Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Реповш, А. Б. Скопенков, Препятствия для расслоений Зейферта и обобщение теоремы Болсинова–Фоменко об интегрируемых гамильтоновых системах, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 3, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm169>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:06:32

ПРЕПЯТСТВИЯ ДЛЯ РАССЛОЕНИЙ ЗЕЙФЕРТА И ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ БОЛСИНОВА–ФОМЕНКО ОБ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ

Д. Реповш, А. Скопенков

В 1994 г. Болсинов и Фоменко [1] доказали теорему о топологической траекторной классификации невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы на трехмерных многообразиях постоянной энергии. Мотивировки и краткий обзор см. в [2; § 1], [1; § 1]. Они доказали, что две такие системы эквивалентны, если некоторые их инварианты совпадают. Инвариантом является граф с некоторыми дополнительными метками на его вершинах и ребрах. Одним из необходимых ограничений было то, что рассматриваемая гамильтонова система не имеет неустойчивых периодических орбит с неориентируемой сепаратрисой. Поскольку такой тип орбит встречается в примерах (например, в волчке Ковалевской), было интересно отбросить это ограничение. Мы показали, что теорема Болсинова–Фоменко верна без этого ограничения.

ТЕОРЕМА (ср. [1; теорема 4.1]). *Пусть X – множество невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы на ориентируемых трехмерных многообразиях постоянной энергии, с точностью до непрерывной траекторной эквивалентности, сохраняющей ориентацию. Тогда существует инъекция из X в множество t -оснащенных графов W с точностью до t -эквивалентности.*

Определения t -оснащенных графов и t -эквивалентности такое же, как в [1], см. также [2], [3]. На самом деле, более общая ситуация не требует добавлений и изменений по сравнению с [1], только P -метки могут быть атомами со звездочками. Заметим, что в [1; § 12.3 и § 13.5] описан образ инъекции из теоремы и зависимость t -меток от ориентации 3-многообразия постоянной энергии. Кроме того, в [1; § 13] было построено в некотором смысле более простое оснащение на W , названное t -молекулой. Все это тоже переносится на нашу более общую ситуацию, только P -метки могут быть атомами со звездочками.

Наше доказательство основано на следующем общем наблюдении, которое может быть применено и к другим проблемам. Бифуркация торов Лиувилля в боттовой интегрируемой гамильтоновой системе может быть описана окрестностью $F^{-1}(c)$, где F – дополнительный интеграл и c – его критическое значение. Если критическое подмногообразие дополнительного интеграла F , соответствующее c , – окружность, то эта окрестность является расслоением Зейферта Q над (незамкнутой) 2-поверхностью P [4]. Более точно, *дублем* P^* называется 2-поверхность с границей и инволюцией χ на P^* , имеющей лишь конечное число неподвижных точек, называемых *звездочками*. Положим $P = P^*/\chi$ (P^* называется дублем *поверхности* P). Обозначим через $p: P^* \rightarrow P$ проекцию. Обозначим через N p -образ множества неподвижных точек инволюции χ (т.е. звездочек). Обозначим через $\tilde{P}$ замкнутую поверхность, полученную приклеиванием дисков к граничным окружностям поверхности P . 3-*атомом* называется расслоение над S^1 со слоем P^* и сшивающим отображением χ , т.е. $Q(P^*) \cong P^* \times I / \{(a, 0) \sim (\chi a, 1)\}$ (ср. [2; Definition 2.2]). По [2; Definition 2.2] $Q(P^*)$ зависит только от P , а не от P^* . Поэтому в дальнейшем мы пишем $Q(P)$ или даже Q вместо $Q(P^*)$. Определим отображение $\pi: Q \rightarrow P$ формулой $\pi[(a, t)] = p(a)$ (расслоение Зейферта, имеющее сингулярные слои только над звездочками и только типа $(2, 1)$).

Чтобы исследовать бифуркацию торов Лиувилля, построим сечение Пуанкаре потока на Q [1]. Если критическая окружность имеет *ориентируемую* сепаратрисную диаграмму (или, эквивалентно, P не имеет звездочек), то $Q \cong P \times S^1$ и сечения Пуанкаре могут быть выбраны среди сечений тривиального расслоения. Тогда сечения Пуанкаре классифицируются методами классической теории препятствий. Если критическая окружность имеет *неориентируемую*

Д. Реповш частично поддержан исследовательскими грантами Министерства науки и технологии Республики Словения № J1-0885-0101-98 и SLO-AM 0020. А. Скопенков частично поддержан грантами Российского фонда фундаментальных исследований № 96-01-01166А и Международного научного фонда Сороса № а98-2315.

сепаратрисную диаграмму (или, эквивалентно, P имеет звездочки), то расслоение Зейферта не является локально-тривиальным расслоением. Несмотря на это, сечения Пуанкаре являются зейфертовыми аналогами сечений локально-тривиального расслоения. Вложение $f: P^* \rightarrow Q$ называется *сечением Зейферта*, если $\pi \circ f = p$. В гладкой категории нужно дополнительно предполагать, что f трансверсально слоям отображением π . В [1] сечения Зейферта назывались трансверсальными площадками. Основная часть нашего доказательства – классификация *зейфертовых* сечений расслоений Зейферта. Доказательство теоремы по модулю нижеследующей Классификационной Теоремы аналогично [1] (см. подробное доказательство в [3]). Мы пропускаем $\mathbb{Z}$ -коэффициенты в обозначении кохомологических групп. Для пространства с инволюцией симметричные (ко)гомологические группы обозначаются добавлением индекса S к обычному обозначению.

КЛАССИФИКАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА. *При фиксированном дубле P^* множество X сечений Зейферта с точностью до изотопии над π находится во взаимно однозначном соответствии с $H^1_S(P)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отображение

$$q: P^* \times S^1 \cong P^* \times I / \{(a, 0) \sim (a, 1)\} \rightarrow P^* \times I / \{(a, 0) \sim (\chi a, 1)\} \cong Q$$

формулой

$$q[(a, t)] = \begin{cases} [(a, 2t)], & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ [(\chi a, 2t - 1)], & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Поскольку χ инволюция, q корректно определено и непрерывно.

Пусть $f: P^* \rightarrow Q$ – сечение Зейферта. Для каждого $x \in P^* \setminus N$ существует *единственная* точка $f'(x) \in x \times S^1$ такая, что $qf'(x) = f(x)$. Для каждого $x \in N$ существуют *две* точки $s, t \in S^1$ такие, что $q(x, s) = q(x, t) = f(x)$. Поскольку маленькая проколотая дисковая окрестность точки x в P^* связна, мы можем взять в качестве $f'(x)$ либо (x, s) , либо (x, t) , так что отображение $f': P^* \rightarrow P^* \times S^1$ будет непрерывным. Это отображение f' – классическое сечение тривиального расслоения $P^* \times S^1 \rightarrow P^*$. Поскольку f вложение, $p_2 f'(x)$ и $p_2 f'(\chi x)$ не являются антиподами для любой точки $x \in P^*$. Здесь $p_2: P^* \times S^1 \rightarrow S^1$ – проекция. Поэтому f' может быть канонически гомотопировано *симметричному* сечению f'' (т.е. сечению f'' такому, что $p_2 f''(x) = p_2 f''(\chi x)$ для любого $x \in P^*$). Кроме того, для любого симметричного сечения $F: P^* \rightarrow P^* \times S^1$ отображение $q \circ F$ является сечением Зейферта и $(q \circ F)'' = F$. Очевидно, сечения Зейферта f и g изотопны над π тогда и только тогда, когда соответствующие симметрические сечения f'' и g'' симметрично гомотопны (или, эквивалентно, изотопны). Тогда X находится во взаимно однозначном соответствии с множеством X'' симметричных сечений тривиального расслоения $P^* \times S^1 \rightarrow P^*$ с точностью до симметричной гомотопии. Последнее, в свою очередь, находится во взаимно однозначном соответствии с $H^1_S(P^*)$. Легко проверить, что $H^1_S(P^*) \cong H^1(P)$.

Мы благодарим А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко за полезные обсуждения по теме работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 4. С. 27–80; № 5. С. 27–78.
- [2] Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. // УМН. 1990. Т. 45. № 2. С. 49–77.
- [3] Cavicchioli A., Repovš D., Skopenkov A. B. An extension of the Bolsinov–Fomenko theorem on classification of Hamiltonian systems // Rocky Mountain J. Math. (to appear). [4] Фоменко А. Т. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. С. 1276–1307.

University of Ljubljana, Ljubljana, Slovenia;
Школа им. А. Н. Колмогорова, Москва

Принято редколлегией
23.04.1999