Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Иванов, О дискретной аппроксимации опционов
Американского типа, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 1, 179–
180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1693>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 02:34:46

О дискретной аппроксимации опционов Американского типа

Р. В. Иванов

В непрерывной модели Блэка–Шоулса (см. [1])

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t dt, & r &\geq 0, \\ dS_t &= S_t(r dt + \sigma dW_t), & \sigma &> 0, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

решение задачи хеджирования опционов Американского типа (см. [2; разделы VIII.2, VIII.3]) в случае конечного временного горизонта T неизвестно. Вторым предлагается аппроксимация цен опционов данного типа с помощью дискретной биномиальной Δ -модели

$$\begin{aligned} gB_{n\Delta} - B_{(n-1)\Delta} &= r\Delta B_{(n-1)\Delta}, \\ S_{n\Delta} - S_{(n-1)\Delta} &= (e^{\sigma\varepsilon_n^\Delta} - 1)S_{(n-1)\Delta}, \end{aligned}$$

где ε_n^Δ , $n = 1, \dots, [T/\Delta]$, – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $\pm\sqrt{\Delta}$, а $\Delta > 0$ есть шаг модели. В дискретном случае цена может быть найдена с помощью метода обратной индукции (см. [2; разделы VI.2, VI.5, VIII.3]). Рассматриваются стандартные опционы с функциями выплат $f_t = e^{-\lambda t}g(S_t)$, где $g(S_t) = (S_t - K)^+$ (опцион покупателя) или $g(S_t) = (K - S_t)^+$ (опцион продавца) и $\lambda \geq 0$. В дискретном случае полагаем $f_{n\Delta} = (1 + \lambda\Delta)^{-n}g(S_{n\Delta})$. Пусть $S_0 = x$, $V(x, T)$ – цена опциона в непрерывной модели, а $V(x, T, \Delta)$ – в дискретной с шагом Δ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть в модели Блэка–Шоулса $r < \sigma^2/2$. Тогда существуют такие положительные константы C и c , зависящие только от параметров модели, что при $T \geq C \log \Delta^{-1}$ для всех достаточно малых $\Delta > 0$

$$|V(x, T) - V(x, T, \Delta)| \leq c\Delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $V(x) = V(x, \infty)$ и $V(x, \Delta) = V(x, \infty, \Delta)$. Пусть τ^* есть оптимальный момент остановки в задаче хеджирования в модели Блэка–Шоулса на бесконечном временном интервале, т.е.

$$V(x) = \mathbb{E}e^{-(r+\lambda)\tau^*}g(S_{\tau^*})I\{\tau^* < \infty\}$$

(см. [2; раздел VIII.2]), а $\mathfrak{M}_0^T$ – множество всех моментов остановки, принимающих значения на интервале $[0, T]$. Тогда

$$\begin{aligned} V(x, T) &= \sup_{\tau \in \mathfrak{M}_0^T} \mathbb{E}e^{-(\lambda+r)\tau}g(S_\tau) \\ &\geq \mathbb{E}e^{-(\lambda+r)\min(\tau^*, T)}g(S_{\min(\tau^*, T)}) \geq \mathbb{E}e^{-(\lambda+r)\tau^*}g(S_{\tau^*})I\{\tau^* \leq T\}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$V(x) - V(x, T) \leq \mathbb{E}e^{-(\lambda+r)\tau^*}g(S_{\tau^*})I\{T < \tau^* < \infty\}.$$

Аналогично, для Δ -дискретной модели

$$V(x, \Delta) - V(x, T, \Delta) \leq \mathbb{E}[(1 + \lambda\Delta)(1 + r\Delta)]^{-\tilde{\tau}}g(S_{\tilde{\tau}})I\{T < \tilde{\tau} < \infty\},$$

где $\tilde{\tau}$ есть оптимальный момент остановки в Δ -дискретной модели с бесконечным временным горизонтом (см. [2; раздел VI.5]). Отсюда следует, что для некоторой константы $c_0 > 0$

$$|V(x, T) - V(x, T, \Delta)| \leq |V(x) - V(x, \Delta)| + c_0 \max\{\mathbb{P}\{T < \tau^* < \infty\}, \mathbb{P}\{T < \tilde{\tau} < \infty\}\}. \quad (1)$$

Устремляя Δ к нулю, нетрудно получить, что

$$|V(x) - V(x, \Delta)| \leq c\Delta$$

для всех достаточно малых $\Delta > 0$ при некотором $c > 0$. Используя метод [3; теорема 3] для оценки второго слагаемого в правой части неравенства (1), окончательно имеем

$$|V(x, T) - V(x, T, \Delta)| \leq c\Delta + c_1 e^{-c_2 T} \quad (2)$$

для всех достаточно малых $\Delta > 0$ с некоторыми положительными константами c, c_1, c_2 , зависящими только от параметров модели. Из (2) следует утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в модели Блэка–Шоулса $r = \sigma^2/2$. Тогда для некоторых положительных констант C и c , зависящих только от параметров модели, при $T \geq C\Delta^{-1}$ для всех достаточно малых $\Delta > 0$

$$|V(x, T) - V(x, T, \Delta)| \leq c\Delta^{\frac{1}{2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично (1), имеем

$$|V(x, T) - V(x, T, \Delta)| \leq c\Delta + c_1 \max\{P\{T < \tau^* < \infty\}, P\{T < \tilde{\tau} < \infty\}\}.$$

В данном случае оптимальные моменты τ^* и $\tilde{\tau}$ являются конечными (см. [2; разделы VI.5, VIII.2]), и нам необходимо оценить

$$\max\{P\{\tau^* > T\}, P\{\tilde{\tau} > T\}\}.$$

Используя неравенство Берри–Эссеена, окончательно получаем аналогично (2)

$$|V(x, T) - V(x, T, \Delta)| \leq c\Delta + \frac{c_1}{\sqrt{T}} + \frac{c_2}{\sqrt{[T/\Delta]}}$$

для всех достаточно малых $\Delta > 0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть в модели Блэка–Шоулса $r > \sigma^2/2$. Тогда для некоторых положительных констант C и c , зависящих только от параметров модели, при $T \geq C\Delta^{-1}$ для всех достаточно малых $\Delta > 0$

$$|V(x, T) - V(x, T, \Delta)| \leq c\Delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя методу доказательства предыдущей теоремы, устанавливаем, что

$$|V(x, T) - V(x, T, \Delta)| \leq c\Delta + \frac{c_1}{\sqrt{T}} e^{-c_2 T} + \frac{c_3}{\sqrt{[T/\Delta]}}$$

с некоторыми положительными константами c, c_1, c_2, c_3 , зависящими только от параметров модели. Отсюда следует утверждение теоремы.

Автор благодарен профессору А. Н. Ширяеву, который инициировал написание этой заметки.

Список литературы

- [1] F. Black, M. Scholes, *J. Polit. Econ.*, **81**:3 (1973), 637–654. [2] А. Н. Ширяев, *Основы стохастической финансовой математики*, Фазис, М., 1998. [3] А. А. Новиков, А. Н. Ширяев, *Теория вероятн. и ее примен.*, **49**:2 (2004), 373–382.

Р. В. Иванов (R. V. Ivanov)
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: roma_ivanov@rambler.ru

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией
19.12.2005