Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Миллионщиков, Сходимость почти наверное ядерных оценок плотности для слабо зависимых случайных полей, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 1, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1694>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:09:31

Сходимость почти наверное ядерных оценок плотности для слабо зависимых случайных полей

Н. В. Миллионщиков

Задача оценивания плотности распределения случайных величин является одной из основных задач статистического анализа данных. Большое количество работ посвящено изучению свойств ядерных оценок плотности (см., например, [1]–[3]).

Пусть X_i , $i \in U_n$, – одинаково распределенные случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^s$, имеющие общую плотность распределения f , а U_n – конечное подмножество $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Ядерная оценка, или оценка Парзена–Розенблатта, плотности f задается формулой

$$\hat{f}_n(x) := |U_n|^{-1} h_n^{-s} \sum_{i \in U_n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right), \quad x \in \mathbb{R}^s, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где K – плотность некоторого вероятностного распределения, $\{h_n\}_{n \geq 1}$ – последовательность положительных чисел, $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$, а $|U_n|$ – число элементов множества U_n .

Состоятельность оценок (1) изучалась в случае, когда величины X_i независимы или удовлетворяют некоторым условиям зависимости, например, условиям перемешивания, положительной (отрицательной) ассоциированности (см., например, [2] и [3]). В данной работе используется подход к описанию стохастической зависимости, предложенный в [4] и [5]. Далее нам потребуются некоторые понятия и обозначения.

Функция $f: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ называется липшицевой, если

$$\text{Lip}(f) = \sup_{x, y \in \mathbb{R}^s, x \neq y} |f(x) - f(y)| / \|x - y\|_1 < \infty,$$

где $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^s |x_i|$, $x = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s$. Класс ограниченных липшицевых функций $f: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$, где $s \in \mathbb{N}$, обозначим BL .

Определим функционал $\psi: BL^2 \times \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ и для $I \subset \mathbb{Z}^d$, $r \in \mathbb{N}^d$ множество $I(r) \subset \mathbb{R}^d$ следующим образом:

$$\psi(f, g, x, y) := \min(x, y) \text{Lip}(f) \text{Lip}(g), \quad I(r) := \bigcup_{i \in I} \prod_{k=1}^d (i_k - r_k, i_k + r_k).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $U \subset \mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$. Случайное поле $X = \{X_t, t \in U\}$ со значениями в $\mathbb{R}^s$, $s \geq 1$, называется (BL, ψ, θ) -зависимым, где θ – массив положительных чисел $\theta = \{\theta_r\}$, $r \in \mathbb{N}^d$, если для любых непересекающихся конечных множеств $I, J \subset U$ с $I(r) \cap J = \emptyset$ и всех ограниченных липшицевых функций $f: \mathbb{R}^{s|I|} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{R}^{s|J|} \rightarrow \mathbb{R}$

$$|\text{cov}(f(X_i, i \in I), g(Y_j, j \in J))| \leq \psi(f, g, |I|, |J|) \theta_r.$$

Заметим, что в этом определении заложена возможность анизотропного изменения зависимости поля X . Для обширного класса случайных процессов и полей оно обобщает понятия положительной и отрицательной ассоциированности (см. [5]).

В [3] доказано, что при весьма широких условиях $|\hat{f}_n(x) - \mathbb{E} \hat{f}_n(x)| = O((nh_n)^{-\gamma/2})$ п.н. для всех $\gamma \in (0, 1)$. При этом, в частности, предполагается, что $\{X_i\}_{i \geq 1}$ образуют строго стационарную последовательность положительно или отрицательно ассоциированных случайных величин и $\sum_{|j| \geq m} \text{cov}(X_1, X_{j+1}) \leq \alpha^{-m}$ для некоторого $\alpha > 1$ и всех $m \in \mathbb{N}$. Сходные результаты для последовательностей ассоциированных случайных величин получены в [2].

В отличие от [2] и [3] мы рассматриваем серии зависимых случайных полей $X^{(n)} = \{X_i^{(n)}, i \in U_n\}$ с векторными значениями. Для них удастся получить более точную оценку скорости сходимости $\hat{f}_n(x)$ к $f(x)$, чем в упомянутых работах [2], [3]. При каждом $n \in \mathbb{N}$ оценки $\hat{f}_n(x)$ строятся по элементам полей $X^{(n)}$ в соответствии с формулой (1).

Введем ряд требований.

1°. $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность конечных подмножеств $\mathbb{Z}^d$. При всех $n \in \mathbb{N}$ случайные поля $X^{(n)}$ являются $(BL, \psi, \theta^{(n)})$ -зависимыми, случайные векторы $X_i^{(n)}$ имеют общую плотность распределения f , удовлетворяющую условию Липшица, а для $i \neq j$ случайные векторы $(X_i^{(n)}, X_j^{(n)})$ обладают плотностью распределения, ограниченной равномерно по n, i, j .

2°. Ядро K удовлетворяет условию Липшица и $\int_{\mathbb{R}^s} \|x\| K(x) dx < \infty$.

Введем $\sigma_f^2 := f(y) \int_{x \in \mathbb{R}^s} K^2(x) dx > 0$. Из 2° следует, что $\sup_{x \in \mathbb{R}^s} K(x) = M < \infty$.

3°. Существуют последовательности $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ элементов $\mathbb{N}^d$ такие, что $p_{n1} \cdots p_{nd} \leq C_1 (|U_n| h_n^s / \ln n)^{1/2}$ для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, где $C_1 < \sigma_f / M$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} q_{n1} \cdots q_{nd} h_n^s = 0$. Кроме того, для некоторых $C_2 \geq 0$, $C_3 > M / \sigma_f$ справедливо неравенство $\theta_{p_n}^{(n)} \leq C_2 \exp\{-C_3 \sqrt{|U_n| h_n^{-s} \ln n}\}$. Пусть также $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n^{-(s+2)} \theta_{q_n}^{(n)} = 0$ и существуют $a_1, a_2 > 0$ такие, что $n^{a_1} \leq |U_n| \leq n^{a_2}$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} |U_n| h_n^s = \infty$.

4°. Плотность f дважды непрерывно дифференцируема, $\sup_{x \in \mathbb{R}^s} \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right| < C_4$ для всех $i, j = 1, \dots, s$ и некоторого $C_4 > 0$, $\int_{x \in \mathbb{R}^s} x K(x) dx = 0$ и $\int_{x \in \mathbb{R}^s} \|x\|^2 K(x) dx < \infty$.

С помощью новых экспоненциальных неравенств для распределений сумм зависимых случайных величин установлена следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются условия 1°, 2°, 3° и либо $\lim_{n \rightarrow \infty} |U_n| h_n^{s+2} = 0$, либо верно условие 4° и $\lim_{n \rightarrow \infty} |U_n| h_n^{s+4} = 0$. Тогда для всех $x \in \mathbb{R}^s$ таких, что $f(x) > 0$, $|\hat{f}_n(x) - f(x)| = O(\sqrt{|U_n|^{-1} h_n^{-s} \ln |U_n|})$ п.н. при $n \rightarrow \infty$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполняются условия 1°, 2° и 4°. Предположим, что $h_n \sim |U_n|^{-\alpha/s}$ для некоторого $\alpha \in (s/(s+4), 1)$ и $\theta_r^{(n)} \leq \exp\{-m_r^{d \frac{1+\alpha+\delta}{1-\alpha-\delta}}\}$ для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ и любых $r \in \mathbb{N}^d$, здесь $\delta \in (0, 1-\alpha)$, а $m_r = \min_{i=1, \dots, d} |r_i|$. Если существуют $a_1, a_2 > 0$ такие, что $n^{a_1} \leq |U_n| \leq n^{a_2}$, то при всех $x \in \mathbb{R}^s$, для которых $f(x) > 0$, имеем $|\hat{f}_n(x) - f(x)| = O(|U_n|^{-(1-\alpha)/2} (\ln |U_n|)^{1/2})$ п.н. при $n \rightarrow \infty$.

Заметим, что если использовать экспоненциально быстрое убывание θ_r вместо сверхэкспоненциального, то для полей $X^{(n)}$ справедлив аналог результатов, полученных в [3] для процессов.

Список литературы

- [1] А. В. Булинский, Н. В. Миллионщиков, *Теория вероятн. и матем. статист.*, **66** (2002), 34–45. [2] C. Henriques, P. E. Oliveira, “Almost optimal convergence rates for kernel density estimation under association”, *Preprint* № 04-06, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 2002. [3] E. Masry, *Statist. Probab. Lett.*, **58:2** (2002), 205–219. [4] P. Doukhan, S. Louhichi, *Stochastic Process. Appl.*, **84:2** (1999), 313–342. [5] A. Bulinski, Ch. Suquet, *Statist. Probab. Lett.*, **54:2** (2001), 215–226.

Н. В. Миллионщиков (N. V. Millionshchikov)
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией
01.12.2005