \\ z_3 &= \omega_3 \sin \beta_2 \sin \beta_1 - \omega_5 \cos \beta_2 \sin \beta_1 + \omega_6 \cos \beta_1 \end{aligned}$$

и учета четырех условий (2), (3) совместные уравнения движения на $so(4) \times \mathbb{R}^4$ (уравнения (1) плюс уравнения Ньютона в $\mathbb{R}^4$) примут симметричный вид:

$$\begin{cases} \alpha^\bullet = -z_3 + \sigma n_0^2 \nu \sin \alpha, & z_3^\bullet = n_0^2 \nu^2 \sin \alpha \cos \alpha - (z_1^2 + z_2^2) \operatorname{ctg} \alpha, \\ z_2^\bullet = z_2 z_3 \operatorname{ctg} \alpha + z_1^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta_1, \\ z_1^\bullet = z_1 z_3 \operatorname{ctg} \alpha - z_1 z_2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta_1, & \beta_1^\bullet = z_2 \operatorname{ctg} \alpha, \quad \beta_2^\bullet = -z_1 \operatorname{ctg} \sin^{-1} \beta_1. \end{cases} \quad (4)$$

Однако после замены переменных $z_1, z_2 \rightarrow z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, $z_* = z_2/z_1$ система (4) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \alpha^\bullet &= -z_3 + \sigma n_0^2 \nu \sin \alpha, & z_3^\bullet &= n_0^2 \nu^2 \sin \alpha \cos \alpha - z^2 \operatorname{ctg} \alpha, & z^\bullet &= z z_3 \operatorname{ctg} \alpha, & (5) \\ z_*^\bullet &= \sqrt{1 + z_*^2} z \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta_1, & \beta_1^\bullet &= z z_* \operatorname{ctg} \alpha / \sqrt{1 + z_*^2}, & \beta_2^\bullet &= -z_1(z, z_*) \operatorname{ctg} \alpha \sin^{-1} \beta_1. & (6) \end{aligned}$$

Система (5) обладает двумя трансцендентными интегралами (ср. с [7]):

$$\begin{aligned} [z^2 + z_3^2 - \sigma n_0^2 \nu z_3 \sin \alpha + n_0^2 \nu^2 \sin^2 \alpha] / (z \sin \alpha) &= C_1 = \operatorname{const}, \\ G_4(z / \sin \alpha, z_3 / \sin \alpha, \sin \alpha) &= C_2 = \operatorname{const}. \end{aligned}$$

Первые два уравнения системы (6) имеют первый интеграл вида

$$\sqrt{1 + z_*^2} / \sin \beta_1 = C_3 = \operatorname{const}$$

и дополнительный первый интеграл

$$\pm \cos \beta_1 / \sqrt{C_3^2 - 1} = \sin \{C_3(\beta_2 + C_4)\}, \quad C_4 = \operatorname{const}.$$

Данная работа принадлежит направлению, развиваемому автором, в исследовании уравнений движения твердого тела на $so(4) \times \mathbb{R}^4$ при ненулевом неконсервативном моменте сил и впервые представляет результаты по данному вопросу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О.И. Богоявленский // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. №5. С. 1105–1108.
- [2] О.И. Богоявленский, Г.Ф. Ивах // УМН. 1985. Т. 40. №4. С. 145–146.
- [3] М. V. Shamolin // J. Math. Sci. (New York). 2003. V. 114. №1. P. 919–975.
- [4] М. В. Шамолин // Докл. РАН. 2000. Т. 375. №3. С. 343–346. [5] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко // Итоги науки и техники. Современные проблемы матем. Новейшие достижения. Т. 29. М.: ВИНТИ, 1986. С. 3–80. [6] С. А. Чаплыгин. Избранные труды. М.: Наука, 1976. [7] М. В. Шамолин // Докл. РАН. 1999. Т. 364. №5. С. 627–629.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
22.09.2005