Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Воротников, В. Г. Звягин, О траекторных и глобальных аттракторах для уравнений движения вязкоупругой среды, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 2, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1695>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:03:24

О траекторных и глобальных аттракторах для уравнений движения вязкоупругой среды

Д. А. Воротников, В. Г. Звягин

Пусть E и E_0 – банаховы пространства, $E \subset E_0$, E рефлексивно. Рассматривается абстрактное дифференциальное уравнение

$$u'(t) = A(u(t)), \quad u(t) \in E. \quad (1)$$

В заметке изучаются аттракторы решений этого уравнения, принадлежащих пространству $C([0, +\infty); E_0) \cap L_\infty(0, +\infty; E)$, с целью приложения к системам гидродинамики неньютоновских сред.

Пусть для уравнения (1) фиксировано некоторое семейство $\mathcal{H}^+ \subset C([0, +\infty); E_0) \cap L_\infty(0, +\infty; E)$ его решений (сильных, слабых и т. п.), определенных на положительной полуоси $t \geq 0$. Множество $\mathcal{H}^+$ будем называть пространством траекторий.

Определения. 1. Множество $P \subset C([0, +\infty); E_0) \cap L_\infty(0, +\infty; E)$ называется притягивающим (для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$), если для любого ограниченного в $L_\infty(0, +\infty; E)$ множества $B \subset \mathcal{H}^+$ и любого $M > 0$ выполнено $\sup_{u \in B} \inf_{v \in P} \|T(h)u - v\|_{C([0, M]; E_0)} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +\infty$. Здесь и ниже $T(h)$ обозначает оператор трансляции (сдвига): $T(h)(u)(t) = u(t + h)$. 2. Притягивающее множество P называется траекторным полуаттрактором, если P компактно в $C([0, +\infty); E_0)$, ограничено в $L_\infty(0, +\infty; E)$ и $T(t)P \subset P$ для всех $t \geq 0$. 3. Траекторный полуаттрактор P называется траекторным аттрактором, если $T(t)P = P$ для всех $t \geq 0$. 4. Траекторный аттрактор называется минимальным, если он содержится в любом другом траекторном аттракторе. 5. Множество $\mathcal{A} \subset E$ называется глобальным аттрактором (в E_0) для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$ уравнения (1), если i) $\mathcal{A}$ компактно в E_0 и ограничено в E ; ii) $\sup_{u \in B} \inf_{v \in \mathcal{A}} \|u(t) - v\|_{E_0} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для любого ограниченного в $L_\infty(0, +\infty; E)$ множества $B \subset \mathcal{H}^+$; iii) $\mathcal{A}$ содержится в любом множестве, удовлетворяющем условиям i) и ii). 6. Ядром $K(P)$ множества $P \subset C([0, +\infty); E_0) \cap L_\infty(0, +\infty; E)$ называется множество $\{u \in L_\infty(-\infty, +\infty; E) \mid \Pi_+ T(t)u \in P \ \forall t \in \mathbb{R}\}$. Здесь Π_+ обозначает оператор сужения на полуось $[0, +\infty)$.

Замечание. Если траекторный аттрактор для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$ содержится в $\mathcal{H}^+$, то он является минимальным. В [1] (при дополнительном ограничении $T(h)\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^+$ для всех $h \geq 0$) под траекторным аттрактором подразумевается траекторный аттрактор в смысле определения 3, содержащийся в $\mathcal{H}^+$. Таким образом, используемое нами понятие минимального траекторного аттрактора является более широким, чем понятие траекторного аттрактора из [1], но обладает многими обычными свойствами траекторных аттракторов. В частности, минимальный траекторный аттрактор всегда порождает глобальный аттрактор (теорема 2). В то же время, этот более общий подход позволяет строить аттракторы без ограничений на пространство $\mathcal{H}^+$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть существует траекторный полуаттрактор P для $\mathcal{H}^+$. Тогда существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$. При этом $\Pi_+ K(\mathcal{H}^+) \subset \mathcal{U} = \Pi_+ K(\mathcal{U}) \subset \Pi_+ K(P)$, а ядро $K(\mathcal{H}^+)$ относительно компактно в $C((-\infty, +\infty); E_0)$ и ограничено в $L_\infty(-\infty, +\infty; E)$.

ТЕОРЕМА 2. Если существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ для $\mathcal{H}^+$, то существует глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ для $\mathcal{H}^+$, причем для всех $t \geq 0$: $K(\mathcal{H}^+)(t) \subset \mathcal{A} = \mathcal{U}(t) = K(\mathcal{U})(t)$. Здесь $\mathcal{U}(t) = \{v(t) \mid v \in \mathcal{U}\}$, $K(P)(t) = \{v(t) \mid v \in K(P)\}$.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 04-01-00081).

С помощью этих результатов строятся аттракторы краевой задачи для уравнений движения несжимаемой вязкоупругой среды с определяющим соотношением Джеффриса [2], описывающим растворы полимеров, битумы, бетоны, земную кору:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \mu_1 \Delta u + \operatorname{grad} p = \operatorname{Div} \tau + f, \quad \tau + \lambda_1 \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \right) = 2(\eta - \mu_1) \mathcal{E},$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Здесь Ω – произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$), u – неизвестный вектор скорости точек среды, p – неизвестная функция давления, τ – неизвестный тензор (неньютоновская составляющая тензора касательных напряжений). Все они зависят от точки $x \in \Omega$ и момента времени t . $f(x)$ – плотность внешних сил, $\mathcal{E} = \mathcal{E}(u) = (\mathcal{E}_{ij})$, $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ – тензор скоростей деформации, $\eta > 0$ – вязкость среды, $\lambda_1 > 0$ – время релаксации, $\mu_1 < \eta$ – положительная константа. Плотность среды считается единичной. Существование глобальных по времени сильных решений и единственность слабых решений для этой задачи являются открытыми проблемами. Также не удается построить класс существования слабых решений, для которого соответствующее пространство траекторий было бы одновременно инвариантно относительно оператора $T(t)$ и имело бы компактное ограниченное притягивающее множество.

Обозначения. $\mathbb{R}_S^{n \times n}$ – пространство симметричных матриц порядка $n \times n$; H, V, V_δ ($\delta \in (0, 1]$) – замыкания множества $\mathcal{V} = \{u \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n), \operatorname{div} u = 0\}$ соответственно в $L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $W_2^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $W_2^\delta(\Omega, \mathbb{R}^n)$; $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ или $L_2(\Omega, \mathbb{R}^{n^2})$ и $\|v\|_1 = \|\nabla v\|$, $v \in H^1$; $C_w(J; X)$ – пространство слабо непрерывных функций на промежутке $J \subset \mathbb{R}$ со значениями в некотором банаховом пространстве X ; $\gamma := \min(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{\mu_1}{2K_0(\Omega)^2})$, где $K_0(\Omega)$ – константа из неравенства Фридрихса $\|v\| \leq K_0(\Omega) \|v\|_1$, $v \in V$.

В качестве пространства E берется $H \times L_2(\Omega, \mathbb{R}_S^{n \times n})$, а в качестве E_0 – пространство $V_\delta^* \times H^{-\delta}(\Omega, \mathbb{R}_S^{n \times n})$, $\delta \in (0, 1]$. В качестве пространства траекторий $\mathcal{H}^+$ для модели Джеффриса берется множество пар функций (u, τ) , которые i) принадлежат классу $u \in L_{2, \text{loc}}(0, +\infty; V) \cap L_\infty(0, +\infty; H) \cap C_w([0, +\infty); H)$, $\tau \in L_\infty(0, +\infty; L_2) \cap C_w([0, +\infty); L_2)$; ii) являются слабыми решениями задачи (2), (точное определение см. в [3; задача (3.1), (3.2)]); iii) удовлетворяют энергетическому неравенству: $\frac{1}{2} \|u\|_{L_\infty(t, t+1; H)}^2 + \frac{1}{4\mu_2} \|\tau\|_{L_\infty(t, t+1; L_2)}^2 + \frac{\mu_1}{2} \|u\|_{L_2(t, t+1; V)}^2 \leq e^{-2\gamma t} (\|u\|_{L_\infty(0, +\infty; H)}^2 + \frac{1}{2\mu_2} \|\tau\|_{L_\infty(0, +\infty; L_2)}^2) + \frac{\gamma+1}{2\mu_1\gamma} \|f\|_{V^*}^2$ при $t \geq 0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in V^*$. Для любых $a \in H$, $\tau_0 \in L_2(\Omega, \mathbb{R}_S^{n \times n})$ существует пара функций (траектория) $(u, \tau) \in \mathcal{H}^+$, удовлетворяющая начальному условию $u|_{t=0} = a$, $\tau|_{t=0} = \tau_0$.

ТЕОРЕМА 4. Для модели Джеффриса существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}_J$. В пространстве $H \times L_2$ существует глобальный аттрактор $\mathcal{A}_J$, т.е. минимальное компактное в $V_\delta^* \times H^{-\delta}$ и ограниченное в $H \times L_2$ притягивающее все траектории из $\mathcal{H}^+$ множество. Для всех $t \geq 0$ $K(\mathcal{H}^+)(t) \subset \mathcal{A}_J = \mathcal{U}_J(t) = K(\mathcal{U}_J)(t)$.

Список литературы

- [1] М. И. Вишик, В. В. Чепыжов, *Матем. заметки*, **71**:2 (2002), 194–213. [2] М. Рейнер, *Реология*, Наука, М., 1965. [3] D. A. Vorotnikov, V. G. Zvyagin, *Abstr. Appl. Anal.*, 2004, № 10, 815–829.

Д. А. Воротников (D. A. Vorotnikov)
Воронежский государственный университет
E-mail: mitvorot@math.vsu.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
01.12.2005

В. Г. Звягин (V. G. Zvyagin)
Воронежский государственный университет
E-mail: zvyagin@alg.vsu.ru